ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 17. № 1 (2025). С. 62-76.

УДК 517.53

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ПЛОСКОМ КЛАССЕ ПРИВАЛОВА В КРУГЕ

Е.Г. РОДИКОВА

Аннотация. В работе получено необходимое и достаточное условие на нули аналитических функций из плоских классов И.И. Привалова $\tilde{\Pi}_q$ $(0 < q < 1)$ в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, расположенные в углах Штольца; решена задача свободной интерполяции в указанных классах при условии, что узлы интерполяции находятся в углах Штольца, а также решена задача интерполяции в плоских классах Привалова в круге на карлесоновских множествах.

Ключевые слова: аналитическая функция, нули, интерполяция, плоский класс Привалова, угол Штольца, единичный круг.

Mathematics Subject Classification: 30E05, 30H15, 30H50

1. Введение

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ — множество всех функций, аналитических в D, Z_f — множество всех нулей нетривиальной функции $f \in H(D)$, $n(r) = \operatorname{card}\{z_k : |z_k| < r\}$ — количество точек последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ в круге $|z| < r < 1$ с учётом их кратностей,

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \qquad 0 < r < 1.$$

При всех $0 < q < +\infty$ введем в рассмотрение класс

$$\tilde{\Pi}_q = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q d\theta dr < +\infty \right\}.$$

Будем называть его плоским классом И.И. Привалова или классом И.И. Привалова по площади. При $q = 1$ плоский класс Привалова совпадает с хорошо известным плоским классом Р. Неванлинны, входящим в шкалу классов Неванлинны — Джрбашяна (см. [2]). Отметим, что плоские классы И.И. Привалова возникают естественным образом при исследовании вопросов дифференцирования в пространствах И.И. Привалова Π_q, $q > 0$, введённых в монографии [3] (по этому поводу см. [17]):

$$\Pi_q = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q d\theta < +\infty \right\}.$$

Классы Привалова по площади занимают такое же положение по отношению к классам Привалова, как плоские классы Неванлинны $\tilde{\Pi}_1$ к классам функций ограниченного вида $N = \Pi_1$.

E.G. Rodikova, Interpolation sequences in area Privalov classes in disk.

Поступила 8 мая 2024 г.

Для того, чтобы показать место классов $\tilde{\Pi}_q$ в структуре известных классов, рассмотрим при всех $\alpha > -1$, $0 < q < +\infty$ пространства S^q_α:

$$S^q_\alpha = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 (1-r)^\alpha T^q(r, f) dr < +\infty \right\},$$

где $T(r, f)$ — характеристика Р. Неванлинны функции $f \in H(D)$,

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

$\ln^+ |a| = \max(0, \ln |a|)$, $a \in \mathbb{C}$.

Классы S^q_α были впервые исследованы в [8] Ф.А. Шамояном, они обобщают широко известные классы Неванлинны — Джрбашяна S^1_α (см. [2]).

Используя неравенство Гёльдера, нетрудно доказать, что

$$\tilde{\Pi}_q \subset S^q_0 \quad \text{при} \quad q > 1,$$

и

$$\tilde{\Pi}_q \supset S^q_0 \quad \text{при} \quad 0 < q < 1.$$

Данная работа посвящена исследованию множеств нулей функций из классов $\tilde{\Pi}_q$, $0 < q < 1$ и вопросов интерполяции в этих классах.

Задача характеризации нулевых множеств аналитических функций в круге из различных классов неоднократно поднималась специалистами в области комплексного анализа. Фундаментальным результатом в этой области является факт совпадения корневых множеств классов ограниченных аналитических функций и классов функций ограниченного вида $N = \Pi_1$, установленный в работах У. Бляшке [12] и Р. Неванлинны [2]: последовательности нулей $\{z_k\}_1^\infty$ этих классов характеризуются условием Бляшке

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|) < +\infty.$$

Как следует из результатов работ Р. Неванлинны [2] и Ф.А. Шамояна [7], корневые множества плоских классов Р. Неванлинны, т.е. $\tilde{\Pi}_1$, характеризуются условием

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^2 < +\infty.$$

В общем случае (при всех $q > 0$) задача о характеризации корневых множеств классов Привалова и их плоских аналогов не решена, однако для классов Π_q имеются результаты, близкие к точным (см. [4], [9], [10]). Первая часть данной работы посвящена исследованию корневых множеств плоского класса И.И. Привалова $\tilde{\Pi}_q$ в круге при всех $0 < q < 1$: описаны нули функций из этого класса, расположенные в углах Штольца.

Определение 1.1. *Углом Штольца $\Gamma_\delta(\theta)$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ называется угол раствора $\pi\delta$, $0 < \delta < 1$, биссектриса которого совпадает с отрезком $re^{i\theta}$, $0 \leqslant r < 1$, то есть множество точек $z \in D$, для которых выполнены неравенства:*

$$\left|\arg\left(e^{i\theta} - z\right) - \theta\right| \leqslant \frac{\pi\delta}{2},$$

$$\left|e^{i\theta} - z\right| < \cos\frac{\pi\delta}{2}, \qquad 0 < \delta < 1.$$

Вторая и третья части данной работы посвящены решению интерполяционных задач в плоском классе И.И. Привалова в круге при всех $0 < q < 1$. Сформулируем задачу интерполяции на множестве простых узлов в классе $\tilde{\Pi}_q$: пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — последовательность различных точек из D, $\{w_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел. При каких условиях, налагаемых на узлы $\{z_k\}_1^\infty$ и последовательность точек $\{w_k\}_1^\infty$, можно построить функцию из класса $\tilde{\Pi}_q$, такую что

$$f(z_k) = w_k, \qquad k = 1, 2, \ldots? \tag{1.1}$$

Последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ в этом случае называют *интерполяционной*.

Во второй части данной работы решается задача интерполяции на так называемых множествах Карлесона в классе $\tilde{\Pi}_q$ $(0 < q < 1)$, а в третьей части работы решается задача свободной интерполяции в указанных классах при условии, что узлы интерполяции находятся в углах Штольца.

