ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 4 (2024). С. 95-116.

УДК 517.956.6

РЯД КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА — ДАРБУ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

С.В. ПОДКЛЕТНОВА

Аннотация. В настоящей статье вводится новое уравнение в частных производных, которое является расширением известного уравнения Эйлера — Дарбу. На основании доказанных свойств решения введённого уравнения найдены общие решения в явном виде для различных значений параметров, доказаны теоремы существования и единственности. Основываясь на общих решениях введённого уравнения, решаются задачи Коши и видоизменённые задачи Коши в области верхнего прямоугольного треугольника. Выведены явные решения. Доказаны теоремы существования и единственности решения поставленных задач.

Ключевые слова: уравнение Эйлера — Дарбу, задача Коши, общее решение, разрешимость.

Mathematics Subject Classification: 35L35

1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv (\xi \operatorname{sgn} \xi - \eta)\, u_{\xi\eta} - bu_\xi + a \operatorname{sgn} \xi u_\eta = 0. \tag{1.1}$$

При положительных значениях переменной ξ, уравнение (1.1) тождественно уравнению Эйлера — Дарбу:

$$L(u) \equiv (\xi - \eta)\, u_{\xi\eta} - bu_\xi + au_\eta = 0, \tag{1.2}$$

а при $\xi < 0$ — уравнению

$$L(u) \equiv (\xi + \eta)\, u_{\xi\eta} + bu_\xi + au_\eta = 0. \tag{1.3}$$

Отметим, что уравнением Эйлера — Пуассона — Дарбу традиционно называют уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$. В характеристических координатах $\xi = x+t$, $\eta = x-t$ указанное уравнение принимает вид:

$$(\xi - \eta)\, u_{\xi\eta} - \frac{\gamma}{2}u_\xi + \frac{\gamma}{2}u_\eta = 0.$$

Последнее же уравнение тождественно уравнению (1.2) при

$$a = b = \frac{\gamma}{2}.$$

S.V. Podkletnova, Series of boundary value problems for Euler — Darboux equation with two degeneracy lines.

Поступила 23 декабря 2023 г.

Таким образом, уравнение (1.1) можно определить как объединение обобщения уравнения Эйлера — Дарбу (1.2) и его образа относительно оси η (1.3). По этой причине назовём это уравнение уравнением Эйлера — Дарбу с двумя линиями вырождения.

Впервые уравнение (1.2) в виде

$$u_{xy} + \frac{b}{x-y}u_x + \frac{a}{x-y}u_y + \frac{c}{(x-y)^2}u = 0 \tag{1.4}$$

было рассмотрено Эйлером при $a = b = m$, $c = n$ при натуральных значениях m и n в связи с изучением движения воздуха в трубах постоянного и переменного сечений, а также колебания струн переменной толщины. Самое общее решение уравнения (1.4) в рассмотренном Эйлером случае было выведено Риманом. Кроме того, в своей статье «О распространении плоских волн конечной амплитуды» [1] Риманом было показано, что к уравнению (1.4) в характеристических координатах сводится точное уравнение адиабатического и обратимого движения газа в трубе постоянного сечения, если энтропия единичной массы во всех частицах одинакова. Как в дальнейшем оказалось, уравнение (1.4) имеет широкое применение в газовой и гидродинамике [2], теории оболочек, различных разделах механики сплошных сред. При различных параметрах a, b и c уравнение (1.4) изучали Пуассон и Дарбу, поэтому исторически это уравнение было названо уравнением Эйлера — Пуассона — Дарбу.

Следует отметить, что в областях своей гиперболичности многие уравнения смешанного типа сводятся к уравнению Эйлера — Дарбу. Как пример можно привести уравнения Трикоми, Кароля, Эйлера — Пуассона — Дарбу смешанного типа, ряд уравнений смешанного типа с вырождением типа и порядка. По этой причине дальнейшее исследование указанного уравнения представляется актуальным.

В настоящей статье будет рассмотрена серия краевых задач для уравнения Эйлера — Дарбу с двумя линиями вырождения (1.1) в треугольных областях. Ранее подобные задачи были рассмотрены Волкодавовым (например, см. [3], [4]), Аристовой [5] и Хайруллиным [6] для других параметров и областей значений переменных. Приведём обзор решённых указанными авторами задач Коши и видоизменённых задач Коши для уравнения (1.2). Учитывая, что уравнение (1.2) является частью уравнения (1.1), для полноты исследования все определения и теоремы будем приводить для уравнения (1.1).

Теорема 1.1. *Решение задачи Коши с данными*

$$\begin{gathered} u(\xi,\xi) = \tau_+(\xi), \qquad \xi \in [0,h], \\ \lim_{\eta-\xi\to+0} (\eta-\xi)^{\alpha+\beta}(u_\xi - u_\eta) = \nu_+(\xi), \qquad \xi \in (0,h) \end{gathered} \tag{1.5}$$

при $a = \alpha$, $b = \beta$, $0 < \alpha, \beta, \alpha+\beta < 1$ для уравнения (1.1) в области

$$G_+ = \{(\xi,\eta) |\, 0 < \xi < \eta < h\} \tag{1.6}$$

выражается формулой

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) = &\gamma_2 \int_\xi^\eta \nu_+(t)(t-\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{-\beta}dt \\ &+ \gamma_1(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}\int_\xi^\eta \tau_+(t)(t-\xi)^{\beta-1}(\eta-t)^{\alpha-1}dt, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}, \tag{1.7}$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{2\,(1-\alpha-\beta)\,(\,B)\,(1-\alpha,1-\beta)}, \tag{1.8}$$

и оно единственно, если $\tau_+ \in C^1_{[0,h]}$, $\nu_+ \in C^1_{[0,h]}$.

Теорема 1.2. *Решение задачи Коши с данными (1.5) и*

$$\lim_{\eta-\xi\to+0} (\eta-\xi)^{\alpha-\beta}\,(u_\xi - u_\eta) = \nu_+(\xi)\,, \qquad \xi \in (0,h)$$

при $a=\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\beta,\alpha-\beta<1$ *для уравнения (1.1) в области* G_+ *(1.6) выражается формулой*

$$u(\xi,\eta) = \gamma_4 \int\limits_\xi^\eta \nu_+(t)\,(t-\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^\beta dt + \gamma_3(\eta-\xi)^{\beta-\alpha}\int\limits_\xi^\eta \tau'_+(t)\,(t-\xi)^{-\beta}(\eta-t)^\alpha dt$$

$$+\,(\beta-\alpha)\,\gamma_3(\eta-\xi)^{\beta-\alpha}\int\limits_\xi^\eta \tau_+(t)\,(t-\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha-1}dt,$$

где

$$\gamma_3 = \frac{1}{(\beta-\alpha)\,\mathrm{B}\,(\alpha,1-\beta)}, \tag{1.9}$$

$$\gamma_4 = -\frac{1}{2\,(\alpha-\beta-1)\,\mathrm{B}\,(1-\alpha,1+\beta)}, \tag{1.10}$$

и оно единственно, если $\tau_+ \in C^2_{[0,h]}$, $\nu_+ \in C^1_{[0,h]}$.

Теорема 1.3. *Решение видоизменённой задачи Коши с данными (1.5) и*

$$\lim_{\eta-\xi\to+0} \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}(\eta-\xi)^{-\alpha-\beta}\,(\beta u_\xi - \alpha u_\eta) = \nu_+(\xi)\,, \qquad \xi\in(0,h)$$

при $a=-\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\beta,\alpha+\beta<1$ *для уравнения (1.1) в области* G_+ *(1.6) выражается формулой*

$$u(\xi,\eta) = -\,\mu_3 \int\limits_\xi^\eta \nu_+(t)\,(t-\xi)^\alpha(\eta-t)^\beta dt$$

$$+\,\mu_1(\eta-\xi)^{\alpha+\beta-1}\int\limits_\xi^\eta \tau_+(t)\,(t-\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{-\alpha}dt$$

$$-\,\mu_2(\eta-\xi)^{\alpha+\beta-1}\int\limits_\xi^\eta \tau'_+(t)\,(t-\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{-\alpha}\,[(\alpha+\beta)\,(t-\xi)+\alpha\,(\xi-\eta)]\,dt,$$

где

$$\mu_1 = \frac{1}{\mathrm{B}\,(1-\alpha,1-\beta)},$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{(\alpha+\beta)\,(1-\alpha-\beta)\,\mathrm{B}\,(1-\alpha,1-\beta)}, \tag{1.11}$$

$$\mu_3 = -\frac{\alpha+\beta}{(1+\alpha+\beta)\,\mathrm{B}\,(1+\alpha,1+\beta)}, \tag{1.12}$$

и оно единственно, если $\tau_+ \in C^2_{[0,h]}$, $\nu_+ \in C_{[0,h]}$.

