

УДК 517.958

ПРОСТЕЙШИЕ ГРАФЫ С МАЛЫМИ РЕБРАМИ: АСИМПТОТИКИ РЕЗОЛЬВЕНТ И ГОЛОМОРФНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СПЕКТРА

Д.И. БОРИСОВ, М.Н. КОНЫРКУЛЖАЕВА

Аннотация. Рассматривается простейший граф, состоящий из двух ребер конечной длины и малого ребра с общей внутренней вершиной. Длина малого ребра считается малым параметром в задаче. На таком графе ребре рассматривается оператор Шрёдингера с условием Кирхгофа во внутренней вершине, условиями Дирихле на внешних вершинах конечных ребер и условием Дирихле либо условием Неймана на внешней вершине малого ребра. Показано, что такой оператор в смысле равномерной резольвентной сходимости сходится к оператору Шрёдингеру на графе без малого ребра, для которого во внутренней вершине следует поставить условие Дирихле, если на внешней вершине малого ребра исходно ставилось условие Дирихле. Если же на внешней вершине малого ребра исходно ставилось условие Неймана, то в пределе во внутренней вершине сохраняется условие Кирхгофа, в котором тем не менее может измениться коэффициент. Основной полученный результат для резольвент – выяснение вида первой поправки в их асимптотике и получение оценки остатка.

Вторая часть работы посвящена изучению зависимости собственных значений от малого параметра. Несмотря на сингулярное возмущение графа, собственные значения зависят от малого параметра голоморфно и представляются сходящимися степенными рядами. Обнаружено, что при возмущении могут возникать неподвижные собственные значения, остающиеся на месте и не зависящие от малого параметра. Приведен критерий, определяющий возникновение таких собственных значений. Для подвижных собственных значений выписаны формулы для коэффициента в первом члене в их ряде Тейлора.

Ключевые слова: граф, малое ребро, спектр, асимптотика.

Mathematics Subject Classification: 34B45, 81Q15

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние двадцать лет спектральная теория эллиптических операторов на графах, или просто теория квантовых графов, активно развивается и имеет огромное число работ по этой тематике. Не ставя целью перечислить все работы, мы упомянем лишь монографии [5], [7] и список литературы в данных книгах.

Важным направлением исследований является развитие теории возмущений для квантовых графов. И одним из наиболее интересных возмущений, обусловленных специфической геометрией графов, являются малые ребра. Подобные задачи стали рассматриваться сравнительно недавно. В работе [9] было показано, что произвольное краевое условие в

D.I. BORISOV, M.N. KONYRKULZHAEVA, SIMPLEST GRAPHS WITH SMALL EDGES: ASYMPTOTICS FOR RESOLVENTS AND HOLOMORPHIC DEPENDENCE OF THE SPECTRUM.

© БОРИСОВ Д.И., КОНЫРКУЛЖАЕВА М.Н. 2019.

Исследование Д.И. Борисова выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00046.

Поступила 5 января 2019 г.

вершине может быть аппроксимировано в смысле равномерной резольвентной сходимости с помощью графа с малыми ребрами и δ -взаимодействиями во внутренних вершинах. Наиболее подробное исследование графов с малыми ребрами было сделано в работе [8]. Здесь рассматривались графы произвольной структуры с произвольными краевыми условиями в вершинах и предполагалось, что у рассматриваемых графов часть ребер имеют малую длину. Были детально исследованы вопросы равномерной резольвентной сходимости и сходимости спектров для таких задач в зависимости от структуры графов и заданных краевых условий.

Результаты работы [8] ставят следующие естественные вопросы: как выглядит асимптотика резольвент операторов на графах с малыми ребрами? Какова зависимость спектра от длин малых ребер, например, как от них зависят собственные значения? Разумеется, ответы на эти вопросы нужно начинать искать с рассмотрения наиболее простых графов и пожалуй простейшая модель – это звездный граф с тремя ребрами, одно из которых имеет малую длину, см. рис. 1. Удивительно, но даже у этой простой модели обнаруживаются достаточно неожиданные свойства. На наш взгляд, эти свойства заслуживают отдельного исследования упомянутой модели – это и делается в настоящей статье.

Основные полученные результаты таковы. В рассматриваемом графе во внутренней вершине ставится условие δ -взаимодействия, на внешних вершинах конечных ребер – условие Дирихле, на внешней вершине малого ребра – условие Неймана или условие Дирихле. Малым параметром служит длина малого ребра. В качестве оператора выбирается оператор Шрёдингера, причем на малом ребре допускается сингулярная зависимость потенциала от малого параметра. Предельный оператор – это тот же оператор Шрёдингера, но на графе без малого ребра (рис. 2.) В случае условия Дирихле на внешней вершине малого ребра в пределе во внутренней вершине δ -взаимодействие заменяется условием Дирихле. В случае условия Неймана на внешней вершине малого ребра δ -взаимодействие во внутренней вершине остается, но в коэффициенте возникает добавка, равная среднему значению сингулярного потенциала на малом ребре. В обоих случаях в работе получены первые поправки для резольвенты исходного оператора и дана оценка остатка в смысле операторной нормы резольвенты. При этом оказывается, что остаток оценивается только L_2 -нормой на малом ребре для функций, на которые действуют резольвенты исходного и предельного операторов, см. теоремы 2.1, 2.2.

Далее в работе исследуется поведение собственных значений в зависимости от малого параметра. Обнаруживается, что собственные значения у рассматриваемых графов с малым ребром зависят от малого параметра *голоморфно*. Это достаточно неожиданный результат в свете упомянутого выше факта, что малое ребро является сингулярным возмущением и при таких возмущениях для собственных значений можно выписать асимптотические ряды, но они как правило даже не сходятся. Кроме того, у модели обнаруживаются неподвижные собственные значения, не зависящие от малого параметра. Для подвижных собственных значений мы явно находим первые члены их рядов Тейлора и в случае краевого условия Дирихле на внешней границе малого ребра эти поправки оказываются отрицательно определенными.

В заключение этого параграфа кратко опишем структуру статьи. В следующем параграфе вводятся основные обозначения и строго формулируются результаты. В третьем и четвертом параграфах строятся первые члены асимптотических разложений резольвент. Поведение собственных значений изучается в пятом и шестом параграфах.

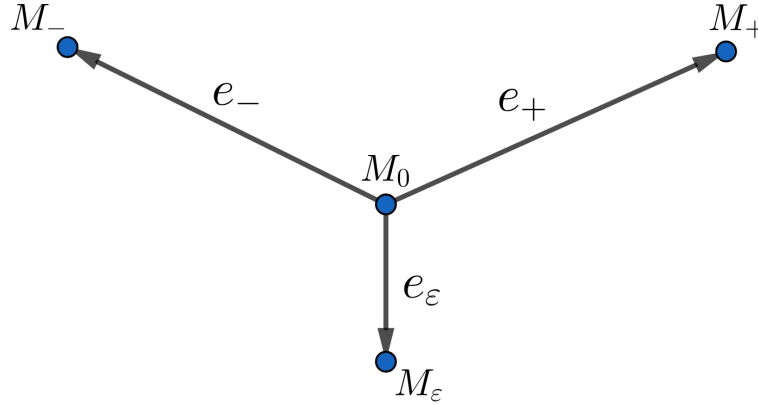


РИС. 1. Граф Γ_ε с малым ребром: длины ребер e_\pm равны фиксированным числам a_\pm , длина ребра e_ε равна ε и является малым параметром

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть Γ_ε – ориентированный граф, состоящий из трех ребер конечной длины, одной внутренней вершины, соединяющей эти ребра и трех граничных вершин. Два ребра выберем фиксированной длины, а третье ребро будем считать малым (рис. 1.) Ребра графа обозначим через e_- , e_+ , e_ε с длинами соответственно a_- , a_+ и ε , где ε – малый положительный параметр. На ребрах зададим соответственно переменные $x_\pm \in [0, a_\pm]$ и $x_\varepsilon \in [0, \varepsilon]$. Внутреннюю вершину обозначаем через M_0 и считаем, что она соответствует значениям $x_\pm = 0$, $x_\varepsilon = 0$. Граничные вершины соответствуют значениям $x_\pm = a_\pm$, $x_\varepsilon = \varepsilon$ и обозначаются через M_\pm и M_ε .