Отметим, что фундаментальный результат в теории интерполяции принадлежит Л. Карлесону. В работе [13] он полностью охарактеризовал интерполяционные последовательности в классе ограниченных аналитических функций. Конструктивное решение задачи свободной интерполяции в классе H^∞ в виде ряда было предложено П. Джонсом в [15]. Решением задачи свободной интерполяции в классах функций ограниченного вида занимались А.Г. Нафталевич [1], А. Хартман и др. [14], в классах Харди — Х. Шапиро и А. Шилдс [20], К. Сейп [19], в классах В.И. Смирнова — Н. Янагиара [21].

Задача интерполяции в условии равномерной разделенности простых узлов (на множествах Карлесона) в классах И.И. Привалова Π_q при $q > 1$ решена в работе [16], при $0 < q < 1$ — в работе автора и В.А. Беднаж [6].

2. Характеризация нулей, расположенных в углах Штольца

В этой части работы исследуются нулевые множества функций из классов $\tilde{\Pi}_q$ $(0 < q < 1)$.

Для формулировки основного результата введем дополнительные обозначения и определения. Для любого $\beta > -1$ символом $\pi_\beta(z, z_k)$ будем обозначать бесконечное произведение М.М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности $\{z_k\}_1^{+\infty} \subset D$, $0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1$, $k = 1, 2, \ldots$, см. [11].

Если $\beta = m \in \mathbb{Z}_+$ произведение Джрбашяна имеет вид:

$$\pi_m(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\overline{z}_k (z_k - z)}{1 - \overline{z}_k z} \exp \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j+1} \left(\frac{1 - |z_k|^2}{1 - \overline{z}_k z} \right)^{j+1}.$$

Произведение $\pi_\beta(z, z_k)$ сходится абсолютно и равномерно в D тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\beta+2} < +\infty.$$

Основным результатом этой части работы является следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть*

$$0 < q < 1, \quad \{z_k\}_1^\infty \subset D, \quad 0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Если $\{z_k\}_1^\infty = Z_f$ *для некоторой* $f \in \tilde{\Pi}_q$, *то*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\frac{2}{q}} < +\infty. \tag{2.1}$$

Обратно, если точки последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ *расположены в конечном числе углов Штольца и удовлетворяют условию*

$$\int_0^1 (1-r)n^q(r)dr < +\infty, \tag{2.2}$$

то существует функция $g \in \tilde{\Pi}_q$ *такая, что* $Z_g = \{z_k\}_1^\infty$.

При доказательстве этого результата используются следующие утверждения.

Теорема 2.2 ([5]). *Если* $f \in \tilde{\Pi}_q$, *то*

$$\ln^+ M(r,f) = o\left((1-r)^{-\frac{2}{q}}\right), \quad r \to 1-0. \tag{2.3}$$

Оценка (2.3) *неулучшаема, т.е. для любой положительной функции* $\omega(r) = o(1)$, $r \to 1-0$, *существует функция* $f \in \tilde{\Pi}_q$, *для которой*

$$\ln^+ M(r,f) \neq O\left(\omega(r)(1-r)^{-\frac{2}{q}}\right), \quad r \to 1-0.$$

Для множества $E \subset \mathbb{C}$ функций $f, g : E \to \mathbb{R}$ будем писать $f(\zeta) \lesssim g(\zeta)$, $\zeta \in E$, если существует постоянная $C > 0$, для которой $f(\zeta) \leqslant Cg(\zeta)$ для всех $\zeta \in E$.

Лемма 2.1 ([11]). *При всех* $0 < q \leqslant 1$, $\gamma \geqslant 0$ *справедливо неравенство:*

$$\left(\int_0^1 (1-r)^\gamma n(r)dr\right)^q \lesssim \int_0^1 (1-t)^{q(\gamma+1)-1} n^q(r)dr.$$

Если не оговорено иное, через C_α, $c(\beta,\ldots)$ мы будем обозначать произвольные положительные постоянные, зависящие от $\alpha, \beta, \ldots$, значение которых несущественно.

Доказательство теоремы 2.1. Воспользуемся неравенством Йенсена:

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^{1-q} d\theta.$$

Далее применим оценку (2.3), получим:

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}dt \lesssim \frac{1}{(1-r)^{\frac{2(1-q)}{q}}}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q d\theta,$$

откуда

$$\int_0^1 (1-r)^{\frac{2(1-q)}{q}} \int_0^r \frac{n(t)}{t}dtdr \leqslant C_q. \tag{2.4}$$

Дважды интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^1 (1-r)^{\frac{2}{q}} dn(r) \leqslant C_q,$$

что равносильно сходимости ряда (2.1).

Докажем теперь обратное утверждение. Отметим, что случай, когда точки последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ находятся внутри некоторого угла Штольца по существу не отличается от случая, когда они расположены на некотором радиусе, поэтому, не ограничивая общности, предположим, что точки последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ расположены на радиусе $[0,1)$, т.е. $z_k = r_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Покажем, что произведение Джрбашяна $\pi_\beta(z, r_k)$ с нулями в точках $\{r_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию (2.2) теоремы, принадлежит классу $\tilde{\Pi}_q$.

Так как интеграл (2.2) сходится, сходится и произведение $\pi_\beta(z, r_k)$, и для него выполняется оценка

$$\ln^+ |\pi_\beta(z, r_k)| \lesssim \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - r_k}{|1 - r_k z|} \right)^{\beta+2}, \tag{2.5}$$

при всех $\beta > \frac{2}{q} - 2$ (см. [11, с. 77]).