Теорема 1.4. *Решение видоизменённой задачи Коши с данными (1.5) и*

$$\lim_{\eta-\xi\to+0}\frac{1}{\alpha-\beta}(\eta-\xi)^{\alpha-\beta}\left(\beta u_{\xi}+\alpha u_{\eta}\right)=\nu_{+}\left(\xi\right),\qquad \xi\in(0,h)$$

при $a=\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\beta,\beta-\alpha<1$ *для уравнения (1.1) в области* G_{+} *(1.6) выражается формулой*

$$\begin{aligned}u\left(\xi,\eta\right)=&-2\gamma_{4}\int\limits_{\xi}^{\eta}\nu_{+}\left(t\right)\left(t-\xi\right)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta}dt\\&+\left(\beta-\alpha\right)\gamma_{3}(\eta-\xi)^{\beta-\alpha}\int\limits_{\xi}^{\eta}\tau_{+}\left(t\right)\left(t-\xi\right)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha-1}dt\\&+\gamma_{3}(\eta-\xi)^{\beta-\alpha}\int\limits_{\xi}^{\eta}{\tau'}_{+}\left(t\right)\left(t-\xi\right)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha}dt,\end{aligned}$$

где γ_{3} *определяется формулой (1.9),* γ_{4} *— формулой (1.10), и оно единственно, если* $\tau_{+}\in C^{2}_{[0,h]}$, $\nu_{+}\in C^{1}_{[0,h]}$.

2. Общие решения для некоторых значений параметров уравнения Эйлера — Дарбу с двумя линиями вырождения

Представим решение уравнения (1.3) в виде:

$$u\left(\xi,\eta\right)=\left(\xi+\eta\right)^{1-a-b}v\left(\xi,\eta\right).$$

Тогда функция $v\left(\xi,\eta\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\xi+\eta\right)v_{\xi\eta}+\left(1-a\right)v_{\xi}+\left(1-b\right)v_{\eta}=0.$$

Таким образом, если $u\left(\xi,\eta\right)$ есть решение уравнения (1.3) и

$$u\left(a,b\right)=\left(\xi+\eta\right)^{1-a-b}u\left(1-b,1-a\right),\tag{2.1}$$

то и $u\left(1-b,1-a\right)$ является решением уравнения (1.3).

Приведём некоторые свойства уравнения (1.3).

1. *Однородные решения уравнения (1.3) выражаются через гипергеометрические функции.*

Действительно, с помощью замены переменных

$$t=-\frac{\eta}{\xi},\qquad u=\xi^{\mu}\cdot\varphi\left(t\right)\tag{2.2}$$

уравнение (1.3) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$t\left(1-t\right)\varphi''\left(t\right)+\left[\left(1-a-\mu\right)-\left(1+b-\mu\right)t\right]\varphi'\left(t\right)+b\mu\varphi\left(t\right)=0.$$

Это уравнение Гаусса [7], которое имеет два линейно независимых решения, регулярных в точке $t=0$:

$$\varphi_1(t) = F(-\mu, b; 1-\mu-a; t)$$

и

$$\varphi_2(t) = t^{\mu+a} F(a, a+b+\mu; 1+a+\mu; t).$$

Тогда в силу (2.2) уравнение (1.3) имеет однородные решения произвольной степени μ:

$$u_1(\xi,\eta) = \xi^{\mu} F\left(-\mu, b; 1-\mu-a; -\frac{\eta}{\xi}\right),$$

$$u_2(\xi,\eta) = \xi^{2\mu+a}(-\eta)^{-a-\mu} F\left(a, a+b+\mu; 1+\mu+a; -\frac{\eta}{\xi}\right).$$

2. *Если $\varphi(\xi,\eta)$ — любое решение уравнения (1.1), то функция*

$$(B-A\xi)^{-a}(A\eta+B)^{-b}\varphi\left(-\frac{D+C\xi}{B-A\xi}; \frac{C\eta+D}{A\eta+B}\right),$$

где A, B, C и D — произвольные постоянные, причём $BC-AD\neq 0$, тоже является решением уравнения (1.3).

3. *Обозначим в (1.3)*

$$L(a,b) \equiv (\xi+\eta)\,u_{\xi\eta} + bu_{\xi} + au_{\eta} = 0.$$

Пусть $u(a,b)$ — любое решение уравнения $L(a,b)\equiv 0$. Тогда функции

$$u(1+a,b) = \frac{\partial u(a,b)}{\partial \xi}, \tag{2.3}$$

$$u(a,1+b) = \frac{\partial u(a,b)}{\partial \eta} \tag{2.4}$$

представляют собой соответственно решения уравнений

$$L(a+1,b)\equiv 0,$$
$$L(a,b+1)\equiv 0.$$

И вообще

$$u(a+m-1, b+n-1) = \frac{\partial^{m+n-2}u(a,b)}{\partial\xi^{m-1}\partial\eta^{n-1}} \tag{2.5}$$

является решением уравнения

$$L(a+m-1, b+n-1)\equiv 0.$$

Далее, в силу (2.1) формулу (2.5) можно записать в виде

$$(\xi+\eta)^{3-a-b-n-m}u(2-b-n, 2-a-m) = \frac{\partial^{m+n-2}}{\partial\xi^{m-1}\partial\eta^{n-1}}\left[\frac{u(1-b,1-a)}{(\xi+\eta)^{a+b-1}}\right].$$

Заменим a, b, $n-1$, $m-1$ соответственно на $1-b$, $1-a$, m, n, получим

$$u(a-m, b-n) = (\xi+\eta)^{m+n-1-a-b}\frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi^{n}\partial\eta^{m}}\left[\frac{u(a,b)}{(\xi+\eta)^{1-a-b}}\right].$$

Найдём общее решение уравнения (1.3), когда $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < a + b < 1$. Сначала докажем, что функция

$$u_1(\xi,\eta) = \int_{-\xi}^{\eta} \Phi_-(t)\,(t+\xi)^{-a}(\eta-t)^{-b}dt,$$

где $\Phi_-(t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, представляет собой решение уравнения (1.3).

Вычислим частные производные от функции $u_1(\xi,\eta)$. С этой целью интегрированием по частям при

$$u = \Phi_-(t), \quad v = \int_{-\xi}^{t} (s+\xi)^{-a}(\eta-s)^{-b}ds$$

находим:

$$u_1(\xi,\eta) = \mathrm{B}(1-\alpha, 1-\beta)\,\Phi_-(\eta)\,(\xi+\eta)^{1-a-b} - \frac{(\xi+\eta)^{-b}}{1-a}\int_{-\xi}^{\eta} \Phi'_-(t)\,(t+\xi)^{1-a} F\left(1-a, b; 2-a; \frac{t+\xi}{\eta+\xi}\right) dt.$$

Используя формулы сокращенного дифференцирования [7]

$$az^{a-1}F(a+1,b;c;z) = \frac{d}{dz}\left[z^a F(a,b;c;z)\right],$$
$$(c-1)\,z^{c-2}(1-z)^{b-c}F(a-1,b;c-1;z) = \frac{d}{dz}\left[z^{c-1}(1-z)^{b-c+1}F(a,b;c;z)\right],$$

находим

$$\frac{\partial u_1(\xi,\eta)}{\partial \xi} = (1-a-b)\,\mathrm{B}(1-a,1-b)\,\Phi_-(\eta)\,(\xi+\eta)^{-a-b} - (\xi+\eta)^{-b}\int_{-\xi}^{\eta} \Phi'_-(t)\,(t+\xi)^{-a}F\left(-a,b;1-a;\frac{t+\xi}{\eta+\xi}\right)dt,$$

$$\frac{\partial u_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} = (1-a-b)\,\mathrm{B}(1-a,1-b)\,\Phi_-(\eta)\,(\xi+\eta)^{-a-b} + \frac{b}{1-a}(\xi+\eta)^{-b-1}\int_{-\xi}^{\eta} \Phi'_-(t)\,(t+\xi)^{1-a}F\left(1-a,b+1;2-a;\frac{t+\xi}{\eta+\xi}\right)dt,$$

$$\frac{\partial^2 u_1(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} = -(a+b)\,(1-a-b)\,\mathrm{B}(1-a,1-b)\,\Phi_-(\eta)\,(\xi+\eta)^{-a-b-1} + b(\xi+\eta)^{-b-1}\int_{-\xi}^{\eta} \Phi'_-(t)\,(t+\xi)^{-a}F\left(-a,b+1;1-a;\frac{t+\xi}{\eta+\xi}\right)dt.$$