В пространстве $L_2(\Gamma_\varepsilon) := L_2(e_-) \oplus L_2(e_+) \oplus L_2(e_\varepsilon)$ определим оператор Шрёдингера:

$$-\frac{d^2}{dx^2} + V_\varepsilon(x) + \alpha\delta(x), \quad (2.1)$$

где производные берутся по переменным на ребрах, а потенциал V_ε задается равенством

$$V_\varepsilon(x) := \begin{cases} W_-(x_-) & \text{на } e_-, \\ W_+(x_+) & \text{на } e_+, \\ \varepsilon^{-1}W_{-1}\left(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}\right) + W_0\left(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}\right) & \text{на } e_\varepsilon. \end{cases}$$

Здесь W_\pm – вещественные ограниченные измеримые функции на e_\pm , W_{-1} , W_0 – вещественные ограниченные измеримые функции на $[0, 1]$. Последнее слагаемое в (2.1) описывает δ -взаимодействие с константой связи $\alpha \in \mathbb{R}$ и оно соответствует следующему граничному условию во внутренней вершине:

$$u_-(0) = u_+(0) = u_\varepsilon(0) =: u(M_0), \quad u'_-(0) + u'_+(0) + u'_\varepsilon(0) = \alpha u(M_0), \quad (2.2)$$

где $u = (u_-, u_+, u_\varepsilon)$ – функция, заданная на графе Γ_ε . На граничных вершинах M_\pm выставляется краевое условие Дирихле:

$$u_\pm(M_\pm) = 0, \quad (2.3)$$

а на вершине M_ε – краевое условие Дирихле

$$u_\varepsilon(\varepsilon) = 0 \quad (2.4)$$

или краевое условие Неймана

$$u'_\varepsilon(\varepsilon) = 0. \quad (2.5)$$

Описанный оператор обозначаем через $\mathcal{H}_\varepsilon^D$ в случае краевого условия (2.4) и через $\mathcal{H}_\varepsilon^R$ в случае краевого условия (2.5). В качестве областей определения операторов $\mathcal{H}_\varepsilon^D$ и $\mathcal{H}_\varepsilon^R$ берутся следующие плотные подмножества в $L_2(\Gamma_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\mathcal{H}_\varepsilon^D) &:= \{u = (u_-, u_+, u_\varepsilon) \in L_2(\Gamma_\varepsilon) : u_\pm \in W_2^2(e_\pm), u_\varepsilon \in W_2^2(e_\varepsilon), \\ &\quad \text{выполнены условия (2.2), (2.3), (2.4)}\}, \\ \mathfrak{D}(\mathcal{H}_\varepsilon^R) &:= \{u = (u_-, u_+, u_\varepsilon) \in L_2(\Gamma_\varepsilon) : u_\pm \in W_2^2(e_\pm), u_\varepsilon \in W_2^2(e_\varepsilon), \\ &\quad \text{выполнены условия (2.2), (2.3), (2.5)}\}. \end{aligned}$$

Операторы $\mathcal{H}_\varepsilon^D$ и $\mathcal{H}_\varepsilon^R$ самосопряжены.

Основная цель работы – исследовать поведение резольвент и спектров операторов $\mathcal{H}_\varepsilon^D$ и $\mathcal{H}_\varepsilon^R$ при малых ε .

Для формулировки основных результатов нам понадобятся вспомогательные обозначения. Через Γ_0 обозначим граф, полученный из Γ_ε удалением ребра a_ε и вершины M_ε , то есть, граф Γ_0 состоит из двух ребер e_- и e_+ , соединенных вершиной M_0 и двух граничных вершин M_\pm (см. рис. 2.)

В пространстве $L_2(\Gamma_0) := L_2(e_-) \oplus L_2(e_+)$ рассмотрим оператор с дифференциальным выражением

$$-\frac{d^2}{dx^2} + V_0, \quad V_0 := W_\pm \quad \text{на} \quad e_\pm,$$

с краевым условием Дирихле в граничных вершинах M_\pm :

$$u_\pm(M_\pm) = 0. \quad (2.6)$$

В вершине M_0 ставится либо условие Дирихле

$$u_\pm(0) = 0, \quad (2.7)$$

либо задается дельта-взаимодействие:

$$u_-(0) = u_+(0) =: u(0), \quad u'_+(0) + u'_-(0) = (\alpha + \beta)u(0), \quad \beta := \int_0^1 W_{-1}(t) dt. \quad (2.8)$$

В случае условия (2.7) оператор обозначаем через \mathcal{H}_0^D , в случае условия (2.8) – через \mathcal{H}_0^R . В качестве областей определения этих операторов берутся следующие плотные подмножества в $L_2(\Gamma_0)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\mathcal{H}_0^D) &:= \{u = (u_-, u_+) \in L_2(\Gamma_0) : u_\pm \in W_2^2(e_\pm), \text{ выполнены условия (2.6), (2.7)}\}, \\ \mathfrak{D}(\mathcal{H}_0^R) &:= \{u = (u_-, u_+) \in L_2(\Gamma_0) : u_\pm \in W_2^2(e_\pm), \text{ выполнены условия (2.6), (2.8)}\}. \end{aligned}$$

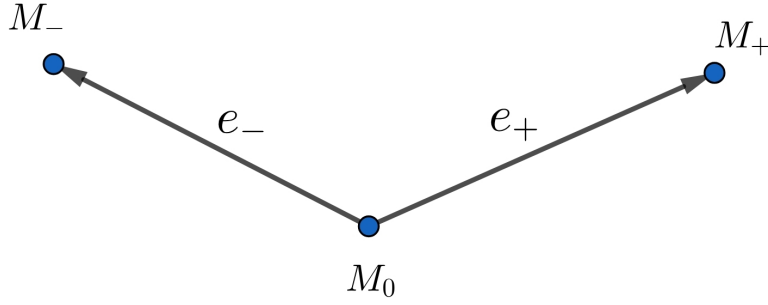
Операторы \mathcal{H}_0^D , \mathcal{H}_0^R самосопряжены.

Через $U_\pm = U_\pm(x_\pm, \lambda)$ обозначим решения задач Коши:

$$-U''_\pm + (W_\pm - \lambda)U_\pm = 0 \quad \text{в} \quad (0, a_\pm), \quad U_\pm(a_\pm, \lambda) = 0, \quad U'_\pm(a_\pm, \lambda) = 1. \quad (2.9)$$

Такие задачи однозначно разрешимы и решения голоморфны по $\lambda \in \mathbb{C}$ в норме $W_2^2(0, a_\pm)$. Для $\text{Im } \lambda \neq 0$ обозначим

$$\Psi(x) := \begin{cases} \frac{U_-(x_-, \lambda)}{U_-(0, \lambda)} & \text{на} \quad e_-, \\ \frac{U_+(x_+, \lambda)}{U_+(0, \lambda)} & \text{на} \quad e_+. \end{cases}$$

Рис. 2. Предельный граф Γ_0

Данная функция определена корректно и $U_{\pm}(0, \lambda) \neq 0$ при $\text{Im } \lambda \neq 0$, так как иначе операторы Шрёдингера $-\frac{d^2}{dx^2} + W_{\pm}$ на ребрах e_{\pm} с краевыми условиями Дирихле имели бы комплексные собственные значения.

Наш первый результат описывает равномерную резольвентную сходимость операторов $\mathcal{H}_{\varepsilon}^D$ и $\mathcal{H}_{\varepsilon}^R$ к операторам \mathcal{H}_0^D и \mathcal{H}_0^R . Теорема о сходимости оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon}^D$ выглядит следующим образом.