Поэтому

$$\begin{aligned} I_\pi &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |\pi_\beta(re^{i\theta}, r_k)| \right)^q d\theta dr \\ &\lesssim \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - r_k}{|1 - r_k z|} \right)^{\beta+2} \right)^q d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 \left(\frac{1 - t}{|1 - tre^{i\theta}|} \right)^{\beta+2} dn(t) \right)^q d\theta dr. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям во внутреннем интеграле, получаем:

$$I_\pi \lesssim \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 n(t) \frac{(1-t)^{\beta+1}}{((1-rt)^2 + \theta^2)^{\frac{(\beta+2)}{2}}} dt \right)^q d\theta dr.$$

Для дальнейшей оценки разобьём внутренний интеграл на части:

$$I_\pi \lesssim \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{r_k}^{r_{k+1}} n(t) \frac{(1-t)^{\beta+1}}{((1-rt)^2 + \theta^2)^{\frac{(\beta+2)}{2}}} dt \right)^q d\theta dr, \quad r_k = 1 - \frac{1}{2^k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Продолжим оценку:

$$\begin{aligned} I_\pi &\lesssim \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n(r_{k+1})}{((1 - rr_{k+1})^2 + \theta^2)^{\frac{(\beta+2)}{2}}} \int_{r_k}^{r_{k+1}} (1-t)^{\beta+1} dt \right)^q d\theta dr \\ &\leqslant \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n(r_{k+1})}{2^{k(\beta+2)} ((1 - rr_{k+1})^2 + \theta^2)^{\frac{(\beta+2)}{2}}} \right)^q d\theta dr \\ &\leqslant \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^q(r_{k+1})}{2^{kq(\beta+2)} ((1 - rr_{k+1})^2 + \theta^2)^{\frac{(\beta+2)q}{2}}} d\theta dr \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n^q(r_{k+1})}{2^{kq(\beta+2)} ((1 - rr_{k+1})^2 + \theta^2)^{\frac{(\beta+2)q}{2}}} d\theta dr, \end{aligned}$$

откуда используя оценку из [11, с. 28], имеем:

$$I_\pi \lesssim \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^q(r_{k+1})}{2^{kq(\beta+2)}(1-rr_{k+1})^{(\beta+2)q-1}} \right) dr$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^q(r_{k+1})(1-r_{k+1})^{(\beta+2)q}}{(1-r_{k+1})^{(\beta+2)q-2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} n^q(r_{k+1})(1-r_{k+1})^2,$$

что равносильно

$$I_\pi \lesssim \int_0^1 n^q(r)(1-r)dr.$$

По условию интеграл в правой части последнего неравенства сходится, поэтому $\pi_\beta(z, r_k) \in \tilde{\Pi}_q$ при всех $\beta > \frac{2}{q} - 2$.

В заключение отметим, что из (2.2) следует (2.1). Действительно, для этого нужно проинтегрировать в (2.4) по частям единожды, а затем применить лемму 2.1.

Теорема доказана полностью. □

Замечание 2.1. *Отметим, что аналогичное утверждение для классов И.И. Привалова в круге получено в работе* [9].

3. Интерполяция на множествах Карлесона

Следуя Л. Карлесону, введём следующее определение.

Определение 3.1. *Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_1^\infty \subset D$, удовлетворяющая условию Бляшке:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1-|z_n|) < +\infty, \tag{3.1}$$

называется равномерно разделенной, если существует такое $0 < \delta < 1$, что

$$\prod_{k \neq n} \left| \frac{z_k - z_n}{1 - \overline{z}_k z_n} \right| \geqslant \delta \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Условие (3.2) также называют условием Карлесона.

Для заданной последовательности различных точек $\{z_n\}_1^\infty \subset D$ и фиксированного $0 < q < +\infty$ обозначим через $l^q(z_n)$ пространство последовательностей $\{w_n\}_1^\infty$, для которых

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1-|z_n|)^2 (\ln^+ |w_n|)^q < +\infty.$$

При всех $0 < p < +\infty$ обозначим через H^p хорошо известный класс Харди

$$H^p := \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi < +\infty \right\},$$

H^∞ — класс ограниченных аналитических в D функций.

Справедлива

Теорема 3.1. *Пусть $0 < q < 1$. Если последовательность $\{z_n\}_1^\infty \subset D$ является равномерно разделенной, т.е. удовлетворяет условию (3.2), то для любой последовательности $\{w_n\}_1^\infty \in l^q(z_n)$ найдется функция $f \in \tilde{\Pi}_q$, решающая интерполяционную задачу $f(z_n) = w_n$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Разобьем последовательность $\{w_n\}_1^\infty$ на две подпоследовательности $\{w_{n_{k'}}\}$, $\{w_{n_{k''}}\}$ такие, что $|w_{n_{k'}}| \leqslant 1$, $|w_{n_{k''}}| > 1$. Поскольку последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условию (3.2), то по теореме Карлесона (см. [13]) можно построить такую функцию $G \in H^\infty$, что $G(z_{n_{k'}}) = w_{n_{k'}}$, $G(z_{n_{k''}}) = 1$. Докажем, что существует функция $F \in H^q$ такая, что $F(z_{n_{k'}}) = 0$, $F(z_{n_{k''}}) = \ln w_{n_{k''}}$, где выбрана главная ветвь логарифма. Имеем:

$$|\ln w_{n_{k''}}| \leqslant \ln |w_{n_{k''}}| + |\arg w_{n_{k''}}| \leqslant \ln^+ |w_{n_{k''}}| + 2\pi.$$

Ввиду условия $\{w_n\}_1^\infty \subset l^q(z_n)$ теоремы, получим:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1-|z_n|)^2 |\ln w_n|^q < +\infty.$$

Из хорошо известной теоремы Шапиро — Шилдса об интерполяции в классах Харди H^q $(0<q<1)$ (см. [20]) следует существование функции $F \in H^q$ с указанными свойствами.

Рассмотрим теперь аналитическую в D функцию $f = G \cdot \exp(F)$. Покажем, что она решает задачу интерполяции в плоском классе Привалова.

Оценим

$$I(q) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q d\theta dr.$$

Имеем:

$$I(q) \leqslant \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (c_G + |F|)^q \, d\theta dr \leqslant c_q.$$

Поэтому $f \in \tilde{\Pi}_q$. Далее,

$$f(z_{n_{k'}}) = G(z_{n_{k'}}) \cdot \exp\left(F(z_{n_{k'}})\right) = w_{n_{k'}} \cdot \exp 0,$$
$$f(z_{n_{k''}}) = G(z_{n_{k''}}) \cdot \exp\left(F(z_{n_{k''}})\right) = 1 \cdot \exp\left(\ln w_{n_{k''}}\right) = w_{n_{k''}}.$$

Поэтому $f(z_n) = w_n$ при всех $n = 1, 2, \dots$.