Подставив найденные частные производные в уравнение (1.3), придём к

$$L(u_1) \equiv (\xi+\eta)\Big[-(a+b)\,(1-a-b)\,\mathrm{B}(1-a,1-b)\,\Phi_-(\eta)\,(\xi+\eta)^{-a-b-1} + b(\xi+\eta)^{-b-1}\int_{-\xi}^{\eta} \Phi'_-(t)\,(t+\xi)^{-a}F\left(-a,b+1;1-a;\frac{t+\xi}{\eta+\xi}\right)dt\Big]$$

$$+ b\left[(1-a-b)\,\mathrm{B}\,(1-a,1-b)\,\Phi_-(\eta)\,(\xi+\eta)^{-a-b}\right.$$
$$\left. -(\xi+\eta)^{-b}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\Phi'_-(t)\,(t+\xi)^{-a}F\left(-a,b;1-a;\frac{t+\xi}{\eta+\xi}\right)dt\right]$$
$$+ a\left[(1-a-b)\,\mathrm{B}\,(1-a,1-b)\,\Phi_-(\eta)\,(\xi+\eta)^{-a-b}\right.$$
$$\left. +\frac{b}{1-a}(\xi+\eta)^{-b-1}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\Phi'_-(t)\,(t+\xi)^{1-a}F\left(1-a,b+1;2-a;\frac{t+\xi}{\eta+\xi}\right)dt\right].$$

Или

$$L\,(u_1)\equiv\frac{b}{1-a}(\xi+\eta)^{-b}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\Phi'_-(t)\,(t+\xi)^{-a}S\left(a,b;\frac{t+\xi}{\eta+\xi}\right)dt,$$

где

$$S\,(a,b;z)=(1-a)\,F\,(-a,b+1;1-a;z)$$
$$-(1-a)\,F\,(-a,b;1-a;z)+azF\,(1-a,b+1;2-a;z)\,.$$

Используя рекуррентную формулу Гаусса [8]

$$c\,F\,(a,b;c;z)-c\,F\,(a,b+1;c;z)+a\,z\,F\,(a+1,b+1;c+1;z)=0,$$

находим, что

$$S\left(a,b;\frac{t+\xi}{\eta+\xi}\right)=0.$$

Но тогда $L\,(u_1)\equiv 0$, и, стало быть, $u_1\,(\xi,\eta)$ — решение уравнения (1.3). Учитывая (2.1), заключаем, что другое линейно независимое решение уравнения (1.3) имеет вид:

$$u_2\,(\xi,\eta)=(\eta+\xi)^{1-\alpha-\beta}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\Psi_-(t)\,(t+\xi)^{b-1}(\eta-t)^{a-1}dt,$$

где $\Psi_-(t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Следовательно, общее решение уравнения (1.3) имеет вид

$$\begin{aligned}u\,(\xi,\eta)&=\int\limits_{-\xi}^{\eta}\Phi_-(t)\,(t+\xi)^{-a}(\eta-t)^{-b}dt\\&+(\xi+\eta)^{1-\alpha-\beta}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\Psi_-(t)\,(t+\xi)^{b-1}(\eta-t)^{a-1}dt,\end{aligned}\tag{2.6}$$

где и $\Psi_-(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Или после замены $t=-\xi+(\xi+\eta)\,s$

$$\begin{aligned}u\,(\xi,\eta)=&(\xi+\eta)^{1-\alpha-\beta}\int\limits_{0}^{1}\Phi_-(-\xi+(\xi+\eta)\,s)\,s^{-a}(1-s)^{-b}ds\\&+\int\limits_{0}^{1}\Psi_-(-\xi+(\xi+\eta)\,s)\,s^{b-1}(1-s)^{a-1}ds.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Рассмотрим уравнение (1.3), когда $a = -\alpha$, $b = -\beta$, $0 < \alpha, \beta, \alpha + \beta < 1$. В этом случае уравнение (1.3) примет вид:

$$L(-\alpha, -\beta) \equiv (\xi + \eta) u_{\xi\eta} - \beta u_\xi - \alpha u_\eta = 0. \tag{2.8}$$

Найдём общее решение уравнения (2.8). Согласно (2.1) при $a = -\alpha$, $b = -\beta$

$$u(-\alpha, -\beta) = (\xi + \eta)^{1+\alpha+\beta} u(1 + \beta, 1 + \alpha). \tag{2.9}$$

Подставим в формулу (2.5) $n = m = 2$, $a = \beta$, $b = \alpha$, получим

$$u(\beta + 1, \alpha + 1) = \frac{\partial^2 u(\beta, \alpha)}{\partial\xi\partial\eta}. \tag{2.10}$$

Подставив значение функции $u(\beta + 1, \alpha + 1)$, определяемое формулой (2.10), в равенство (2.9), получим

$$u(-\alpha, -\beta) = (\xi + \eta)^{1+\alpha+\beta} \frac{\partial^2 u(\beta, \alpha)}{\partial\xi\partial\eta}. \tag{2.11}$$

Дифференцируя по ξ и η функцию, определяемую формулой (2.6) при $a = \beta$, $b = \alpha$, с учётом равенства (2.11) находим общее решение уравнения (2.8):

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = &- (\alpha + \beta)(1 - \alpha - \beta)(\xi + \eta)^{\alpha+\beta-1} \\ &\cdot \int\limits_{-\xi}^{\eta} \Phi_-(t)(t + \xi)^{-\beta}(\eta - t)^{-\alpha} dt - (\xi + \eta)^{\alpha+\beta-1} \\ &\cdot \int\limits_{-\xi}^{\eta} \Phi'_-(t)(t + \xi)^{-\beta}(\eta - t)^{-\alpha} [(\alpha + \beta)(t + \xi) - \alpha(\xi + \eta)] dt \\ &- \int\limits_{-\xi}^{\eta} \Psi_-(t)(t + \xi)^{\alpha}(\eta - t)^{\beta} dt, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где $\Phi_- \in C^3$, $\Psi_- \in C$. Доказательство того, что функция (2.12) действительно является решением уравнения (2.8) проводится подобно тому, как это было сделано для уравнения (1.3) с положительными параметрами a и b, то есть непосредственной подстановкой с применением рекуррентных формул Гаусса [8].

Сделав в формуле (2.12) замену $t = -\xi + (\xi + \eta) s$, приходим к следующему виду решения уравнения (2.8):

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = &- (\alpha + \beta)(1 - \alpha - \beta) \int\limits_0^1 \Phi_-(-\xi + (\xi + \eta) s) s^{-\beta}(1 - s)^{-\alpha} ds \\ &- (\xi + \eta) \int\limits_0^1 \Phi'_-(-\xi + (\xi + \eta) s) s^{-\beta}(1 - s)^{-\alpha} [(\alpha + \beta) s - \alpha] ds \\ &- (\xi + \eta)^{\alpha+\beta+1} \int\limits_0^1 \Psi_-(-\xi + (\xi + \eta) s) s^{\alpha}(1 - s)^{\beta} ds. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Рассмотрим уравнение (1.3), когда $a = \alpha$, $b = -\beta$, $0 < \alpha, \beta < 1$. При указанных параметрах a и b уравнение (1.3) примет вид:

$$L(\alpha, -\beta) \equiv (\xi + \eta) u_{\xi\eta} - \beta u_\xi + \alpha u_\eta = 0. \tag{2.14}$$

Найдём общее решение уравнения (2.14). При $a = \alpha$, $b = -\beta$ формула (2.1) запишется в виде

$$u(\alpha, -\beta) = (\xi + \eta)^{1-\alpha+\beta} u(1+\beta, 1-\alpha).$$

При $a = \beta$, $b = 1-\alpha$ формула (2.3) имеет вид:

$$u(1+\beta, 1-\alpha) = \frac{\partial u(\beta, 1-\alpha)}{\partial \xi}.$$

Из последних двух выражений находим:

$$u(\alpha, -\beta) = (\xi + \eta)^{1-\alpha+\beta} \frac{\partial u(\beta, 1-\alpha)}{\partial \xi}.$$

После дифференцирования по ξ функции, определяемой формулой (2.6) при $a = \beta$, $b = 1-\alpha$, получим общее решение уравнения (2.14):

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = (\alpha - \beta)(\xi + \eta)^{\beta-\alpha} \int\limits_{-\xi}^{\eta} \Phi_-(t)(t+\xi)^{-\beta}(\eta - t)^{\alpha-1} dt \\ - (\xi+\eta)^{\beta-\alpha} \int\limits_{-\xi}^{\eta} \Phi'_-(t)(t+\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha} dt - \int\limits_{-\xi}^{\eta} \Psi_-(t)(t+\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta} dt, \end{aligned} \tag{2.15}$$

где $\Phi_- \in C^2$, $\Psi_- \in C^1$.