Теорема 2.1. При $\text{Im } \lambda \neq 0$ для всех $f \in L_2(\Gamma_{\varepsilon})$ верны оценки:

$$\|(\mathcal{H}_{\varepsilon}^D - \lambda)^{-1}f - (\mathcal{H}_0^D - \lambda)^{-1}f|_{\Gamma_0} - \ell_{\varepsilon}^D(f_{\varepsilon})\Psi\|_{W_2^2(e_{-}) \oplus W_2^2(e_{+})} \leq c\varepsilon^{\frac{5}{2}}\|f\|_{L_2(e_{\varepsilon})}, \quad (2.10)$$

$$\|(\mathcal{H}_{\varepsilon}^D - \lambda)^{-1}f\|_{L_2(e_{\varepsilon})} \leq C\varepsilon\|f\|_{L_2(e_{\varepsilon})}, \quad (2.11)$$

где c – некоторая константа, не зависящая от f и ε , и

$$\ell_{\varepsilon}^D(f_{\varepsilon}) := \int_0^{\varepsilon} x_{\varepsilon} f_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}) dx_{\varepsilon}, \quad |\ell_{\varepsilon}^D(f_{\varepsilon})| \leq \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}\|f_{\varepsilon}\|_{L_2(e_{\varepsilon})}. \quad (2.12)$$

Результаты о сходимости резольвенты оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon}^R$ приводятся в следующей теореме.

Теорема 2.2. При $\text{Im } \lambda \neq 0$ для всех $f \in L_2(\Gamma_{\varepsilon})$ верны оценки:

$$\|(\mathcal{H}_{\varepsilon}^R - \lambda)^{-1}f - (\mathcal{H}_0^R - \lambda)^{-1}f|_{\Gamma_0} - \varepsilon\ell_{\varepsilon}^R(f)\Psi\|_{W_2^2(e_{-}) \oplus W_2^2(e_{+})} \leq c\varepsilon^{\frac{5}{2}}\|f\|_{L_2(e_{\varepsilon})}, \quad (2.13)$$

$$\|(\mathcal{H}_{\varepsilon}^R - \lambda)^{-1}f\|_{L_2(e_{\varepsilon})} \leq c\varepsilon\|f\|_{L_2(e_{\varepsilon})}, \quad (2.14)$$

где c – некоторая константа, не зависящая от f и ε , и

$$\ell_{\varepsilon}^R(f) := \frac{U_{-}(0, \lambda)U_{+}(0, \lambda)}{F(\lambda) - (\alpha + \beta)U_{-}(0, \lambda)U_{+}(0, \lambda)} \int_0^{\varepsilon} f(x_{\varepsilon}) dx_{\varepsilon}, \quad |\ell_{\varepsilon}^R(f)| \leq c\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_2(e_{\varepsilon})}.$$

Выражение $F(\lambda) - (\alpha + \beta)U_{-}(0, \lambda)U_{+}(0, \lambda)$ не обращается в нуль при $\text{Im } \lambda \neq 0$.

Операторы $\mathcal{H}_{\varepsilon}^D$, $\mathcal{H}_{\varepsilon}^R$, \mathcal{H}_0^D , и \mathcal{H}_0^R имеют компактную резольвенту и их спектры чисто дискретные. Через $\lambda_n^D(\varepsilon)$ и $\lambda_n^R(\varepsilon)$ обозначим собственные значения операторов $\mathcal{H}_{\varepsilon}^D$ и $\mathcal{H}_{\varepsilon}^R$, упорядоченные в порядке возрастания с учетом кратности. Наш второй результат описывает поведение этих собственных значений при $\varepsilon \rightarrow +0$. Прежде, чем его сформулировать, опишем спектр операторов \mathcal{H}_0^D и \mathcal{H}_0^R .

Собственные значения оператора \mathcal{H}_0^D совпадают с корнями уравнения

$$U_{-}(0, \lambda)U_{+}(0, \lambda) = 0. \quad (2.15)$$

Эти корни обозначим через Λ_n^D , $n \in \mathbb{N}$, и упорядочим по возрастанию с учетом кратности как собственных значений. Если некоторое Λ_n^D является нулем только одной из функций

$U_{\pm}(0, \lambda)$, то такое собственное значение простое. Если оно является корнем обеих функций $U_{\pm}(0, \lambda)$, то такое собственное значение двукратное и в этом случае $\Lambda_n^D = \Lambda_{n+1}^D$ согласно выбранному упорядочиванию.

Теорема 2.3. *При достаточно малых ε собственные значения $\lambda_n^D(\varepsilon)$ голоморфны по ε и $\lambda_n^D(0) = \Lambda_n^D$. Если Λ_n^D – простое собственное значение, то собственное значение $\lambda_n^D(\varepsilon)$ также простое и*

$$\frac{d\lambda_n^D}{d\varepsilon}(0) = -\frac{(U'_{\pm}(0, \Lambda_n^D))^2}{\|U_{\pm}(\cdot, \Lambda_n^D)\|_{L_2(e_{\pm})}^2} \quad \text{при } U_{\pm}(0, \Lambda_n^D) = 0, \quad U_{\mp}(0, \Lambda_n^D) \neq 0. \quad (2.16)$$

Если $\Lambda_n^D = \Lambda_{n+1}^D$ – двукратное собственное значение, то оператор $\mathcal{H}_{\varepsilon}^D$ имеет два собственных значения $\lambda_n^D(\varepsilon)$ и $\lambda_{n+1}^D(\varepsilon)$, сходящихся к Λ_n^D при $\varepsilon \rightarrow +0$. Собственное значение $\lambda_n^D(\varepsilon)$ голоморфно по ε и верно равенство

$$\frac{d\lambda_n^D}{d\varepsilon}(0) = -\frac{(U'_{-}(0, \Lambda_n^D))^2}{\|U_{-}(\cdot, \Lambda_n^D)\|_{L_2(e_{-})}^2} - \frac{(U'_{+}(0, \Lambda_n^D))^2}{\|U_{+}(\cdot, \Lambda_n^D)\|_{L_2(e_{+})}^2}. \quad (2.17)$$

Собственное значение $\lambda_{n+1}^D(\varepsilon)$ не зависит от ε и совпадает с Λ_n^D .

Обозначим:

$$F(\lambda) := U'_{+}(0, \lambda)U_{-}(0, \lambda) + U'_{-}(0, \lambda)U_{+}(0, \lambda).$$

Собственные значения оператора \mathcal{H}_0^R совпадают с корнями уравнения

$$F(\lambda) - (\alpha + \beta)U_{-}(0, \lambda)U_{+}(0, \lambda) = 0. \quad (2.18)$$

Эти собственные значения обозначим через Λ_n^R и упорядочим по возрастанию с учетом кратностей.

Теорема 2.4. *Все собственные значения Λ_n^R простые. Для каждого Λ_n^R числа $U_{-}0(0, \Lambda_n^R)$ и $U_{+}0(0, \Lambda_n^R)$ обращаются или не обращаются в нуль одновременно.*

При достаточно малых ε собственные значения $\lambda_n^R(\varepsilon)$ голоморфны по ε и выполнены равенства $\lambda_n^R(0) = \Lambda_n^R$. Если $U_{\pm}(0, \Lambda_n^R) = 0$, то $\lambda_n^R(\varepsilon)$ не зависит от ε и совпадает с Λ_n^R . Если $U_{\pm}(0, \Lambda_n^R) \neq 0$, то верны равенства:

$$\frac{d\lambda_n^R}{d\varepsilon}(0) = \frac{U_{-}(0, \Lambda_n^R)U_{+}(0, \Lambda_n^R) \left(\int_0^1 W_0(t) dt - \int_0^1 \left(\int_t^1 W_{-1}(s) ds \right)^2 dt + \Lambda_n^R \right)}{(U_{+}(0, \Lambda_n^R))^2 \|U_{-}(\cdot, \Lambda_n^R)\|_{L_2(e_{-})}^2 + (U_{-}(0, \Lambda_n^R))^2 \|U_{+}(\cdot, \Lambda_n^R)\|_{L_2(e_{+})}^2}. \quad (2.19)$$

Обсудим основные результаты работы. Сразу подчеркнем, что несмотря на простой вид графа Γ_{ε} , полученные результаты весьма богаты по содержанию. Согласно теоремам 2.1, 2.2, при уменьшении длины ребра e_{ε} , резольвенты операторов $\mathcal{H}_{\varepsilon}^D$ и $\mathcal{H}_{\varepsilon}^R$ сходятся к резольвентам операторов \mathcal{H}_0^D и \mathcal{H}_0^R . Сходимость для оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon}^D$ означает, что если на внешней вершине малого ребра ставится краевое условие Дирихле, то в пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ это краевое условие заменяет условие Кирхгофа во внутренней вершине M_0 . В свете работы [8] это достаточно ожидаемый результат. Вместе с тем, теорема 2.1 дает больше информации о сходимости резольвенты. А именно, оценка (2.10) дана в более сильной норме ограниченных операторов из $L_2(\Gamma_{\varepsilon})$ в $W_2^2(e_{-}) \oplus W_2^2(e_{+})$. Кроме того, в оценке приведен также первый член разложения резольвенты, которым является слагаемое $\ell_{\varepsilon}^D(f_{\varepsilon})\Psi$. Оно мало по норме в силу (2.12). Оценка (2.11) означает, что резольвента возмущенного оператора, суженная на малое ребро e_{ε} , мала в норме $L_2(e_{\varepsilon})$. Обратим еще внимание на правые части оценок (2.10) и (2.11). В них фигурирует только норма правой части по малому ребру. Это означает, что если сужение правой части на малое ребро равно нулю,

то действия резольвент операторов $\mathcal{H}_\varepsilon^D$ и \mathcal{H}_0^D на такие функции f совпадают на Γ_0 и действие резольвенты оператора $\mathcal{H}_\varepsilon^D$ малом ребре равно нулю. Другими словами, разность резольвент фактически зависит лишь от правой части на малом ребре.