Теорема доказана. □

Теорема 3.2. *Пусть $0<q<1$. Существуют равномерно разделенная последовательность узлов интерполяции $\{z_n\}_1^\infty \subset D$ и последовательность $\{w_n\}_1^\infty$, удовлетворяющие для любого $\varepsilon \in (0,q)$ условию*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1-|z_n|)^2 (\ln^+ |w_n|)^{q-\varepsilon} < +\infty, \tag{3.3}$$

для которых в классе $\tilde{\Pi}_q$ не существует функции, которая решает задачу интерполяции: $f(z_n) = w_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Доказательство. В качестве $\{z_n\}_1^\infty$ возьмем последовательность вещественных чисел $z_n = 1 - \beta^n$, $0 < \beta < 1$, $n = 1, 2, \dots$. Очевидно, что эта последовательность удовлетворяет условию Бляшке и является равномерно разделенной, т.е. удовлетворяет условию (3.2).

Рассмотрим также последовательность

$$w_n = \exp\left(\frac{n}{\beta^{\frac{2n}{q}}}\right), \qquad n = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяющую условию (3.3). Очевидно, что

$$(1-|z_n|)^2 (\ln^+ |w_n|)^q \to +\infty, \qquad n \to +\infty. \tag{3.4}$$

Но из оценки (2.3) следует, что

$$(1-|z|)^2(\ln^+|f(z)|)^q = o(1), \qquad \forall f \in \tilde{\Pi}_q. \tag{3.5}$$

На основании (3.4), (2.3) заключаем, что в классе $\tilde{\Pi}_q$ не существует функции, которая решает задачу интерполяции: $f(z_n) = w_n$, $n = 1, 2, \dots$ при указанном выборе последовательностей $\{z_n\}_1^\infty$, $\{w_n\}_1^\infty$. Теорема доказана. □

Замечание 3.1. *При доказательстве этой теоремы использовалась идея Н. Янагиары (см.* [21, теорема 4]*).*

4. Свободная интерполяция в классах Привалова по площади

Для заданной последовательности различных точек $\{z_n\}_1^\infty \subset D$ и фиксированного $0 < q < +\infty$ обозначим через $\tilde{l}^q(z_n)$ пространство последовательностей $\{w_n\}_1^\infty$, для которых

$$\ln^+|w_n| = o\left((1-|z_n|)^{-\frac{2}{q}}\right), \qquad n \to +\infty,$$

По теореме 2.2 оператор $R(f) = (f(z_1), \dots, f(z_n), \dots)$ естественным образом отображает пространство $\tilde{\Pi}_q$ в пространство $\tilde{l}^q(z_n)$. Нас будут интересовать условия, при котором указанное отображение является сюръективным.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть $0 < q < 1$, $\{z_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность различных комплексных чисел из D, расположенная в конечном числе углов Штольца, т.е.*

$$\{z_k\}_1^\infty \subset \bigcup_{s=1}^n \Gamma_\delta(\theta_s)$$

при некотором $0 < \delta < q$.

Если $\{z_k\}_1^\infty$ — интерполяционная последовательность в $\tilde{\Pi}_q$, то сходится ряд (2.1)*, и существует такая положительная бесконечно малая последовательность $\{\varepsilon(n)\}_1^\infty$, что*

$$|\pi'_\beta(z_n, z_k)| \geqslant \exp\frac{-\varepsilon(n)}{(1-|z_n|)^{\frac{2}{q}}}, \tag{4.1}$$

при всех $\beta > \frac{2}{q} - 2$.

Обратно, если интеграл (2.2) *сходится, и выполнено условие* (4.1)*, то последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ является интерполяционной в классе $\tilde{\Pi}_q$.*

Для доказательства основного результата этой части работы введём в пространствах $\tilde{\Pi}_q$ $(0 < q < 1)$ и $\tilde{l}^q(z_n)$ метрики по правилам:

$$\rho_{\tilde{\Pi}_q}(f, g) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \ln^q\left(1 + |f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})|\right) d\theta dr,$$

для любых $f, g \in \tilde{\Pi}_q$, и

$$\rho_{\tilde{l}^q}(a, b) = \sup_{n \geqslant 1}\left\{(1-|z_n|)^{\frac{2}{q}}\ln(1+|a_n-b_n|)\right\},$$

для любых $a = \{a_n\}_1^\infty$, $b = \{b_n\}_1^\infty \in \tilde{l}^q(z_n)$.

Нетрудно проверить, что относительно введенных метрик указанные пространства являются полными метрическими пространствами, более того, пространство $\tilde{\Pi}_q$ образует F–пространство (см. [5]).

Справедлива

Лемма 4.1. *Если оператор* $R(f) = (f(z_1), \ldots, f(z_n), \ldots)$ *отображает пространство* $\tilde{\Pi}_q$ *на пространство* $\tilde{l}^q$, *то существует последовательность таких функций* $\{g_n(z)\}_1^\infty \in \tilde{\Pi}_q$, *что*

$$\sup_{n\geqslant 1} \rho_{\tilde{\Pi}_q}(g_n, 0) \leqslant C, \qquad C > 0$$

и

$$g_n(z_k) = w_k^{(n)}, \qquad \text{где} \qquad w_k^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad k \neq n, \\ \exp \frac{\delta(k)}{(1-|z_k|)^{\frac{2}{q}}}, & \text{при} \quad k = n, \end{cases}$$

для всех $k, n = 1, 2, \ldots$, $\delta(k) = o(1)$, $k \to +\infty$.

Доказательство этой леммы проводится аналогичным образом, как в лемме 1.2 из [18].