Доказательство того, что функция (2.15) действительно является решением уравнения (2.14) проводится подобно тому, как это было сделано для уравнения (1.3) с положительными параметрами a и b, то есть непосредственной подстановкой с применением рекуррентных формул Гаусса [8].

Сделав в формуле (2.15) замену $t = -\xi + (\xi + \eta)s$, приходим к следующему виду решение уравнения (2.14):

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = (\alpha - \beta) \int\limits_0^1 \Phi_-(-\xi + (\xi+\eta)s) s^{-\beta}(1-s)^{\alpha-1} ds \\ - (\xi+\eta) \int\limits_0^1 \Phi'_-(-\xi + (\xi+\eta)s) s^{-\beta}(1-s)^{\alpha} ds \\ - (\xi+\eta)^{1-\alpha+\beta} \int\limits_0^1 \Psi_-(-\xi + (\xi+\eta)s) s^{-\alpha}(1-s)^{\beta} ds. \end{aligned} \tag{2.16}$$

При $a = -\alpha$, $b = \beta$, $0 < \alpha, \beta < 1$ уравнение (1.2) имеет вид

$$L(-\alpha, \beta) \equiv (\xi - \eta) u_{\xi\eta} - \beta u_\xi - \alpha u_\eta = 0. \tag{2.17}$$

Найдём общее решение уравнения (2.17). Для этого воспользуемся следующими свойствами решения уравнения Эйлера — Дарбу (1.2) [9]:

$$u(a, b) = (\eta - \xi)^{1-a-b} u(1-b, 1-a), \tag{2.18}$$

$$u(a, 1+b) = \frac{\partial u(a, b)}{\partial \eta}. \tag{2.19}$$

При $a = -\alpha$, $b = \beta$ формула (2.18) примет вид:

$$u(-\alpha, \beta) = (\eta - \xi)^{1+\alpha-\beta} u(1-\beta, 1+\alpha).$$

При $a = 1 - \beta$, $b = \alpha$ формула (2.19) будет иметь вид:

$$u\,(1-\beta, 1+\alpha) = \frac{\partial u\,(1-\beta, \alpha)}{\partial \eta}.$$

Из последних двух выражений находим

$$u\,(-\alpha, \beta) = (\xi + \eta)^{1+\alpha-\beta} \frac{\partial u\,(1-\beta, \alpha)}{\partial \eta}.$$

Известен вид общего решения уравнения Эйлера — Дарбу (1.2) при $0 < \alpha, \beta < 1$, $0 < \alpha + \beta < 1$ [9]:

$$u\,(\xi, \eta) = \int\limits_{\xi}^{\eta} \Phi_+\,(t)\,(t-\xi)^{-a}(\eta - t)^{-b}dt + (\eta - \xi)^{1-\alpha-\beta} \int\limits_{\xi}^{\eta} \Psi_+\,(t)\,(t-\xi)^{b-1}(\eta - t)^{a-1}dt,$$

если $\Phi_+, \Psi_+ \in C^2$. После дифференцирования по η функции, определяемой последней формулой при $a = 1 - \beta$, $b = \alpha$, получим

$$\begin{gathered} u\,(\xi, \eta) = (\beta - \alpha)\,(\eta - \xi)^{\alpha-\beta} \int\limits_{\xi}^{\eta} \Phi_+\,(t)\,(t-\xi)^{\beta-1}(\eta - t)^{-\alpha}dt \\ + (\eta - \xi)^{\alpha-\beta} \int\limits_{\xi}^{\eta} \Phi'_+\,(t)\,(t-\xi)^{\beta}(\eta - t)^{-\alpha}dt + \int\limits_{\xi}^{\eta} \Psi_+\,(t)\,(t-\xi)^{\alpha}(\eta - t)^{-\beta}dt, \end{gathered} \tag{2.20}$$

где $\Phi_+ \in C^2$, $\Psi_+ \in C^1$. Или после замены $t = \xi + (\eta - \xi)\,s$

$$\begin{gathered} u\,(\xi, \eta) = (\beta - \alpha) \int\limits_{0}^{1} \Phi_+\,(\xi + (\eta - \xi)\,s)\,s^{\beta-1}(1-s)^{-\alpha}ds \\ + (\eta - \xi) \int\limits_{0}^{1} \Phi'_+\,(\xi + (\eta - \xi)\,s)\,s^{\beta}(1-s)^{-\alpha}ds \\ + (\eta - \xi)^{1+\alpha-\beta} \int\limits_{0}^{1} \Psi_+\,(\xi + (\eta - \xi)\,s)\,s^{\alpha}(1-s)^{-\beta}ds. \end{gathered} \tag{2.21}$$

Доказательство того, что выведенная функция действительно является решением уравнения (2.17) проводится аналогично тому, как это было сделано для уравнения (1.3) с положительными параметрами a и b, то есть непосредственной подстановкой с применением рекуррентных формул Гаусса [8].

При $a = -\alpha$, $b = \beta$, $0 < \alpha, \beta < 1$ уравнение (1.3) имеет вид

$$L\,(-\alpha, \beta) \equiv (\xi + \eta)\,u_{\xi\eta} + \beta u_{\xi} - \alpha u_{\eta} = 0. \tag{2.22}$$

Найдём общее решение уравнения (2.22). При $a = -\alpha$, $b = \beta$ формула (2.1) запишется в виде

$$u\,(-\alpha, \beta) = (\xi + \eta)^{1+\alpha-\beta} u\,(1-\beta, 1+\alpha)\,.$$

При $a = 1 - \beta$, $b = \alpha$ формула (2.4) примет вид

$$u\,(1-\beta, 1+\alpha) = \frac{\partial u\,(1-\beta, \alpha)}{\partial \eta}.$$

Из последних двух выражений следует

$$u\,(-\alpha,\beta) = (\xi+\eta)^{1+\alpha-\beta}\frac{\partial u\,(1-\beta,\alpha)}{\partial\eta}.$$

После дифференцирования по η функции, определяемой формулой (2.6) при $a = 1-\beta$, $b = \alpha$, получим общее решение уравнения (2.22)

$$\begin{aligned} u\,(\xi,\eta) = (\beta-\alpha)\,(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\Phi_-\,(t)\,(t+\xi)^{\beta-1}(\eta-t)^{-\alpha}dt \\ -(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\Phi'_-\,(t)\,(t+\xi)^{\beta}(\eta-t)^{-\alpha}dt - \int\limits_{-\xi}^{\eta}\Psi_-\,(t)\,(t+\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}dt, \end{aligned} \tag{2.23}$$

где $\Phi_- \in C^2$, $\Psi_- \in C^1$.

Доказательство того, что функция (2.23) является решением уравнения (2.22) проводится аналогично предыдущему.

Сделав в формуле (2.23) замену $t = -\xi+(\xi+\eta)\,s$, приходим к следующему виду решение уравнения (2.22):

$$\begin{aligned} u\,(\xi,\eta) = (\beta-\alpha)\int\limits_0^1\Phi_-\,(-\xi+(\xi+\eta)\,s)\,s^{\beta-1}(1-s)^{-\alpha}ds \\ -(\xi+\eta)\int\limits_0^1\Phi'_-\,(-\xi+(\xi+\eta)\,s)\,s^{\beta}(1-s)^{-\alpha}ds \\ -(\xi+\eta)^{1+\alpha-\beta}\int\limits_0^1\Psi_-\,(-\xi+(\xi+\eta)\,s)\,s^{\alpha}(1-s)^{-\beta}ds. \end{aligned} \tag{2.24}$$

3. Задачи Коши и видоизменённые задачи Коши

Пусть в уравнении (1.3) $a=\alpha$, $b=\beta$.