Аналогичная ситуация имеет место и для операторов $\mathcal{H}_\varepsilon^R$ и \mathcal{H}_0^R . Несмотря на то, что теперь на внешней вершине ребра e_ε ставится краевое условие Неймана, предельное краевое условие в вершине M_0 содержит дополнительный коэффициент β , см. (2.8). Данный коэффициент обусловлен наличие потенциала W_{-1} на ребре e_ε у возмущенного оператора. Такой эффект согласуется с известными результатами об аппроксимации дельта-взаимодействий у одномерных операторов потенциалами вида $\varepsilon^{-1}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ для финитных функций V с ненулевым средним, см., например, [6, Ch. 1.3].

Наличие равномерной резольвентной сходимости для операторов с сингулярными возмущениями – достаточно ожидаемый факт, если сравнивать задачи на графах с задачами в многомерных областях. В качестве соответствующего примера упомянем задачи в областях с малыми отверстиями – классическую модель сингулярной теории возмущений. Выполнение равномерной резольвентной сходимости для таких задач было показано в работах [1], [2]. С этой точки зрения сингулярно возмущенные операторы проявляют свойства, аналогичные регулярно возмущенным. Вместе с тем, в случае регулярных возмущений, резольвенты и собственные значения возмущенных операторов голоморфно зависят от малого параметра, описывающего возмущение. При этом данное утверждение, как правило, неверно для сингулярно возмущенных операторов. Например, в классической задаче в области с малыми отверстиями для собственных значений и резольвент можно строить полные асимптотические разложения по малому параметру [3, Ch. III], [4], но никаких утверждений о сходимости данных рядов и, тем более, о совпадении сумм рядов с возмущенными резольвентами и собственными значениями не доказано.

Ввиду сказанного выше, результаты теорем 2.3, 2.4 выглядят весьма неожиданными и интересными. Основное ключевое утверждение этих теорем – это голоморфная зависимость собственных значений от малого параметра. Другими словами, асимптотические ряды для собственных значений рассматриваемых операторов сходятся и суммы их совпадают с возмущенными собственными значениями. Дополнительно обнаруживается еще один эффект – неподвижные собственные значения. Для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon^D$ такие собственные значения возникают в окрестности двукратных предельных собственных значений: каждое такое предельное собственное значение расщепляется на два возмущенных, одно из которых не зависит от ε и стоит неподвижно, а второе сдвигается влево. Для оператора $\mathcal{H}_\varepsilon^R$ схожая картина имеет место, если собственная функция, соответствующая предельному собственному значению, дополнительно обращается в нуль в вершине M_0 . При этом предельное собственное значение уже простое, но при возмущении оно остается неподвижным.

Для подвижных собственных значений возмущенных операторов в теоремах 2.3, 2.4 вычислены первые поправки в их разложениях, см. формулы (2.17), (2.19). Как следует из формулы (2.17), в случае условия Дирихле в вершине M_ε первые поправки отрицательны и здесь добавление малого ребра действует на спектр как неположительное возмущение. В случае условия Неймана в вершине M_ε первая поправка оказывается более сложной и вопрос о ее знаке априори легко не решается.

По всей видимости, описанные выше эффекты обусловлены не простотой графов Γ_ε и Γ_0 , а являются общим свойством по крайней мере большого класса графов с малыми ребрами. Подтверждению данной гипотезы будет посвящена одна из наших будущих работ.

3. АСИМПТОТИКА РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА $\mathcal{H}_\varepsilon^D$

В настоящем параграфе мы доказываем теорему 2.1.

Для заданной $f \in L_2(\Gamma_\varepsilon)$ через f_0 обозначим сужение f на граф Γ_0 , а через f_ε – сужение f на ребро e_ε . Положим: $u_\varepsilon := (\mathcal{H}_\varepsilon^D - \lambda)^{-1}f$, $u_0 := (\mathcal{H}_0^D - \lambda)^{-1}f_0$. С учетом краевого условия (2.2) и определения функций U_\pm ясно, что

$$u_\varepsilon = u_0 + C_\varepsilon \Psi \quad \text{на } \Gamma_0, \quad (3.1)$$

где C_ε – некоторая константа, которая будет определена позднее.

Для определения функции u_ε на ребре e_ε рассмотрим вспомогательную задачу Коши:

$$-U_D'' + (\varepsilon W_{-1}(\xi) + \varepsilon^2 W_0(\xi) - \mu)U_D = 0, \quad \xi \in (0, 1), \quad U_D|_{\xi=1} = 0, \quad U_D'|_{\xi=1} = 1, \quad (3.2)$$

где μ – малый комплексный параметр. Данная задача однозначно разрешима, имеет решение $U_D = U_D(\xi, \varepsilon, \mu)$, которое голоморфно по ε и μ в норме $W_2^2(0, 1)$. Непосредственными вычислениями проверяем, что

$$U_D(\xi, \varepsilon, \mu) = \xi - 1 + O(\varepsilon + |\mu|). \quad (3.3)$$

Через $\mathcal{S}_\varepsilon^D$ обозначим оператор Шрёдингера в пространстве $L_2(0, 1)$ с дифференциальным выражением

$$-\frac{d^2}{d\xi^2} + \varepsilon W_{-1}(\xi) + \varepsilon^2 W_0(\xi) \quad (3.4)$$

и краевыми условиями Дирихле. Область определения оператора $\mathcal{S}_\varepsilon^D$ – множество функций из $W_2^2(0, 1)$, обращающихся в нуль на границе. Ясно, что оператор \mathcal{S}_0^D обратим и обратный ограничен как оператор из $L_2(0, 1)$ в $W_2^2(0, 1)$. Поэтому аналогичное верно и для оператора $\mathcal{S}_\varepsilon^D - \varepsilon^2 \lambda$: для достаточно малых ε обратный оператор $(\mathcal{S}_\varepsilon^D - \varepsilon^2 \lambda)^{-1}$ корректно определен, ограничен как оператор из $L_2(0, 1)$ в $W_2^2(0, 1)$ и кроме того, голоморфен по ε . В частности,

$$(\mathcal{S}_\varepsilon^D - \varepsilon^2 \lambda)^{-1} = (\mathcal{S}_0^D)^{-1} + O(\varepsilon), \quad ((\mathcal{S}_0^D)^{-1}g)(\xi) = - \int_0^1 \frac{|\xi - t| - \xi - t + 2\xi t}{2} g(t) dt, \quad (3.5)$$

где $g \in L_2(0, 1)$. С учетом первого из краевых условий в (2.2) и формулы (3.1) теперь легко видеть, что функция u_ε на ребре e_ε имеет вид:

$$u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \varepsilon^2 v_\varepsilon \left(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon} \right) + C_\varepsilon \frac{U_D \left(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda \right)}{U_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda)}, \quad v_\varepsilon := (\mathcal{S}_\varepsilon^D - \varepsilon^2 \lambda)^{-1} f_\varepsilon(\varepsilon \cdot). \quad (3.6)$$