При всех $0 < \alpha < \frac{2}{q}$ рассмотрим функцию

$$h(z) = h_k(z) = \exp \sum_{s=1}^{n} \sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m \frac{(1-{\rho_m}^2)^\alpha}{(1 - z\rho_m e^{-i\theta_s})^{\alpha+\frac{2}{q}}}, \qquad z \in D, \tag{4.2}$$

где $\{u_k\}_1^\infty$ — бесконечно малая последовательность, ассоциированная с узлами интерполяции $\{z_k\}_1^\infty$, $0 < u_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$, $\{1 - \rho_m\}_1^\infty$ — такая положительная бесконечно малая последовательность, что для любого фиксированного номера k сходится ряд:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_k^m}{(1-\rho_m)^{\frac{2}{q}}} < +\infty. \tag{4.3}$$

Лемма 4.2. *Если точки последовательности* $\{z_k\}_1^\infty$ *содержатся в углах Штольца, т.е.*

$$\{z_k\}_1^\infty \subset \bigcup_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s),$$

то для функции $h(z)$, *определяемой равенством* (4.2), *справедлива оценка*

$$|h(z_k)| \geqslant \exp \frac{\mu_0(k)}{(1-|z_k|)^{\frac{2}{q}}}, \tag{4.4}$$

где $\mu_0(k)$ — *некоторая положительная бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что узлы интерполяции содержатся в угле Штольца $\Gamma_\delta(\theta)$. Ясно, что ряд

$$\sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m \frac{(1-{\rho_m}^2)^\alpha}{(1-z\rho_m e^{-i\theta})^{\alpha+\frac{2}{q}}}$$

сходится при любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ и всех $z \in D$, ввиду условия (4.3), поэтому $h \in H(D)$.

Покажем, что $h \in \tilde{\Pi}_q$. Для краткости обозначим $\alpha' = \alpha + \frac{2}{q}$, тогда

$$h(z) = h_k(z) = \exp \sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m \frac{(1-{\rho_m}^2)^\alpha}{(1-z\rho_m e^{-i\theta})^{\alpha'}}, \qquad z \in D.$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и приступим к оценке функции $h_k(z)$:

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |h_k(re^{i\varphi})|)^q d\varphi dr = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ \left| \exp \sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m \frac{(1-{\rho_m}^2)^\alpha}{(1-re^{i\varphi}\rho_m e^{-i\theta})^{\alpha'}} \right| \right)^q d\varphi dr$$

$$\leqslant \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m \frac{(1-{\rho_m}^2)^\alpha}{|1-r\rho_m e^{i(\varphi-\theta)}|^{\alpha'}} \right)^q d\varphi dr.$$

Продолжим оценку:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |h(re^{i\varphi})|)^q d\varphi dr &\leqslant \int_0^1 \sum_{m=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(u_k^m \frac{(1-{\rho_m}^2)^\alpha}{|1-r\rho_m e^{i(\varphi-\theta)}|^{\alpha'}} \right)^q d\varphi dr \\
&= \int_0^1 \sum_{m=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u_k^{mq} \frac{(1-{\rho_m}^2)^{\alpha q}}{|1-r\rho_m e^{i(\varphi-\theta)}|^{\alpha' q}} d\varphi dr \\
&\leqslant \int_0^1 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_k^{mq}(1-{\rho_m}^2)^{\alpha q}}{(1-r\rho_m)^{(\alpha' q-1)}} dr \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_k^{mq}(1-{\rho_m}^2)^{\alpha q}}{(1-r\rho_m)^{(\alpha' q-2)}} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_k^{mq}(1-{\rho_m}^2)^{\alpha q}}{(1-r\rho_m)^{\alpha q}} \\
&\leqslant 2^{\alpha q} \sum_{m=1}^{+\infty} u_k^{mq} = 2^{\alpha q} \frac{u_k^q}{1-u_k^q} < +\infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, заключаем, что $h_k \in \tilde{\Pi}_q$ при любом $k = 1, 2, \ldots$.

Теперь оценим снизу $|h(z_k)|$ в угле $\Gamma_\delta(\theta)$

$$|h(z_k)| = \exp \sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m \operatorname{Re} \frac{(1-{\rho_m}^2)^\alpha}{(1-z_k\rho_m e^{-i\theta})^{\alpha'}} = \exp \sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m (1-{\rho_m}^2)^\alpha \frac{\operatorname{Re}(1-\overline{z_k}\rho_m e^{i\theta})^{\alpha'}}{|1-z_k\rho_m e^{-i\theta}|^{2\alpha'}}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(1-\overline{z_k}\rho_m e^{i\theta})^{\alpha'} &= \operatorname{Re}\left(1-r_k\rho_m e^{-i(\varphi_k-\theta)}\right)^{\alpha'} \\
&= \operatorname{Re}\left(1-\rho_m r_k + \rho_m r_k(1-e^{-i(\varphi_k-\theta)})\right)^{\alpha'} \\
&= \operatorname{Re}\left(1-\rho_m r_k + \rho_m r_k(1-e^{-i(\varphi_k-\theta)})\right)^{\alpha'} \\
&= (\rho_m r_k \rho)^{\alpha'} \operatorname{Re}\left(\frac{1-\rho_m r_k}{\rho_m r_k \rho} + e^{-i\varphi} \right)^{\alpha'},
\end{aligned}$$

где $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$, $(1-e^{-i(\varphi_k-\theta)}) = \rho e^{-i\varphi}$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha'}$. Используя лемму 1.3 из работы Ф.А. Шамояна [7], мы получаем оценку:

$$\operatorname{Re}(1-\overline{z_k}\rho_m e^{i\theta})^{\alpha'} \gtrsim (\rho_m r_k \rho)^{\alpha'}, \qquad c_1 > 0.$$

С другой стороны,

$$|1-e^{-i(\varphi_k-\theta)}|^{\alpha'} = 2^{\alpha'} \sin^{\alpha'}\left(\frac{\theta-\varphi_k}{2}\right),$$