Задача 3.1. *Для уравнения (1.3) при $a=\alpha$, $b=\beta$, $0<\alpha,\beta,\alpha+\beta<1$ в области*

$$G_- = \{(\xi,\eta)|\,0<-\xi<\eta<h\} \tag{3.1}$$

найти решение задачи Коши с данными

$$u\,(\xi,-\xi) = \tau_-\,(\xi)\,, \qquad \xi\in[-h,0]\,, \tag{3.2}$$

$$\lim_{\xi+\eta\to+0}(\xi+\eta)^{\alpha+\beta}\,(u_\xi+u_\eta) = \nu_-\,(\xi)\,, \qquad \xi\in(-h,0)\,. \tag{3.3}$$

Применим к функции, определяемой формулой (2.6) при $a=\alpha$, $b=\beta$ условие (3.2). Получим

$$u\,(\xi,-\xi) = \mathrm{B}\,(\alpha,\beta)\,\Psi_-\,(-\xi) = \tau_-\,(\xi)\,.$$

Отсюда

$$\Psi_-\,(\xi) = \gamma_1\,\tau_-\,(-\xi)\,, \tag{3.4}$$

где γ_1 определяется формулой (1.7).

Вычислим частные производные первого порядка от функции, определяемой формулой (2.7)

$$u_\xi(\xi,\eta)=(1-\alpha-\beta)(\xi+\eta)^{-\alpha-\beta}\int\limits_0^1\Phi_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta}ds$$
$$-(\xi+\eta)^{1-\alpha-\beta}\int\limits_0^1\Phi'_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\alpha}(1-s)^{1-\beta}ds \tag{3.5}$$
$$-\int\limits_0^1\Psi'_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha}ds,$$

$$u_\eta(\xi,\eta)=(1-\alpha-\beta)(\xi+\eta)^{-\alpha-\beta}\int\limits_0^1\Phi_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta}ds$$
$$+(\xi+\eta)^{1-\alpha-\beta}\int\limits_0^1\Phi'_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{1-\alpha}(1-s)^{-\beta}ds \tag{3.6}$$
$$+\int\limits_0^1\Psi'_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{\beta}(1-s)^{\alpha-1}ds.$$

Применим к функции, определяемой формулой (2.7), условие (3.3), используя выражения (3.5) и (3.6). Получим

$$\nu_-(\xi)=2(1-\alpha-\beta)\,\mathrm{B}(1-\alpha,1-\beta)\,\Phi_-(-\xi).$$

Отсюда

$$\Phi_-(-\xi)=-\gamma_2\,\nu_-(-\xi), \tag{3.7}$$

где γ_2 определяется формулой (1.8). Подставим выражения (3.4) и (3.7) в функцию, определяемую формулой (2.6). Будем иметь

$$\begin{aligned}u(\xi,\eta)=&-\gamma_2\int\limits_{-\xi}^{\eta}\nu_-(-t)(t+\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{-\beta}dt\\&+\gamma_1(\xi+\eta)^{1-\alpha-\beta}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\tau_-(-t)(t+\xi)^{\beta-1}(\eta-t)^{\alpha-1}dt.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Теорема 3.1. *Решение задачи Коши с данными (3.2) и (3.3) для уравнения (1.1) в области G_- (3.1) выражается формулой (3.8) и оно единственно, если $\tau_-(\xi)\in C^2_{[-h,0]}$, $\nu_-(\xi)\in C^2_{[-h,0]}$, $a=\alpha$, $b=\beta$, $0<\alpha,\beta,\alpha+\beta<1$.*

Единственность решения следует из однозначной разрешимости всех уравнений, участвующих в процессе его нахождения. Чтобы доказать существование решения, нужно подставить функцию, определяемую формулой (3.8) в уравнение (1.1) при $a=\alpha$, $b=\beta$ и значениях ξ и η принадлежащих области G_-. В результате получим тождество.

Задача 3.2. *Для уравнения (1.1) при $a=-\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\beta,\alpha+\beta<1$ в области G_- (3.1) найти решение видоизменённой задачи Коши с данными (3.2) и*

$$\lim_{\xi+\eta\to+0}\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}(\xi+\eta)^{-\alpha-\beta}(\beta u_\xi+\alpha u_\eta)=\nu_-(\xi),\qquad \xi\in(-h,0). \tag{3.9}$$

Применим к функции, определяемой формулой (2.13) условие (3.2). Будем иметь

$$\tau_-(\xi) = -(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)\,\Phi_-(-\xi)\,\mathrm{B}(1-\alpha, 1-\beta).$$

Отсюда

$$\Phi_-(\xi) = -\mu_2\tau_-(-\xi), \tag{3.10}$$

где μ_2 определяется формулой (1.11).

Найдём частные производные первого порядка от функции, определяемой формулой (2.13)

$$\begin{aligned} u_\xi(\xi,\eta) = {} & (\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)\int\limits_0^1 \Phi'_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\beta}(1-s)^{1-\alpha}ds \\ & - \int\limits_0^1 \Phi'_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\beta}(1-s)^{-\alpha}\left[(\alpha+\beta)s-\alpha\right]ds \\ & + (\xi+\eta)\int\limits_0^1 \Phi''_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\beta}(1-s)^{1-\alpha}\left[(\alpha+\beta)s-\alpha\right]ds \\ & - \alpha(\xi+\eta)^{\alpha+\beta}\int\limits_0^1 \Psi_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta}ds, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} u_\eta(\xi,\eta) = {} & -(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)\int\limits_0^1 \Phi'_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{1-\beta}(1-s)^{-\alpha}ds \\ & - \int\limits_0^1 \Phi'_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\beta}(1-s)^{-\alpha}\left[(\alpha+\beta)s-\alpha\right]ds \\ & - (\xi+\eta)\int\limits_0^1 \Phi''_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{1-\beta}(1-s)^{-\alpha}\left[(\alpha+\beta)s-\alpha\right]ds \\ & - \beta(\xi+\eta)^{\alpha+\beta}\int\limits_0^1 \Psi_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{\alpha}(1-s)^{\beta-1}ds. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Применим к функции, определяемой формулой (2.13), условие (3.9), используя выражения (3.11) и (3.12). С этой целью найдём

$$\begin{aligned} \beta u_\xi + \alpha u_\eta = {} & (\alpha+\beta)^2\int\limits_0^1 \Phi'_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\beta}(1-s)^{-\alpha}\left[1-\beta-(2-\alpha-\beta)s\right]ds \\ & +(\alpha+\beta)^2(\xi+\eta)\int\limits_0^1 \Phi''_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{1-\beta}(1-s)^{1-\alpha}ds \\ & -\alpha\beta(\xi+\eta)\int\limits_0^1 \Phi''_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\beta}(1-s)^{-\alpha}ds \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$-\alpha\beta(\xi+\eta)^{\alpha+\beta}\int\limits_0^1 \Psi_-\left(-\xi+(\xi+\eta)\,s\right)s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}ds.$$

Проинтегрируем по частям второе слагаемое справа, взяв за $u=s^{1-\beta}(1-s)^{-\alpha}$, тогда

$$v=\frac{1}{\xi+\eta}\Phi'_-\left(-\xi+(\xi+\eta)\,s\right).$$

После того, как подставим получившееся выражение в равенство (3.13), будем иметь

$$\begin{aligned}\beta u_\xi+\alpha u_\eta = &-\alpha\beta\,(\xi+\eta)\int\limits_0^1 \Phi''_-\left(-\xi+(\xi+\eta)\,s\right)s^{-\beta}(1-s)^{-\alpha}ds\\ &-\alpha\beta(\xi+\eta)^{\alpha+\beta}\int\limits_0^1 \Psi_-\left(-\xi+(\xi+\eta)\,s\right)s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}ds.\end{aligned}$$

Но тогда

$$\lim_{\xi+\eta\to+0}\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}(\xi+\eta)^{-\alpha-\beta}\left(\beta u_\xi+\alpha u_\eta\right)=-\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\,\mathrm{B}\left(\alpha,\beta\right)\Psi_-\left(-\xi\right)=\nu_-\left(\xi\right).$$

Отсюда

$$\Psi_-\left(\xi\right)=-\mu_3\nu_-\left(-\xi\right), \tag{3.14}$$

где μ_3 определяется формулой (1.12).