Константу C_ε определим из второго условия в (2.2) и равенств (3.1), (3.6):

$$C_\varepsilon \left(\frac{U'_-(0, \lambda)}{U_-(0, \lambda)} + \frac{U'_+(0, \lambda)}{U_+(0, \lambda)} - \alpha + \varepsilon^{-1} \frac{U'_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda)}{U_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda)} \right) + \varepsilon v'_\varepsilon(0) = 0. \quad (3.7)$$

Согласно равенствам (3.3), при малых ε выполнено соотношение

$$\frac{U'_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda)}{U_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda)} = 1 + O(\varepsilon) \neq 0, \quad (3.8)$$

и потому из уравнения (3.7) мы можем определить константу C_ε следующим образом:

$$C_\varepsilon := - \frac{\varepsilon^2 v'_\varepsilon(0)}{\frac{U'_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda)}{U_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda)} + \varepsilon \left(\frac{U'_-(0, \lambda)}{U_-(0, \lambda)} + \frac{U'_+(0, \lambda)}{U_+(0, \lambda)} - \alpha \right)}. \quad (3.9)$$

Из соотношений (3.5) вытекает, что

$$\left| v'_\varepsilon(0) - \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}\right) f_\varepsilon(x_\varepsilon) dx_\varepsilon \right| \leq c\varepsilon \|f_\varepsilon(\varepsilon \cdot)\|_{L_2(0,1)} = c\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L_2(e_\varepsilon)}. \quad (3.10)$$

Здесь и всюду далее символом c обозначаем различные несущественные константы, не зависящие от ε и f . Отметим еще, что в силу неравенства Коши-Буняковского верна оценка:

$$\left| \varepsilon^2 \int_0^\varepsilon f(x_\varepsilon) dx_\varepsilon \right| \leq \varepsilon^{\frac{5}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}, \quad \left| \int_0^\varepsilon x_\varepsilon f(x_\varepsilon) dx_\varepsilon \right| \leq \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} \|f_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}. \quad (3.11)$$

Подставляя полученную оценку, (3.8), (3.10) в (3.9), получаем:

$$\left| C_\varepsilon - \int_0^\varepsilon x_\varepsilon f(x_\varepsilon) dx_\varepsilon \right| \leq c\varepsilon^{\frac{5}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L_2(e_\varepsilon)}. \quad (3.12)$$

Отсюда и из формулы (3.1) вытекает уже неравенство (2.10).

Докажем оценку (2.11). Вначале заметим, что из (3.12) и второго неравенства в (3.11) сразу следует:

$$|C_\varepsilon| \leq c\varepsilon^{\frac{3}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L_2(e_\varepsilon)}. \quad (3.13)$$

Норму функции v_ε можно оценить исходя из перечисленных выше свойств оператора $(\mathcal{S}_\varepsilon^D - \varepsilon^2\lambda)^{-1}$:

$$\left\| v_\varepsilon \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L_2(e_\varepsilon)} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|v_\varepsilon\|_{L_2(0,1)} \leq c\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|f_\varepsilon(\varepsilon \cdot)\|_{L_2(0,1)} = c\varepsilon^{-1} \|f_\varepsilon\|_{L_2(e_\varepsilon)}.$$

Отсюда уже получаем:

$$\left\| \varepsilon^2 v_\varepsilon \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L_2(e_\varepsilon)} \leq c\varepsilon \|f_\varepsilon\|_{L_2(e_\varepsilon)}. \quad (3.14)$$

Учитывая теперь очевидные соотношения

$$\left\| U_D \left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda \right) \right\|_{L_2(e_\varepsilon)} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|U_D(\cdot, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda)\|_{L_2(0,1)} \leq c\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

из (3.13) и (3.6) выводим оценку (2.11). Теорема 2.1 доказана.

4. АСИМПТОТИКА РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА $\mathcal{H}_\varepsilon^R$

Здесь мы доказываем теорему 2.2. Как и в предыдущем параграфе, через f_0 обозначим сужение f на граф Γ_0 , а через f_ε – сужение f на ребро e_ε и положим $u_\varepsilon := (\mathcal{H}_\varepsilon^R - \lambda)^{-1} f$, $u_0 := (\mathcal{H}_0^D - \lambda)^{-1} f_\varepsilon$. Для последних функций вновь верно равенство (3.1) с некоторой константой C_ε . Вместо задачи Коши (3.2) здесь рассматривается следующая:

$$-U_R'' + (\varepsilon W_{-1}(\xi) + \varepsilon^2 W_0(\xi) - \mu) U_R = 0, \quad \xi \in (0, 1), \quad U_R|_{\xi=1} = 1, \quad U_R'|_{\xi=1} = 0,$$

где μ – малый комплексный параметр. Данная задача также однозначно разрешима и ее решение $U_R = U_R(\xi, \varepsilon, \mu)$ голоморфно по ε и μ в норме $W_2^2(0, 1)$. Легко убедиться, что

первые члены разложения функции U_R имеют вид:

$$\begin{aligned}
 U_R(\xi, \varepsilon, \mu) &= 1 + \varepsilon\phi_1(\xi) + \varepsilon^2\phi_2(\xi) + \mu\phi_3(\xi) + O(\varepsilon^3 + \varepsilon|\mu| + |\mu|^2), \\
 \phi_1(\xi) &= \int_{\xi}^1 (t - \xi)W_{-1}(t) dt, \quad \phi_3(\xi) = \frac{(1 - \xi)^2}{2}, \\
 \phi_2(\xi) &= \int_{\xi}^1 (t - \xi)(W_0(t) + W_{-1}(t)\phi_1(t)) dt.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Отметим еще, что число β удовлетворяет равенству:

$$\beta = -\phi_1'(0). \tag{4.2}$$

Вместо оператора $\mathcal{S}_{\varepsilon}^D$ следует взять оператор Шрёдингера в $L_2(0, 1)$ с дифференциальным выражением (3.4), краевым условием Дирихле в точке $\xi = 0$ и краевым условием Неймана в точке $\xi = 1$. Такой оператор обозначим через $\mathcal{S}_{\varepsilon}^R$. Для него верны те же свойства, что и для оператора $\mathcal{S}_{\varepsilon}^D$, а именно, для достаточно малых ε обратный оператор $(\mathcal{S}_{\varepsilon}^R - \varepsilon^2\lambda)^{-1}$ корректно определен, ограничен как оператор из $L_2(0, 1)$ в $W_2^2(0, 1)$, голоморфен по ε , и справедливы соотношения:

$$(\mathcal{S}_{\varepsilon}^R - \varepsilon^2\lambda)^{-1} = (\mathcal{S}_0^R)^{-1} + O(\varepsilon), \quad ((\mathcal{S}_0^R)^{-1}g)(\xi) = - \int_0^1 \frac{|\xi - t| - \xi - t}{2} g(t) dt, \tag{4.3}$$

где $g \in L_2(0, 1)$. Аналог равенства (3.6) здесь выглядит следующим образом:

$$u_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^2 v_{\varepsilon} \left(\frac{x_{\varepsilon}}{\varepsilon} \right) + C_{\varepsilon} \frac{U_R \left(\frac{x_{\varepsilon}}{\varepsilon}, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda \right)}{U_R(0, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda)}, \quad v_{\varepsilon} := (\mathcal{S}_{\varepsilon}^R - \varepsilon^2\lambda)^{-1} f_{\varepsilon}(\varepsilon \cdot), \tag{4.4}$$

что гарантирует выполнение первого из условий в (2.2). Подстановка (3.1), (4.4) во второе условие дает уравнение для C_{ε} :

$$C_{\varepsilon} \left(\frac{U'_-(0, \lambda)}{U_-(0, \lambda)} + \frac{U'_+(0, \lambda)}{U_+(0, \lambda)} - \alpha + \varepsilon^{-1} \frac{U'_R(0, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda)}{U_R(0, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda)} \right) + \varepsilon v'_{\varepsilon}(0) = 0.$$

Согласно (4.1), (4.2), при малых ε справедливы равенства:

$$\varepsilon^{-1} \frac{U'_R(0, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda)}{U_R(0, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda)} = -\beta + O(\varepsilon). \tag{4.5}$$

Отметим еще, что

$$\frac{U'_-(0, \lambda)}{U_-(0, \lambda)} + \frac{U'_+(0, \lambda)}{U_+(0, \lambda)} - \alpha - \beta = \frac{F(\lambda) - (\alpha + \beta)U_-(0, \lambda)U_+(0, \lambda)}{U_-(0, \lambda)U_+(0, \lambda)} \neq 0, \tag{4.6}$$

так как иначе λ – это комплексное собственное значение оператора \mathcal{H}_0^R с соответствующей собственной функцией, равной $\frac{U_{\pm}(x_{\pm}, \lambda)}{U_{\pm}(0, \lambda)}$ на e_{\pm} . Константа C_{ε} теперь находится по формуле

$$C_{\varepsilon} = - \frac{\varepsilon v'_{\varepsilon}(0)}{\frac{U'_-(0, \lambda)}{U_-(0, \lambda)} + \frac{U'_+(0, \lambda)}{U_+(0, \lambda)} - \alpha - \beta + \left(\varepsilon^{-1} \frac{U'_R(0, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda)}{U_R(0, \varepsilon, \varepsilon^2\lambda)} + \beta \right)}, \tag{4.7}$$

причем второе слагаемое в знаменателе порядка $O(\varepsilon)$ в силу (4.5).