откуда

$$\operatorname{Re}\frac{1}{(1-\alpha_k\rho_m e^{-i\theta})^{\alpha'}} \gtrsim \frac{(\rho_m r_k)^{\alpha'}2^{\alpha'}\sin^{\alpha'}\left(\frac{\theta-\varphi_k}{2}\right)}{\left((1-\rho_m r_k)^2+4\sin^2\left(\frac{\theta-\varphi_k}{2}\right)\rho_m r_k\right)^{\alpha'}}$$
$$\geqslant \frac{(\rho_m r_k)^{\alpha'}2^{\alpha'}\sin^{\alpha'}\left(\frac{\theta-\varphi_k}{2}\right)}{\left((1-\rho_m r_k)^2+4\sin^2\left(\frac{\theta-\varphi_k}{2}\right)\right)^{\alpha'}} \gtrsim \frac{2^{\alpha'}\sin^{\alpha'}\left(\frac{\theta-\varphi_k}{2}\right)}{(1-\rho_m r_k)^{2\alpha'}\left(1+\frac{4\sin^2\left(\frac{\theta-\varphi_k}{2}\right)}{(1-\rho_m r_k)^2}\right)^{\alpha'}}.$$

Так как $\{z_k\}_1^\infty \subset \Gamma_\delta(\theta)$, выполнено

$$\sup_k \frac{\left|\sin\left(\frac{\theta-\varphi_k}{2}\right)\right|}{(1-r_k)} \leqslant C.$$

Получаем:

$$\operatorname{Re}\frac{1}{(1-z_k\rho_m e^{-i\theta})^{\alpha'}} \geqslant \frac{c(\alpha')}{(1-\rho_m r_k)^{\alpha'}}.$$

Таким образом, для $|h(z_k)|$ в угле $\Gamma_\delta(\theta)$ справедлива следующая оценка

$$|h(z_k)| \geqslant \exp c(\alpha')\sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m\frac{(1-{\rho_m}^2)^\alpha}{(1-r_k\rho_m)^{\alpha'}}, \qquad k=1,2,\ldots.$$

Заметим, что ряд в правой части последнего неравенства сходится. Действительно,

$$u_k^m\frac{(1-{\rho_m}^2)^\alpha}{(1-r_k\rho_m)^{\alpha'}} \leqslant u_k^m\frac{(1-{\rho_m}^2)^\alpha}{(1-\rho_m)^{\alpha'}} \leqslant u_k^m\frac{2^\alpha}{(1-\rho_m)^{\frac{2}{q}}}.$$

Осталось воспользоваться условием (4.3).

Продолжим поиск нижней оценки $|h(z_k)|$. Для этого разделим на части сумму

$$\begin{aligned} S &= \sum_{m=1}^{+\infty} u_k^m\frac{(1-{\rho_m}^2)^\alpha}{(1-r_k\rho_m)^{\alpha'}} \\ &= \sum_{(1-\rho_m)=(1-r_k)}(\ldots) + \sum_{(1-\rho_m)>(1-r_k)}(\ldots) + \sum_{(1-\rho_m)<(1-r_k)}(\ldots) \\ &= S_0(k)+S_1(k)+S_2(k). \end{aligned}$$

Оценим каждую часть суммы отдельно. Пусть $m_0 = \inf\limits_{\rho_m=r_k} m$, тогда

$$S_0(k) = \sum_{(1-\rho_m)=(1-r_k)} u_k^m\frac{(1-{\rho_m}^2)^\alpha}{(1-r_k\rho_m)^{\alpha'}} = \sum_{\rho_m=r_k} u_k^m\frac{1}{(1-r_k^2)^{\frac{2}{q}}} \geqslant \frac{u_k^{m_0}}{(1-r_k^2)^{\frac{2}{q}}}.$$

Оценим $S_1(k)$:

$$\begin{aligned} S_1(k) &= \sum_{(1-\rho_m)>(1-r_k)} u_k^m\frac{(1-{\rho_m}^2)^\alpha}{(1-r_k\rho_m)^{\alpha'}} \geqslant \sum_{\rho_m<r_k} u_k^m\frac{1}{(1-\rho_m^2)^{\alpha'-\alpha}} \\ &\geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{q}}\sum_{\rho_m<r_k} u_k^m\frac{1}{(1-\rho_m)^{\frac{2}{q}}} \geqslant \frac{u_k^{m_1}}{(1-\rho_{m_1})^{\frac{2}{q}}}, \end{aligned}$$

где m_1 — номер, при котором $\rho_m < r_k$.

Теперь найдем нижнюю оценку $S_2(k)$

$$S_2(k) = \sum_{(1-\rho_m)<(1-r_k)} u_k^m \frac{(1-\rho_m{}^2)^\alpha}{(1-r_k\rho_m)^{\alpha'}} = \sum_{\rho_m>r_k} u_k^m \frac{(1-\rho_m{}^2)^\alpha}{(1-r_k\rho_m)^{\frac{2}{q}}(1-r_k\rho_m)^\alpha}$$

$$\geqslant \frac{1}{(1-r_k^2)^{\frac{2}{q}}} \sum_{\rho_m>r_k} u_k^m \frac{(1-\rho_m{}^2)^\alpha}{(1-r_k\rho_m)^\alpha} \geqslant \frac{1}{(1-r_k^2)^{\frac{2}{q}}} \frac{u_k^{m_2}(1-\rho_{m_2}^2)^\alpha}{(1-r_k^2)^\alpha},$$

здесь $m_2 = \inf\limits_{\rho_m>r_k} m$.

Из оценок S_0, S_1, S_2 заключаем:

$$S(k) \geqslant \frac{u_k^{m_2}(1-\rho_{m_2}^2)^\alpha}{(1-r_k^2)^{\frac{2}{q}+\alpha}} + \frac{u_k^{m_1}}{(1-\rho_{m_1})^{\frac{2}{q}}} + \frac{u_k^{m_0}}{(1-r_k^2)^{\frac{2}{q}}},$$

откуда

$$S(k) \geqslant \frac{u_k^{m_0}}{(1-r_k^2)^{\frac{2}{q}}}$$

при всех $k = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, получаем:

$$|h(z_k)| \geqslant \exp \frac{\mu_0(k)}{(1-r_k)^{\frac{2}{q}}}, \tag{4.5}$$

где

$$0 < \mu_0(k) \leqslant \frac{u_k^{m_0}}{2^{\frac{2}{q}}} = o(1), \qquad k \to +\infty.$$

Лемма 4.2 доказана. □

Доказательство теоремы 4.1. Докажем необходимость.