Подставим выражения (3.10) и (3.14) в формулу (2.12). Получим

$$\begin{aligned}u\left(\xi,\eta\right)=&\mu_3\int\limits_{-\xi}^{\eta}\nu_-\left(-t\right)(t+\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{\beta}dt\\ &+\mu_1(\xi+\eta)^{\alpha+\beta-1}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\tau_-\left(-t\right)(t+\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{-\alpha}dt\\ &-\mu_2(\xi+\eta)^{\alpha+\beta-1}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\tau'_-\left(-t\right)(t+\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{-\alpha}\\ &\cdot\left[(\alpha+\beta)\,(t+\xi)-\alpha\,(\xi+\eta)\right]dt.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Теорема 3.2. *Решение видоизменённой задачи Коши с данными (3.2) и (3.9) для уравнения (1.1) в области G_- (3.1) выражается формулой (3.15) и оно единственно, если*

$$\tau_-\left(\xi\right)\in C^3_{[-h,0]},\quad \nu_-\left(\xi\right)\in C_{[-h,0]},\quad a=-\alpha,\quad b=-\beta,\quad 0<\alpha,\beta<1,\quad 0<\alpha+\beta<1.$$

Единственность решения следует из однозначной разрешимости всех уравнений, участвующих в процессе его нахождения. Чтобы доказать существование решения, нужно подставить функцию, определяемую формулой (3.15) в уравнение (1.1) при $a=-\alpha$, $b=-\beta$ и значениях ξ и η принадлежащих области G_-. В результате получим тождество.

Задача 3.3. *Для уравнения (1.1) при $a=\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\beta,\alpha-\beta<1$ в области G_- найти решение задачи Коши с данными (3.2) и*

$$\lim_{\xi+\eta\to+0}(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}\left(u_\xi+u_\eta\right)=\nu_-\left(\xi\right),\qquad \xi\in(-h,0). \tag{3.16}$$

Применим к формуле (2.16) условие (3.2), получим

$$\tau_-(\xi) = (\alpha-\beta)\,\mathrm{B}(\alpha, 1-\beta)\,\Phi_-(-\xi).$$

Отсюда

$$\Phi_-(\xi) = -\gamma_3\,\tau_-(-\xi), \tag{3.17}$$

где γ_3 определяется выражением (1.9).

Вычислим частные производные первого порядка от функции, определяемой формулой (2.16):

$$\begin{aligned} u_\xi(\xi,\eta) = &-(\alpha-\beta)\int\limits_0^1 \Phi'_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\beta}(1-s)^{\alpha}ds \\ &-\int\limits_0^1 \Phi'_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\beta}(1-s)^{\alpha}ds \\ &+(\xi+\eta)\int\limits_0^1 \Phi''_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\beta}(1-s)^{1+\alpha}ds \\ &-(1+\beta-\alpha)(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}\int\limits_0^1 \Psi_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\alpha}(1-s)^{\beta}ds \\ &+(\xi+\eta)^{1+\beta-\alpha}\int\limits_0^1 \Psi'_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\alpha}(1-s)^{\beta+1}ds, \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} u_\eta(\xi,\eta) = &(\alpha-\beta)\int\limits_0^1 \Phi'_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{1-\beta}(1-s)^{\alpha-1}ds \\ &-\int\limits_0^1 \Phi'_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\beta}(1-s)^{\alpha}ds \\ &-(\xi+\eta)\int\limits_0^1 \Phi''_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{1-\beta}(1-s)^{\alpha}ds \\ &-(1+\beta-\alpha)(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}\int\limits_0^1 \Psi_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{-\alpha}(1-s)^{\beta}ds \\ &-(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}\int\limits_0^1 \Psi'_-(-\xi+(\xi+\eta)s)\,s^{1-\alpha}(1-s)^{\beta}ds. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Аналогично тому, как это было сделано при решении задачи 3.2, применим к функции, определяемой формулой (2.16), условие (3.16), используя выражения (3.18) и (3.19). Получим

$$\nu_-(\xi) = -2(1+\beta-\alpha)\,\mathrm{B}(1-\alpha, 1+\beta)\,\Psi_-(-\xi),$$

откуда находим

$$\psi_-(\xi) = \gamma_4\,\nu_-(-\xi), \tag{3.20}$$

где γ_4 определяется формулой (1.10).

Подставим в формулу (2.15) выражения (3.17) и (3.20), будем иметь

$$
\begin{aligned}
u(\xi,\eta) = &-\gamma_4 \int\limits_{-\xi}^{\eta} \nu_-(-t)\,(t+\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta}dt \\
&-(\alpha-\beta)\,\gamma_3(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\tau_-(-t)\,(t+\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha-1}dt \\
&+\gamma_3(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\tau'_-(-t)\,(t+\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha}dt.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Теорема 3.3. *Решение задачи Коши с данными (3.2) и (3.16) для уравнения (1.1) в области G_- (3.1) выражается формулой (3.21) и оно единственно, если $\tau_-(\xi)\in C^2_{[-h,0]}$, $\nu_-(\xi)\in C^1_{[-h,0]}$, $a=\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\beta,\alpha-\beta<1$.*

Единственность решения следует из однозначной разрешимости всех уравнений, участвующих в процессе его нахождения. Чтобы доказать существование решения, нужно подставить функцию, определяемую формулой (3.21) в уравнение (1.1) при $a=\alpha$, $b=-\beta$ и значениях ξ и η принадлежащих области G_-. В результате получим тождество.

Задача 3.4. *Для уравнения (1.1) при $a=\alpha$, $b=-\beta$, $0<\alpha,\beta,\beta-\alpha<1$ в области G_- (3.1) найти решение видоизменённой задачи Коши с данными (3.2) и*

$$
\lim_{\xi+\eta\to+0}\frac{1}{\alpha-\beta}(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}\left(\beta u_\xi-\alpha u_\eta\right)=\nu_-(\xi), \qquad \xi\in(-h,0). \tag{3.22}
$$

Применим к функции, определяемой формулой (2.16), условие (3.22), используя выражения (3.18) и (3.19). Получим

$$
\nu_-(\xi)=(1+\beta-\alpha)\,\mathrm{B}\,(1-\alpha,1+\beta)\,\Psi_-(-\xi).
$$

Отсюда

$$
\psi_-(\xi)=-2\gamma_4\,\nu_-(-\xi), \tag{3.23}
$$

где γ_4 определяется формулой (1.10).

Подставив в формулу (2.15) выражения (3.17) и (3.23), придём к решению задачи 3.4:

$$
\begin{aligned}
u(\xi,\eta) = &2\gamma_4 \int\limits_{-\xi}^{\eta} \nu_-(-t)\,(t+\xi)^{-\alpha}(\eta-t)^{\beta}dt \\
&-(\alpha-\beta)\,\gamma_3(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\tau_-(-t)\,(t+\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha-1}dt \\
&+\gamma_3(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\tau'_-(-t)\,(t+\xi)^{-\beta}(\eta-t)^{\alpha}dt.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Теорема 3.4. *Решение видоизменённой задачи Коши с данными (3.2) и (3.22) для уравнения (1.1) в области G_- (3.1) выражается формулой (3.24) и оно единственно, если*

$$
\tau_-\in C^2_{[-h,0]},\quad \nu_-\in C^1_{[-h,0]},\quad a=\alpha,\quad b=-\beta,\quad 0<\alpha,\beta<1,\quad 0<\beta-\alpha<1.
$$

Единственность решения следует из однозначной разрешимости всех уравнений, участвующих в процессе его нахождения. Чтобы доказать существование решения, нужно подставить функцию, определяемую формулой (3.24) в уравнение (1.1) при $a = \alpha$, $b = -\beta$ и значениях ξ и η принадлежащих области G_-. В результате получим тождество.