Выясним теперь поведение числителя в (4.7). Используя (4.3), непосредственными вычислениями проверяем, что

$$\left| v'_\varepsilon(0) - \int_0^1 f_\varepsilon(\varepsilon t) dt \right| \leq c\varepsilon \|f_\varepsilon(\varepsilon \cdot)\|_{L_2(0,1)} = c\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L_2(e_\varepsilon)}, \quad \int_0^1 f_\varepsilon(\varepsilon t) dt = \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon f_\varepsilon(x_\varepsilon) dx_\varepsilon.$$

Подставляя полученные соотношения в (4.7) и учитывая (4.5), (4.6), получаем:

$$\left| C_\varepsilon + \frac{U_-(0, \lambda)U_+(0, \lambda)}{F(\lambda) - (\alpha + \beta)U_-(0, \lambda)U_+(0, \lambda)} \right| \leq c\varepsilon^{\frac{5}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L_2(e_\varepsilon)}. \quad (4.8)$$

Отсюда и из (3.1) уже вытекает оценка (2.13).

Из (4.8) также следует, что

$$|C_\varepsilon| \leq c\varepsilon^{\frac{3}{2}} \|f_\varepsilon\|_{L_2(e_\varepsilon)}. \quad (4.9)$$

Для первого слагаемого в (4.4) верна оценка, аналогичная (3.14), а для функции U_R – оценка, аналогичная (3.15). Эти оценки и (4.9) доказывают (2.14).

5. СПЕКТР ОПЕРАТОРА $\mathcal{H}_\varepsilon^D$

В настоящем параграфе мы находим спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon^D$ и доказываем теорему 2.3.

Тот факт, что собственные значения оператора \mathcal{H}_0^D определяются уравнением (2.15), немедленно следует из граничного условия (2.7), записанного для функций U_\pm . Соответствующие собственные функции имеют вид:

$$\Psi_n^D(x) = \begin{cases} U_-(x_-, \Lambda_n^D) & \text{на } e_-, \\ 0 & \text{на } e_+, \end{cases} \quad (5.1)$$

если Λ_n^D – нуль функции $U_-(0, \lambda)$, и

$$\Psi_n^D(x) = \begin{cases} 0 & \text{на } e_-, \\ U_+(x_+, \Lambda_n^D) & \text{на } e_+, \end{cases} \quad (5.2)$$

если Λ_n^D – нуль функции $U_+(0, \lambda)$. В случае, если Λ_n^D – общий нуль функций $U_\pm(0, \lambda)$, то такое собственное значение двукратно и ему соответствует пара собственных функций, определяемых равенствами (5.1), (5.2).

Далее нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 5.1. *Справедливы соотношения:*

$$\frac{dU_\pm}{d\lambda}(0, \Lambda_n^D) = -\frac{1}{U'_\pm(0, \Lambda_n^D)} \|U_\pm(\cdot, \Lambda_n^D)\|_{L_2(e_\pm)}^2 \neq 0, \quad U'_\pm(0, \Lambda_n^D) \neq 0.$$

Доказательство. Неравенство $U'_\pm(0, \Lambda_n) \neq 0$ очевидно, так как иначе оно немедленно приводит к равенству $U_\pm(x, \Lambda_n) = 0$, что неверно.

Дифференцируя задачи (2.9) по λ , несложно проверить, что функции

$$v_\pm(x_\pm) := \frac{dU_\pm}{d\lambda}(x_\pm, \Lambda_n)$$

являются решениями задач Коши

$$-v''_\pm + (V_\pm - \Lambda_n^D)v_\pm = U_\pm(\cdot, \Lambda_n) \quad \text{в } (0, a_\pm), \quad v_\pm(a_\pm) = 0, \quad v'_\pm(a_\pm) = 0.$$

Умножая уравнение в данной задаче на $U_\pm(x_\pm, \Lambda_n)$ и дважды интегрируя по частям по отрезку $(0, a_\pm)$, получаем требуемую формулу. \square

Найдем теперь спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon^D$. Собственные функции оператора $\mathcal{H}_\varepsilon^D$ строим в виде:

$$\Psi_\varepsilon^D(x) := \begin{cases} C_- U_-(x_-, \lambda) & \text{на } e_-, \\ C_+ U_+(x_+, \lambda) & \text{на } e_+, \\ C_\varepsilon \varepsilon U_D\left(\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda\right) & \text{на } e_\varepsilon, \end{cases}$$

где C_\pm, C_ε – некоторые константы. Ясно, что такая функция удовлетворяет требуемому дифференциальному уравнению и условиям (2.3). Поэтому остается проверить условие в вершине M_0 :

$$\begin{cases} C_- U_-(0, \lambda) - C_+ U_+(0, \lambda) = 0, \\ C_- U_-(0, \lambda) - C_\varepsilon \varepsilon U_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda) = 0, \\ C_- (U'_-(0, \lambda) + \alpha U_-(0, \lambda)) + C_+ U'_+(0, \lambda) + C_\varepsilon U'_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda) = 0. \end{cases}$$

Собственные значения оператора $\mathcal{H}_\varepsilon^D$ соответствуют нетривиальным решениям $(C_-, C_+, C_\varepsilon)$ данной системы линейных уравнений. Применение теоремы Крамера дает уравнение для собственных значений:

$$G^D(\lambda, \varepsilon) = 0, \quad (5.3)$$

где

$$G^D(\lambda, \varepsilon) := \varepsilon U_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda) F(\lambda) + (U'_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda) - \varepsilon \alpha U_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda)) U_-(0, \lambda) U_+(0, \lambda).$$

Функция G^D голоморфна по λ и ε . При $\varepsilon = 0$, $\Lambda = \Lambda_n^D$ уравнение (5.3) очевидно выполнено. В силу голоморфности функции G^D по λ и ε сразу получаем, что корни уравнения (5.3) сходятся к Λ_n^D при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Чтобы точнее описать поведение корней уравнения (5.3) при малых ε , нам понадобится подробнее выяснить структуру функции G^D при λ , близких к Λ_n^D .

Предположим вначале, что Λ_n^D – простое собственное значение. Для определенности считаем, что выбранное Λ_n^D есть нуль функции $U_-(0, \lambda)$ и $U_+(0, \Lambda_n^D) \neq 0$. Тогда прямыми вычислениями с использованием леммы 5.1 и равенств (3.3) проверяем, что

$$\frac{dG^D}{d\lambda}(\Lambda_n^D, 0) = U_+(0, \Lambda_n^D) \frac{dU_-}{d\lambda}(0, \Lambda_n^D) = -\frac{U_+(0, \Lambda_n^D)}{U'_-(0, \Lambda_n^D)} \|U_-(\cdot, \Lambda_n^D)\|_{L_2(e_-)}^2 \neq 0. \quad (5.4)$$

Следовательно, по теореме о неявной функции, существует единственный корень $\lambda_n(\varepsilon)$ уравнения (5.3), сходящийся к Λ_n^D и этот корень голоморфен по ε . И так как в силу равенства (3.3) выполнено

$$\frac{dG^D}{d\varepsilon}(\Lambda_n^D, 0) = -U'_-(0, \Lambda_n^D) U_+(0, \Lambda_n^D),$$

то отсюда, из (5.4) и формулы

$$\frac{d\lambda_n^D}{d\varepsilon}(0) = -\frac{\frac{dG^D}{d\varepsilon}(\Lambda_n^D, 0)}{\frac{dG^D}{d\lambda}(\Lambda_n^D, 0)} \quad (5.5)$$

сразу получаем равенство (2.16).