Предположим, что $\{z_k\}_1^\infty \subset D$ является интерполяционной последовательностью в классе $\tilde{\Pi}_q$, то есть для любой последовательности $\{w_k\}_1^\infty \in \tilde{l}_q$ существует функция $f \in \tilde{\Pi}_q$ такая, что

$$f(z_k) = w_k, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Рассмотрим последовательность $\{w_k\}_1^{+\infty}$: $w_1 = 1$, $w_2 = w_3 = \ldots = 0$. Очевидно, $\{w_k\}_1^{+\infty} \in \tilde{l}_q$. Так как $\{z_k\}_2^\infty$ — последовательность нулей функции $f \in \tilde{\Pi}_q$, из теоремы 2.1 следует оценка (2.1).

Для того чтобы установить (4.1), зафиксируем номер $n \in \mathbb{N}$, и построим последовательность $\{w_k^{(n)}\}_1^\infty$ следующим образом

$$w_k^{(n)} = 0, \qquad k \neq n, \qquad w_n^{(n)} = \exp \frac{\delta(n)}{(1-|z_n|)^{\frac{2}{q}}}, \qquad \text{где} \qquad \delta(n) \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

Согласно лемме 4.1, найдется функция $g_n \in \tilde{\Pi}_q$ такая, что

$$\rho_{\tilde{\Pi}_q}(g_n, 0) \leqslant C \quad \text{и} \quad g_n(z_k) = w_k^{(n)} \quad \text{при всех} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где константа $C > 0$ не зависит от номера n. В частности, $g_n(z_n) = w_n^{(n)}$.

Рассмотрим функцию

$$G_n = \frac{g_n}{\pi_{\beta,n}},$$

где $\pi_{\beta,n} = \pi_{\beta,n}(z, z_k)$ — произведение Джрбашяна, построенное по нулям функции g_n, расположенным в углах Штольца, без n-го множителя, β — произвольное число такое, что $\beta > \frac{2}{q} - 2$. Очевидно, что при таком выборе параметра β произведение $\pi_{\beta,n}$ сходится и принадлежит классу $\tilde{\Pi}_q$.

Докажем теперь, что $G_n \in \tilde{\Pi}_q$. Умножим обе части последнего равенства на $\pi_{\beta+1,n}$. Очевидно, что $G_n \in \Pi_q$ тогда и только тогда, когда $\frac{\pi_{\beta+1,n}}{\pi_{\beta,n}} \in \tilde{\Pi}_q$. Как установлено в [11, с. 81],

$$\frac{\pi_{\beta+1}(z,z_k)}{\pi_\beta(z,z_k)} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z}\right)^{\beta+2}\right\}.$$

Из этого представления и доказательства достаточности в теореме 2.1 следует, что $\frac{\pi_{\beta+1,n}}{\pi_{\beta,n}} \in \tilde{\Pi}_q$. Значит, $G_n = \frac{g_n}{\pi_{\beta,n}} \in \tilde{\Pi}_q$.

По теореме 2.2

$$\ln^+ M(r,G_n) = o((1-r)^{-\frac{2}{q}}), \qquad r \to 1-0, \tag{4.6}$$

откуда

$$|G_n(z_n)| = \frac{|g_n(z_n)|}{|\pi_{\beta,n}(z_n,z_k)|} = \frac{|w_n^{(n)}|}{|\pi_{\beta,n}(z_n,z_k)|} = \exp\frac{\delta(n)}{(1-|z_n|)^{\frac{2}{q}}}\frac{1}{|\pi_{\beta,n}(z_n,z_k)|} \leqslant C\exp\frac{\varepsilon(n)}{(1-|z_n|)^{\frac{2}{q}}},$$

где $\varepsilon(n) = o(1)$, $n \to +\infty$, $\varepsilon(n) > 0$, $n = 1,2,\ldots$ и по лемме 4.1 C не зависит от n. Полагая $\delta(n) = \frac{\varepsilon(n)}{2}$, получим:

$$|\pi_{\beta,n}(z_n,z_k)| \geq \exp\frac{-\varepsilon(n)}{2(1-|z_k|)^{\frac{2}{q}}},$$

при всех $\beta \geqslant \frac{2}{q}-2$, откуда и следует условие (4.1) (см. [4, с. 77]).

Таким образом, первая часть теоремы 4.1 доказана.

Докажем обратное утверждение.

Предположим, что $\{z_k\}_1^{+\infty}$ — произвольная последовательность различных точек из D, содержащаяся в конечном числе углов Штольца, и выполнены условия (2.2), (4.1). Покажем, что существует функция $f \in \tilde{\Pi}_q$ такая, что $f(z_k) = w_k$, $k = 1,2,\ldots$, где $\{w_k\}_1^{+\infty} \in \tilde{l}_q$, то есть

$$w_k = \exp\frac{\delta(k)}{(1-|z_k|)^{\frac{2}{q}}}, \tag{4.7}$$

$\delta(k) \to 0$, $k \to +\infty$.

Функцию $f(z)$ будем строить в следующем виде:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} w_k \frac{\pi_\beta(z,z_j)}{(z-z_k)}\frac{1}{\pi'_\beta(z_k,z_j)}\left(\frac{1-|z_k|}{1-\overline{z_k}z}\right)^{\beta+2}\frac{h(z)}{h(z_k)}, \tag{4.8}$$

где $\pi_\beta(z,z_k)$ — произведение Джрбашяна с нулями в узлах интерполяции

$$\{z_k\}_1^{+\infty}, \qquad \beta \geqslant \frac{2}{q}-2,$$

$h(z)$ определяется равенством (4.2), последовательность $\{u_k\}$ подбирается так, чтобы

$$\varepsilon(k) + \delta(k) - \mu_0(k) \leqslant 0,$$

где $\varepsilon(k)$, $\delta(k)$, $\mu_0(k)$ — бесконечно малые последовательности из оценок (4.1), (4.7), (4.5) соответственно.