Задача 3.5. *Для уравнения (1.1) при $a = -\alpha$, $b = \beta$, $0 < \alpha, \beta, \beta - \alpha < 1$ в области*

$$G_+ = \{(\xi, \eta) |\, 0 < \xi < \eta < h\} \tag{3.25}$$

найти решение задачи Коши с данными (1.5) и

$$\lim_{\eta - \xi \to +0} (\eta - \xi)^{\beta - \alpha} (u_\xi - u_\eta) = \nu_+ (\xi), \qquad \xi \in (0, h). \tag{3.26}$$

Применим к функции, определяемой формулой (2.21), условие (1.5). Получим

$$\tau_+ (\xi) = (\beta - \alpha)\, \Phi_+ (\xi)\, \mathrm{B} (\beta, 1 - \alpha).$$

Отсюда

$$\Phi_+ (\xi) = \gamma_5\, \tau_+ (\xi), \tag{3.27}$$

где

$$\gamma_5 = \frac{1}{(\beta - \alpha)\, \mathrm{B} (1 - \alpha, \beta)}. \tag{3.28}$$

Найдём частные производные от функции, определяемой формулой (2.21):

$$\begin{aligned} u_\xi (\xi, \eta) = (\beta - \alpha) \int\limits_0^1 \Phi'_+ (\xi + (\eta - \xi)\, s)\, s^{\beta - 1} (1 - s)^{1 - \alpha} ds \\ - \int\limits_0^1 \Phi'_+ (\xi + (\eta - \xi)\, s)\, s^{\beta} (1 - s)^{-\alpha} ds \\ + (\eta - \xi) \int\limits_0^1 \Phi''_+ (\xi + (\eta - \xi)\, s)\, s^{\beta} (1 - s)^{1 - \alpha} ds \\ - (1 + \alpha - \beta)\, (\eta - \xi)^{\alpha - \beta} \int\limits_0^1 \Psi_+ (\xi + (\eta - \xi)\, s)\, s^{\alpha} (1 - s)^{-\beta} ds \\ + (\eta - \xi)^{1 + \alpha - \beta} \int\limits_0^1 \Psi'_+ (\xi + (\eta - \xi)\, s)\, s^{\alpha} (1 - s)^{1 - \beta} ds, \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$u_\eta(\xi,\eta) = (\beta-\alpha)\int\limits_0^1 \Phi'_+(\xi+(\eta-\xi)s)\, s^\beta (1-s)^{-\alpha} ds$$
$$+\int\limits_0^1 \Phi'_+(\xi+(\eta-\xi)s)\, s^\beta (1-s)^{-\alpha} ds$$
$$+(\eta-\xi)\int\limits_0^1 \Phi''_+(\xi+(\eta-\xi)s)\, s^{\beta+1} (1-s)^{-\alpha} ds \tag{3.30}$$
$$+(1+\alpha-\beta)(\eta-\xi)^{\alpha-\beta}\int\limits_0^1 \Psi_+(\xi+(\eta-\xi)s)\, s^{\alpha} (1-s)^{-\beta} ds$$
$$+(\eta-\xi)^{1+\alpha-\beta}\int\limits_0^1 \Psi'_+(\xi+(\eta-\xi)s)\, s^{\alpha+1} (1-s)^{-\beta} ds.$$

Аналогично тому, как это было сделано в задаче 3.2, применим к функции, определяемой формулой (2.21), условие (3.26), используя выражения (3.29) и (3.30). Получим
$$\nu_+(\xi) = -2(1+\alpha-\beta)\,\Psi_+(\xi)\,\mathrm{B}(1+\alpha,1-\beta).$$

Отсюда
$$\Psi_+(\xi) = -\gamma_6\,\nu_+(\xi), \tag{3.31}$$
где
$$\gamma_6 = \frac{1}{2(1+\alpha-\beta)\,\mathrm{B}(1+\alpha,1-\beta)}. \tag{3.32}$$

Подставим выражения (3.27) и (3.31) в формулу (2.20). Будем иметь
$$u(\xi,\eta) = -\,\gamma_6\int\limits_\xi^\eta \nu_+(t)\,(t-\xi)^\alpha(\eta-t)^{-\beta}dt$$
$$+(\beta-\alpha)\,\gamma_5(\eta-\xi)^{\alpha-\beta}\int\limits_\xi^\eta \tau_+(t)\,(t-\xi)^{\beta-1}(\eta-t)^{-\alpha}dt \tag{3.33}$$
$$+\gamma_5(\eta-\xi)^{\alpha-\beta}\int\limits_\xi^\eta \tau'_+(t)\,(t-\xi)^{\beta}(\eta-t)^{-\alpha}dt.$$

Теорема 3.5. *Решение задачи Коши с данными (1.5) и (3.26) для уравнения (1.1) в области G_+ (3.25) выражается формулой (3.33) и оно единственно, если $\tau_+ \in C^2_{[0,h]}$, $\nu_+ \in C^1_{[0,h]}$, $a=-\alpha$, $b=\beta$, $0<\alpha,\beta,\beta-\alpha<1$.*

Единственность решения следует из однозначной разрешимости всех уравнений, участвующих в процессе его нахождения. Чтобы доказать существование решения, нужно подставить функцию, определяемую формулой (3.33) в уравнение (1.1) при $a=-\alpha$, $b=\beta$ и значениях ξ и η принадлежащих области G_+. В результате получим тождество.

Задача 3.6. *Для уравнения (1.1) при $a=-\alpha$, $b=\beta$, $0<\alpha,\beta,\alpha-\beta<1$ в области G_+ (3.25) найти решение видоизменённой задачи Коши с данными (1.5) и*
$$\lim_{\eta-\xi\to+0}\frac{1}{\alpha-\beta}(\eta-\xi)^{\beta-\alpha}\left(\beta u_\xi+\alpha u_\eta\right) = \nu_+(\xi), \qquad \xi\in(0,h). \tag{3.34}$$

Применим к функции, определяемой формулой (2.21), условие (3.34), используя выражения (3.29) и (3.30). Получим

$$\nu_+(\xi) = (1+\alpha-\beta)\,\Psi_+(\xi)\,\mathrm{B}\,(1+\alpha, 1-\beta)\,.$$

Отсюда

$$\Psi_+(\xi) = 2\gamma_6\,\nu_+(\xi)\,, \tag{3.35}$$

где γ_6 определяется формулой (3.32).

Подставим выражения (3.27) и (3.35) в формулу (2.20). Будем иметь

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) =&2\gamma_6\int\limits_{\xi}^{\eta}\nu_+(t)\,(t-\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}dt \\ &+(\beta-\alpha)\,\gamma_5(\eta-\xi)^{\alpha-\beta}\int\limits_{\xi}^{\eta}\tau_+(t)\,(t-\xi)^{\beta-1}(\eta-t)^{-\alpha}dt \\ &+\gamma_5(\eta-\xi)^{\alpha-\beta}\int\limits_{\xi}^{\eta}\tau'_+(t)\,(t-\xi)^{\beta}(\eta-t)^{-\alpha}dt. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Теорема 3.6. *Решение видоизменённой задачи Коши с данными (1.5) и (3.34) для уравнения (1.1) в области G_+ (3.25) выражается формулой (3.36) и оно единственно, если*

$$\tau_+(\xi) \in C^2_{[0,h]},\quad \nu_+(\xi)\in C^1_{[0,h]},\quad a=-\alpha,\quad b=\beta,\quad 0<\alpha,\beta<1,\quad 0<\alpha-\beta<1.$$

Единственность решения следует из однозначной разрешимости всех уравнений, участвующих в процессе его нахождения. Чтобы доказать существование решения, нужно подставить функцию, определяемую формулой (3.36) в уравнение (1.1) при $a=-\alpha$, $b=\beta$ и значениях ξ и η принадлежащих области G_+. В результате получим тождество.

Задача 3.7. *Для уравнения (1.1) при $a=-\alpha$, $b=\beta$, $0<\alpha,\beta,\beta-\alpha<1$ в области G_- (3.1) найти решение задачи Коши с данными (3.2) и*

$$\lim_{\xi+\eta\to+0}(\xi+\eta)^{\beta-\alpha}\,(u_\xi+u_\eta) = \nu_-(\xi)\,, \xi\in(-h,0)\,. \tag{3.37}$$

К функции, определяемой формулой (2.24), применим условие (3.2). Получим

$$\tau_-(\xi) = (\beta-\alpha)\,\mathrm{B}\,(\beta,1-\alpha)\,\Phi_-(-\xi)\,.$$

Отсюда

$$\Phi_-(\xi) = \gamma_5\,\tau_-(-\xi)\,, \tag{3.38}$$

где γ_5 определяется формулой (3.28).