Пусть теперь Λ_n^D – двукратное собственное значение, то есть, Λ_n^D – общий нуль функций $U_-(0, \lambda)$ и $U_+(0, \lambda)$. Тогда из определения функции F и леммы 5.1 следует, что

$$F(\lambda) = (\lambda - \Lambda_n^D) F_*(\lambda), \quad U_+(0, \lambda) U_-(0, \lambda) = (\lambda - \Lambda_n^D)^2 Q(\lambda), \quad (5.6)$$

где $F_*(\lambda)$, $Q(\lambda)$ – голоморфные функции и

$$\begin{aligned} F_*(\Lambda_n^D) &= -\frac{U'_+(0, \Lambda_n^D)}{U'_-(0, \Lambda_n^D)} \|U_-(\cdot, \Lambda_n^D)\|_{L_2(e_-)}^2 - \frac{U'_-(0, \Lambda_n^D)}{U'_+(0, \Lambda_n^D)} \|U_+(\cdot, \Lambda_n^D)\|_{L_2(e_+)}^2, \\ Q(\Lambda_n^D) &= \frac{1}{U'_-(0, \Lambda_n^D)U'_+(0, \Lambda_n^D)} \|U_-(\cdot, \Lambda_n^D)\|_{L_2(e_-)}^2 \|U_+(\cdot, \Lambda_n^D)\|_{L_2(e_+)}^2 \neq 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Подставляя соотношения (5.6), (5.7) в уравнение (5.3), видим, что оно имеет два корня, сходящихся к Λ_n^D . Первый корень не зависит от ε и совпадает с Λ_n^D . Второй корень определяется уравнением

$$\varepsilon U_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda) F_*(\lambda) + (U'_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda) - \varepsilon \alpha U_D(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda)) (\lambda - \Lambda_n^D) Q(\lambda) = 0.$$

Применим к этому уравнению теорему о неявной функции так, как это было сделано выше. Это немедленно приводит нас к заключению, что последнее уравнение имеет ровно одно решение, сходящееся к Λ_n^D при $\varepsilon \rightarrow +0$, это решение голоморфно по ε и выполнено равенство (2.17). Так как левая часть этого равенства отрицательна, то ясно, что при малых положительных ε корень уравнения, удовлетворяющий (2.17), меньше Λ_n^D . Теорема 2.1 полностью доказана.

6. СПЕКТР ОПЕРАТОРА $\mathcal{H}_\varepsilon^R$

Настоящий параграф посвящен доказательству теоремы 2.4.

Поясним происхождение уравнения (2.18). Собственные функции оператора \mathcal{H}_0^R следует искать в виде

$$\Psi^R(x) := \begin{cases} C_- U_-(x_-, \lambda) & \text{на } e_-, \\ C_+ U_+(x_+, \lambda) & \text{на } e_+, \end{cases} \quad (6.1)$$

где C_\pm – некоторые константы. Условие (2.8) приводит к системе линейных уравнений на эти константы и применение теоремы Крамера позволяет определить случаи, когда данная система имеет нетривиальное решение. Равенство нулю соответствующего определителя и дает уравнение (2.18).

Каждое собственное значение Λ_n^R простое, так как обратное предположение немедленно приводит к существованию соответствующей собственной функции, задаваемой формулой (6.1) с $C_1 = 0$. Отсюда в силу краевых условий (2.8) получаем, что тогда необходимо $C_2 = 0$, что противоречит определению собственной функции.

Предположим теперь, что $U_-(0, \Lambda_n^R) = 0$. Тогда необходимо $U'_-(0, \Lambda_n^R) \neq 0$ и из уравнения (2.18) тогда вытекает $U_+(0, \Lambda_n^R) = 0$. Аналогично проверяется, что из равенства $U_+(0, \Lambda_n^R) = 0$ вытекает $U_-(0, \Lambda_n^R) = 0$. Поэтому числа $U_-(0, \Lambda_n^R)$ и $U_+(0, \Lambda_n^R)$ обращаются или не обращаются в нуль одновременно.

Далее нам понадобится аналог вспомогательной леммы 5.1.

Лемма 6.1. Пусть $U_\pm(0, \Lambda_n^R) = 0$. Тогда

$$\frac{dF}{d\lambda}(\Lambda_n^R) = -\frac{U'_+(0, \Lambda_n^R)}{U'_-(0, \Lambda_n^R)} \|U_-(\cdot, \Lambda_n^R)\|_{L_2(e_-)}^2 - \frac{U'_-(0, \Lambda_n^R)}{U'_+(0, \Lambda_n^R)} \|U_+(\cdot, \Lambda_n^R)\|_{L_2(e_+)}^2 \neq 0. \quad (6.2)$$

Пусть $U_\pm(0, \Lambda_n^R) \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d(F - (\alpha + \beta)U_-(0, \cdot)U_+(0, \cdot))}{d\lambda}(\Lambda_n^R) &= \frac{U_+(0, \Lambda_n^R)}{U_-(0, \Lambda_n^R)} \|U_-(\cdot, \Lambda_n^R)\|_{L_2(e_-)}^2 \\ &+ \frac{U_-(0, \Lambda_n^R)}{U_+(0, \Lambda_n^R)} \|U_+(\cdot, \Lambda_n^R)\|_{L_2(e_+)}^2 \neq 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 5.1 несложно проверить равенства:

$$U_{\pm}(0, \Lambda_n^R) \frac{dU'_{\pm}(0, \Lambda_n^R)}{d\lambda} - U'_{\pm}(0, \Lambda_n^R) \frac{dU_{\pm}(0, \Lambda_n^R)}{d\lambda} = \|U_{\pm}(\cdot, \Lambda_n^R)\|_{L_2(e_{\pm})}^2 > 0. \quad (6.4)$$

Предположим теперь, что $U_{\pm}(0, \Lambda_n^R) = 0$. Тогда из (6.4) сразу следует, что $U'_{\pm}(0, \Lambda_n^R) \neq 0$. Ясно, что

$$\frac{dF}{d\lambda}(\Lambda_n^R) = U'_+(0, \Lambda_n^R) \frac{dU_-}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R) + U'_-(0, \Lambda_n^R) \frac{dU_+}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R).$$

Из полученных равенств вытекает формула (6.2) для производной функции $F(\lambda)$. Кроме того, отношения $\frac{U'_+(0, \Lambda_n^R)}{U'_-(0, \Lambda_n^R)}$ и $\frac{U'_-(0, \Lambda_n^R)}{U'_+(0, \Lambda_n^R)}$ одного знака и потому производная функции F в точке Λ_n^R не равна нулю.

Рассмотрим теперь случай $U_{\pm}(0, \Lambda_n^R) \neq 0$. Тогда из уравнения (2.18) следует, что

$$U'_{\pm}(0, \Lambda_n^R) = (\alpha + \beta)U_{\pm}(0, \Lambda_n^R) - U'_{\mp}(0, \Lambda_n^R) \frac{U_{\pm}(0, \Lambda_n^R)}{U_{\mp}(0, \Lambda_n^R)}.$$

Используя эти равенства, непосредственными вычислениями проверяем, что

$$\begin{aligned} \frac{d(F - (\alpha + \beta)U_-(0, \cdot)U_+(0, \cdot))}{d\lambda}(\Lambda_n^R) &= U'_+(0, \Lambda_n^R) \frac{dU_-}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R) + U'_-(0, \Lambda_n^R) \frac{dU_+}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R) \\ &\quad + U_-(0, \Lambda_n^R) \frac{dU'_+}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R) + U_+(0, \Lambda_n^R) \frac{dU'_-}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R) \\ &\quad - (\alpha + \beta)U_-(0, \Lambda_n^R) \frac{dU_+}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R) - (\alpha + \beta)U_+(0, \Lambda_n^R) \frac{dU_-}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R) \\ &= -\frac{U_+(0, \Lambda_n^R)}{U_-(0, \Lambda_n^R)} U'_-(0, \Lambda_n^R) \frac{dU_-}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R) + U_+(0, \Lambda_n^R) \frac{dU'_-}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R) \\ &\quad - \frac{U_-(0, \Lambda_n^R)}{U_+(0, \Lambda_n^R)} U'_+(0, \Lambda_n^R) \frac{dU_+}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R) + U_-(0, \Lambda_n^R) \frac{dU'_+}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R) \\ &= \frac{U_+(0, \Lambda_n^R)}{U_-(0, \Lambda_n^R)} \left(U_-(0, \Lambda_n^R) \frac{dU'_-}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R) - U'_-(0, \Lambda_n^R) \frac{dU_-}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R) \right) \\ &\quad + \frac{U_-(0, \Lambda_n^R)}{U_+(0, \Lambda_n^R)} \left(U_+(0, \Lambda_n^R) \frac{dU'_+}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R) - U'_+(0, \Lambda_n^R) \frac{dU_+}{d\lambda}(0, \Lambda_n^R) \right). \end{aligned}$$