Очевидно, что $f(z_n) = w_n$, $n = 1,2,\ldots$.

Функция $f(z)$ аналитична в круге D, ввиду сходимости ряда (4.8). Действительно, сходимость (4.8) равносильна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\beta+2} < +\infty. \tag{4.9}$$

Но (4.9) сходится при всех $\beta+2>\frac{2}{q}$ ввиду условия (2.2).

Покажем, что $f\in\tilde{\Pi}_q$:

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(\ln^+|f(re^{i\varphi})|)^q d\varphi dr \leqslant \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln^+\left|\pi_\beta(re^{i\varphi},z_j)\right|\right)^q d\varphi dr+\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln^+\left|h(re^{i\varphi})\right|\right)^q d\varphi dr$$
$$+\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln^+\sum_{k=1}^{+\infty}\exp\frac{\varepsilon(k)+\delta(k)-\mu_0(k)}{(1-|z_k|)^{\frac{2}{q}}}\cdot\frac{(1-|z_k|)^{\beta+2}}{|1-\overline{z_k}re^{i\varphi}|^{\beta+3}}\right)^q d\varphi dr$$
$$=I_1+I_2+I_3.$$

Сходимость интеграла I_1 следует из доказательства достаточности теоремы 2.1, сходимость I_2 доказана в лемме 4.2.

Докажем сходимость I_3 с учётом сделанного выше замечания

$$\varepsilon(k)+\delta(k)-\mu_0(k)\leqslant 0.$$

Имеем:

$$I_3\leqslant\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln^+\frac{\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\beta+2}}{(1-r)^{\beta+3}}\right)^q d\varphi dr\leqslant\int_0^1\left(\ln^+\frac{c(\beta)}{(1-r)^{\beta+3}}\right)^q dr<+\infty.$$

При оценке I_3 мы учли сходимость ряда (4.9).

Таким образом, $f\in\tilde{\Pi}_q$ действительно решает интерполяционную задачу в классе $\tilde{\Pi}_q$ при всех $0<q<1$.

Теорема 4.1 доказана полностью. □

Благодарности

Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю профессору Ф.А. Шамояну за полезные обсуждения. Также автор благодарит рецензентов за внимательное чтение рукописи и конструктивные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Г. Нафталевич. *Об интерполировании функций ограниченного вида* // Уч. зап. Вильн. ун-та **5**, 5–27 (1956).
2. Р. Неванлинна. *Однозначные аналитические функции* — М.-Л.: ГИТТЛ. 1941.
3. И.И. Привалов. *Граничные свойства однозначных аналитических функций* — М.: Изд. МГУ. 1941.
4. Е.Г. Родикова. *Факторизация, характеризация корневых множеств и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций.* Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Брянск, 2014.
5. Е.Г. Родикова. *О коэффициентных мультипликаторах плоских классов Привалова* // Уфим. мат. ж. **13**:4, 82–93 (2021).
6. Е.Г. Родикова, В.А. Беднаж. *Об интерполяции в классах И.И. Привалова в круге* // Сиб. электрон. мат. изв. **16**, 1762–1775 (2019).
7. Ф.А. Шамоян. *Факторизационная теорема М.М. Джрбашяна и характеризация нулей аналитических функций с мажорантой конечного роста* // Изв. акад. наук Арм. ССР, Мат. **13**, 405–422 (1978).
8. Ф.А. Шамоян. *Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций* // Сиб. мат. ж., **40**:6, 1422–1440 (1999).

9. Ф.А. Шамоян. *О некоторых свойствах нулевых множеств класса И.И. Привалова в круге* // Записки научн. семин. ПОМИ. **480**, 199–205 (2019).
10. Ф.А. Шамоян, В.А. Беднаж, О.В. Приходько. *О нулевых множествах некоторых весовых классов аналитических в круге функций* // Вестник Брянского гос. ун-та: естественные и точные науки **4**, 85–92 (2008).
11. Ф.А. Шамоян, Е.Н. Шубабко. *Введение в теорию весовых L^p–классов мероморфных функций.* Брянск: Группа компаний «Десяточка». 2009.
12. W. Blaschke. *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali uber Folgen analytischer Funktionen* // Leipz. Ber. **67**, 194–200 (1915).
13. L. Carleson. *An interpolation problem for bounded analytic functions* // Am. J. Math. **80**:4, 921–930 (1958).
14. A. Hartmann, X. Massaneda, A. Nicolau, P. Thomas. *Interpolation in the Nevanlinna and Smirnov classes and harmonic majorants* // J. Funct. Anal. **217**:1, 1–37 (2004).
15. P.W. Jones. *Carleson measures and the Fefferman — Stein decomposition of $BMO(R)$* // Ann. Math. (2) **111**:2, 197–208 (1980).
16. R. Meštrovic, J. Šušic. *Interpolation in the spaces N^p $(1 < p < +\infty)$* // Filomat. **27**:2, 291–299 (2013).
17. E.G. Rodikova, F.A. Shamoyan. *On the differentiation in the Privalov classes* // Ж. Сиб. фед. унив., Мат. физ. **13**:5, 622–630 (2020).
18. F.A. Shamoyan, E.G. Rodikova. *On interpolation in the class of analytic functions in the unit disk with power growth of the Nevanlinna characteristic* // Ж. Сиб. фед. унив., Мат. физ. **7**:2, 235—243 (2014).
19. K. Seip. *Interpolation and Sampling in Spaces of Analytic Functions.* Am. Math. Soc. Providence, RI (2004).
20. H.S. Shapiro, A.L. Shields. *On some interpolation problems for analytic functions* // Am. J. Math. **83**:3, 513–532 (1961).
21. N. Yanagihara. *Interpolation theorem for the class N^+* // Ill. J. Math. **18**, 427–435 (1974).

Евгения Геннадьевна Родикова,
Брянский государственный университет,
ул. Бежицкая, 14,
241050, Брянск, Россия
E-mail: evheny@yandex.ru