Вычислим частные производные первого порядка от функции, определяемой формулой (2.24)

$$
\begin{aligned}
u_\xi(\xi,\eta) = &-(\beta-\alpha)\int\limits_0^1 \Phi'_-\left(-\xi+(\xi+\eta)\,s\right)s^{\beta-1}(1-s)^{1-\alpha}ds \\
&-\int\limits_0^1 \Phi'_-\left(-\xi+(\xi+\eta)\,s\right)s^{\beta}(1-s)^{-\alpha}ds \\
&+(\xi+\eta)\int\limits_0^1 \Phi''_-\left(-\xi+(\xi+\eta)\,s\right)s^{\beta}(1-s)^{1-\alpha}ds \\
&-(1+\alpha-\beta)\,(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}\int\limits_0^1 \Psi_-\left(-\xi+(\xi+\eta)\,s\right)s^{\alpha}(1-s)^{-\beta}ds \\
&+(\xi+\eta)^{1+\alpha-\beta}\int\limits_0^1 \Psi'_-\left(-\xi+(\xi+\eta)\,s\right)s^{\alpha}(1-s)^{1-\beta}ds,
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

$$
\begin{aligned}
u_\eta(\xi,\eta) = &(\beta-\alpha)\int\limits_0^1 \Phi'_-\left(-\xi+(\xi+\eta)\,s\right)s^{\beta}(1-s)^{-\alpha}ds \\
&-\int\limits_0^1 \Phi'_-\left(-\xi+(\xi+\eta)\,s\right)s^{\beta}(1-s)^{-\alpha}ds \\
&-(\xi+\eta)\int\limits_0^1 \Phi''_-\left(-\xi+(\xi+\eta)\,s\right)s^{1+\beta}(1-s)^{-\alpha}ds \\
&-(1+\alpha-\beta)\,(\xi+\eta)^{\alpha-}\beta\int\limits_0^1 \Psi_-\left(-\xi+(\xi+\eta)\,s\right)s^{\alpha}(1-s)^{-\beta}ds \\
&-(\xi+\eta)^{1+\alpha-\beta}\int\limits_0^1 \Psi'_-\left(-\xi+(\xi+\eta)\,s\right)s^{1+\alpha}(1-s)^{-\beta}ds.
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Применим к функции, определяемой формулой (2.24), условие (3.37), используя выражения (3.39) и (3.40). Получим

$$\nu_-(\xi) = -2\,(1+\alpha-\beta)\,\mathrm{B}\,(1+\alpha,1-\beta)\,\Psi_-(-\xi)\,.$$

Отсюда

$$\Psi_-(\xi) = -\gamma_6\,\nu_-(-\xi)\,, \tag{3.41}$$

где γ_6 определяется формулой (3.32).

Подставим в формулу (2.23) выражения (3.38) и (3.41). Будем иметь

$$\begin{aligned}u(\xi,\eta) =&\gamma_6 \int\limits_{-\xi}^{\eta} \nu_-(-t)(t+\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}dt \\ &+(\beta-\alpha)\gamma_5(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\tau_-(-t)(t+\xi)^{\beta-1}(\eta-t)^{-\alpha}dt \\ &+\gamma_5(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\tau'_-(-t)(t+\xi)^{\beta}(\eta-t)^{-\alpha}dt.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Теорема 3.7. *Решение задачи Коши с данными (3.2) и (3.37) для уравнения (1.1) в области G_- (3.1) выражается формулой (3.42) и оно единственно, если $\tau_- \in C^2_{[-h,0]}$, $\nu_- \in C^1_{[-h,0]}$, $a=-\alpha$, $b=\beta$, $0<\alpha,\beta,\beta-\alpha<1$.*

Единственность решения следует из однозначной разрешимости всех уравнений, участвующих в процессе его нахождения. Чтобы доказать существование решения, нужно подставить функцию, определяемую формулой (3.42) в уравнение (1.1) при $a=-\alpha$, $b=\beta$ и значениях ξ и η принадлежащих области G_-. В результате получим тождество.

Задача 3.8. *Для уравнения (1.1) при $a=-\alpha$, $b=\beta$, $0<\alpha,\beta,\alpha-\beta<1$ в области G_- (3.1) найти решение видоизменённой задачи Коши с данными (3.2) и*

$$\lim_{\xi+\eta\to+0}\frac{1}{\alpha-\beta}(\eta-\xi)^{\beta-\alpha}\left(\beta u_\xi-\alpha u_\eta\right)=\nu_-(\xi)\,, \qquad \xi\in(-h,0)\,. \tag{3.43}$$

Применим к функции, определяемой формулой (2.24), условие (3.43). Получим

$$\nu_-(\xi)=(1+\alpha-\beta)\,\mathrm{B}\,(1+\alpha,1-\beta)\,\Psi_-(-\xi)\,.$$

Отсюда

$$\Psi_-(\xi)=2\gamma_6\,\nu_-(-\xi)\,, \tag{3.44}$$

где γ_6 определяется формулой (3.32).

Подставим в формулу (2.23) выражения (3.38) и (3.44). Будем иметь:

$$\begin{aligned}u(\xi,\eta) =&-2\gamma_6 \int\limits_{-\xi}^{\eta} \nu_-(-t)(t+\xi)^{\alpha}(\eta-t)^{-\beta}dt \\ &+(\beta-\alpha)\gamma_5(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\tau_-(-t)(t+\xi)^{\beta-1}(\eta-t)^{-\alpha}dt \\ &+\gamma_5(\xi+\eta)^{\alpha-\beta}\int\limits_{-\xi}^{\eta}\tau'_-(-t)(t+\xi)^{\beta}(\eta-t)^{-\alpha}dt.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Теорема 3.8. *Решение видоизменённой задачи Коши с данными (3.2) и (3.43) для уравнения (1.1) в области G_- (3.1) выражается формулой (3.45) и оно единственно, если*

$$\tau_-\in C^2_{[-h,0]}, \quad \nu_-\in C^1_{[-h,0]}, \quad a=-\alpha, \quad b=\beta, \quad 0<\alpha,\beta<1, \quad 0<\alpha-\beta<1.$$

Единственность решения следует из однозначной разрешимости всех уравнений, участвующих в процессе его нахождения. Чтобы доказать существование решения, нужно подставить функцию, определяемую формулой (3.45) в уравнение (1.1) при $a=-\alpha$, $b=\beta$ и значениях ξ и η принадлежащих области G_-. В результате получим тождество.

Заключение

В настоящей статье решена серия задач для уравнения Эйлера — Дарбу с двумя линиями вырождения (1.1) в характеристических координатах в областях G_+ (3.25) и G_- (3.1). В области G_+ (3.25) уравнение (1.1) эквивалентно уравнению Эйлера — Дарбу. Первые четыре задачи для уравнения Эйлера — Дарбу, подобные решённым в статье, были решены Волкодавовым и Николаевым [3]. Их условия и соответствующие теоремы существования и единственности приведены во введении к статье.

В первой теоретической части работы были выведены общие решения для уравнения Эйлера — Дарбу в случаях, не рассмотренных ранее, а также для уравнения, которое является образом уравнения Эйлера — Дарбу относительно оси η. Последнее уравнение является эквивалентом уравнения Эйлера — Дарбу в области G_- (3.1). Вторая теоретическая часть посвящена непосредственно решению задач Коши и видоизменённых задач Коши для тех значений параметров, для которых было найдено общее решение уравнения (1.1) в предыдущей части.

Заметим, что заданные области ограничены линией $\eta = h$, где h — произвольное действительное число. При стремлении h к бесконечности треугольники G_+ (3.26) и G_- (3.1) становятся бесконечными (неограниченными сверху).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. Риман. *Сочинения.* М.: Гостехиздат. 1948.
2. В.В. Соколовский. *Теория пластичности.* М.: Высшая школа. 1969.
3. В.Ф. Волкодавов, Н.Я. Николаев. *Краевые задачи для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу: учебное пособие к спецкурсу «Уравнения математической физики».* Куйбышев: КГПИ. 1984.
4. В.Ф. Волкодавов, В.В. Пергунов. *Краевая задача для уравнения Эйлера — Дарбу с отрицательными параметрами в неограниченной области. Часть II. Теорема существования решения задачи.* В сб.: *Дифференциальные уравнения.* Рязань: Рязанский гос. пед. ин-т им. С. А. Есенина. с. 20 (1981).
5. О.Г. Аристова. *Краевые задачи для одного уравнения гиперболического типа с вырождением на нехарактеристической кривой* // В сб.: *Третья международная научная конференция им. академика М. Кравчука.* Киев: Киевский ордена Ленина государственный университет имени Т. Г. Шевченко. с. 3 (1994).
6. Р.С. Хайруллин. *К теории уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу* // Изв. высш. учебн. завед., мат. **1993**:11, 69–76 (1993).
7. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции. Т.1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра.* М.: Наука. 1965.
8. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М.: Физматгиз. 1962.
9. В.Ф. Волкодавов, Н.Я. Николаев. *О новый задаче со смещением в неограниченной области для уравнения Эйлера — Дарбу с положительными параметрами* // В сб.: *Математическая физика.* Куйбышев: КПтИ. 3–9 (1979).

Светлана Владимировна Подклетнова,
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский
университет имени академика С.П. Королева»,
Московское шоссе, 34,
443086, г. Самара, Россия
E-mail: podkletnova.sv@ssau.ru