Отсюда в силу формул (6.4) вытекает равенство (6.3). Здесь уже отношения $\frac{U_+(0, \Lambda_n^R)}{U_-(0, \Lambda_n^R)}$ и $\frac{U_-(0, \Lambda_n^R)}{U_+(0, \Lambda_n^R)}$ одного знака и потому правая часть равенств (6.3) не обращается в нуль. Лемма доказана. \square

Найдем спектр оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon}^R$. Собственные функции оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon}^R$ ищем в виде:

$$\Psi_{\varepsilon}^R(x) := \begin{cases} C_- U_-(x_-, \lambda) & \text{на } e_-, \\ C_+ U_+(x_+, \lambda) & \text{на } e_+, \\ C_{\varepsilon} U_R\left(\frac{x_{\varepsilon}}{\varepsilon}, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda\right) & \text{на } e_{\varepsilon}, \end{cases}$$

где C_{\pm} , C_{ε} – некоторые константы. Для таких функций вновь достаточно проверить условие в точке M_0 , что приводит к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_- U_-(0, \lambda) - C_+ U_+(0, \lambda) = 0, \\ C_- U_-(0, \lambda) - C_{\varepsilon} U_R(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \mu) = 0, \\ C_- (U'_-(0, \lambda) + \alpha U_-(0, \lambda)) + C_+ U'_+(0, \lambda) + C_{\varepsilon} \varepsilon^{-1} U'_R(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda) = 0. \end{cases}$$

Приравнивая определитель данной системы к нулю, приходим к уравнению для собственных значений оператора $\mathcal{H}_\varepsilon^R$:

$$G^R(\lambda, \varepsilon) = 0, \quad (6.5)$$

где

$$\begin{aligned} G^R(\lambda, \varepsilon) &:= U_R(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda) (F(\lambda) - \alpha U_-(0, \lambda) U_+(0, \lambda)) + \varepsilon^{-1} U'_R(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda) U_-(0, \lambda) U_+(0, \lambda) \\ &= (F(\lambda) - (\alpha + \beta) U_-(0, \lambda) U_+(0, \lambda)) + A(\lambda, \varepsilon) U_-(0, \lambda) U_+(0, \lambda), \\ A(\lambda, \varepsilon) &:= \varepsilon^{-1} U'_R(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda) + \beta U_R(0, \varepsilon, \varepsilon^2 \lambda). \end{aligned}$$

В силу соотношений (4.1), (4.2) функция A голоморфна по λ и ε и справедливы равенства:

$$A(\Lambda_n^R, 0) = 0, \quad \frac{dA}{d\varepsilon}(\Lambda_n^R, 0) = \beta \phi_1(0) + \phi_2'(0) + \Lambda_n^R \phi_3'(0). \quad (6.6)$$

Поэтому функция G^R голоморфна по λ и ε . Ясно, что уравнение (6.5) выполнено при $\Lambda = \Lambda_n^R, \varepsilon = 0$. Отсюда сразу следует, что корни уравнения (6.5) сходятся к Λ_n^R при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Выясним структуру функции G^R в окрестности точек $\lambda = \Lambda_n^R$. Вначале рассмотрим случай $U_\pm(\Lambda_n^R) = 0$. В этом случае в силу (6.2) и соотношений (4.1) выполнено

$$\frac{dG^R}{d\lambda}(\Lambda_n^R, 0) = \frac{dF}{d\lambda}(\Lambda_n^R) \neq 0$$

и по теореме о неявной функции уравнение (6.5) имеет единственное решение. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что $\lambda = \Lambda_n^R$ – решение уравнения (6.5) для всех рассматриваемых значений ε . Это доказывает теорему в случае $U_\pm(\Lambda_n^R) = 0$.

Пусть теперь $U_\pm(\Lambda_n^R) \neq 0$. В этом случае в силу (6.3), (6.6) имеем:

$$\frac{dG^R}{d\lambda}(\Lambda_n^R, 0) = \frac{d(F - (\alpha + \beta)U_-(0, \cdot)U_+(0, \cdot))}{d\lambda}(\Lambda_n^R) \neq 0 \quad (6.7)$$

и по теореме о неявной функции существует единственное решение $\lambda_n^R(\varepsilon)$ уравнения (6.5), голоморфное по ε и сходящееся к Λ_n^R при $\varepsilon \rightarrow +0$. Производная этого решения выражается формулой, аналогичной (5.5):

$$\frac{d\lambda_n^R}{d\varepsilon}(0) = -\frac{\frac{dG^R}{d\varepsilon}(\Lambda_n^R, 0)}{\frac{dG^R}{d\lambda}(\Lambda_n^R, 0)} = -\frac{\frac{dA}{d\varepsilon}(\Lambda_n^R, 0)}{\frac{d(F - (\alpha + \beta)U_-(0, \cdot)U_+(0, \cdot))}{d\lambda}(\Lambda_n^R)}, \quad (6.8)$$

где мы также воспользовались формулой (6.7). Вычислим знаменатель в данной формуле. Имеем:

$$\begin{aligned} \phi_2'(0) &= -\int_0^1 W_0(t) dt - \int_0^1 W_{-1}(t) \phi_1(t) dt, \\ -\int_0^1 W_{-1}(t) \phi_1(t) dt &= -\int_0^1 \phi_1''(t) \phi_1(t) dt = \phi_1(0) \phi_1'(0) + \int_0^1 (\phi_1'(t))^2 dt \\ &= -\beta \phi_1(0) + \int_0^1 \left(\int_t^1 W_{-1}(s) ds \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Подставляя полученные равенства и (6.3), (6.6) в (6.8), приходим к формуле (2.19). Теорема 2.4 доказана.

БЛАГОДАРНОСТИ

Данная работа была начата во время визита Д.И. Борисова в Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан в декабре 2018 г. Он благодарен за теплое радушное гостеприимство, оказанное ему во время визита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов Д. *О PT -симметричном волноводе с парой малых отверстий* // Труды Института математики и механики УрО РАН. **18**:2, 22–37 (2012).
2. Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. *О равномерной резольвентной сходимости для эллиптических операторов в многомерных областях с малыми отверстиями* // Пробл. матем. анализ. **92**, 69–81 (2018).
3. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*. М.: Наука. 1989.
4. Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А. *Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями* // Изв. АН СССР. Сер. матем. **48**:2, 347–371 (1984).
5. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*. М.: Физматлит. 2005.
6. S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Nøeigh-Krohn, H. Holden *Solvable models in quantum mechanics*. AMS Chelsea Publ., Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (2000).
7. G. Berkolaiko, P. Kuchment *Introduction to quantum graphs*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2013).
8. G. Berkolaiko, Y. Latushkin, S. Sukhtaev *Limits of quantum graph operators with shrinking edges* // Preprint: arXiv:1806.00561 (2018)
9. T. Cheon, P. Exner, O. Turek *Approximation of a general singular vertex coupling in quantum graphs* // Anal. Phys. **325**:3, 548–578 (2010).

Денис Иванович Борисов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450000, г. Уфа, Россия
University of Hradec Králové,
Rokitanskeho, 62
50003, Hradec Králové, Czech Republic
E-mail: BorisovDI@yandex.ru

Марал Нурлановна Коныркулжаева,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
пр. аль-Фараби 71,
A15E3B4, г. Алматы, Казахстан
E-mail: maralkulzha@gmail.com