ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 4 (2024). С. 53-76.

УДК 517.956.2

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕРОЗНАЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Ф.Х. МУКМИНОВ, О.С. СТЕХУН

Аннотация. Во внешности шара в пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматриваются задачи Зарембы и Неймана для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с мерозначным потенциалом. Доказаны существование и единственность энтропийного решения задач Зарембы и Неймана.

Ключевые слова: нелинейное эллиптическое уравнение, энтропийное решение, мера Радона, класс Морри, задача Зарембы

Mathematics Subject Classification: 35J62, 35J25, 35A01, 35A02, 35D99

1. Введение

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| > r_0\}$ — внешность шара, $n \geqslant 2$, $\Gamma \subset \partial\Omega$ — замкнутое подмножество границы, возможно пустое. В настоящей работе доказывается существование энтропийного решения внешней задачи Зарембы для уравнения

$$-\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + b_0(x,u,\nabla u) + b_1(x,u)\mu = f, \quad f \in L_1(\Omega),$$

где μ — неотрицательная мера Радона. На Γ ставится условие Дирихле: $u(x) = 0$ при $x \in \Gamma$. На остальной части границы $\partial\Omega \setminus \Gamma$ ставится условие Неймана: $a(x,u,\nabla u)\cdot x = 0$ при $x \in \partial\Omega \setminus \Gamma$. При пустом Γ имеем задачу Неймана. Единственность энтропийного решения доказывается при дополнительных предположениях.

Понятие энтропийного решения задачи Дирихле было предложено в работе [1]. В ней в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ (необязательно ограниченной) рассматривается эллиптическое уравнение с L_1–данными

$$-\operatorname{div}(a(x,\nabla u)) = f(x,u), \qquad \sup_{|u|<c} |f(x,u)| \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \quad c > 0.$$

На функцию a накладываются некоторые условия ограниченности, монотонности и коэрцитивности. Доказаны существование и единственность энтропийного решения задачи Дирихле.

После этой работы изучение энтропийных решений с конца прошлого столетия стало объектом исследования многих зарубежных и российских математиков.

Мотивацией нашего исследования стала недавняя работа [2]. В ней была рассмотрена задача в ограниченной области

$$-\Delta u + \mu g(u) = \sigma, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Установлены существование и единственность очень слабого решения задачи при некоторых ограничениях на функцию g, меру Радона σ и неотрицательную меру μ из класса Морри.

F.Kh. Mukminov, O.S. Stekhun, Existence and uniqueness of solutions to outer Zaremba problem for elliptic equations with measure–valued potential.

Поступила 18 апреля 2024 г.

Отметим, что энтропийным решениям задачи Дирихле в неограниченной области посвящено мало работ. Энтропийные решения задачи Зарембы или Неймана в неограниченной области до сих пор не рассматривались.

В [3] для уравнения с мерой Радона σ

$$-\operatorname{div}(a(x,\nabla u)) + a_0(x,u) = \sigma,$$

установлены существование и единственность ренормализованного решения задачи Дирихле для произвольной области Ω. С нашей точки зрения, одно из условий этой работы

$$a_0(x,s)s \geqslant c|s|^p, \qquad s\in\mathbb{R}, \tag{1.1}$$

можно ослабить.

В работе [4] установлена эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений нелинейной эллиптической задачи в пространствах Музилака — Орлича. В [5] в неограниченной области рассматривается задача Дирихле

$$-\operatorname{div} a(x,u,\nabla u) + M(x,u)/u + b(x,u,\nabla u) = \sigma, \qquad u\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

где функции a, b имеют рост, определяемый обобщенной N–функцией $M(x,u)$, а ограниченная мера Радона σ имеет специальный вид. Предполагалось выполнение неравенства $b(x,u,\nabla u)u \geq 0$. Доказано существование энтропийного решения. Важно, что результат установлен без Δ_2–условий на M, $\overline{M}$.

В работе [6] в ограниченной области Q рассматривается задача с краевым условием Фурье:

$$b(u) - \operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) = f, \quad x\in Q; \qquad (a(x,u,\nabla u),\mathbf{n}) + \lambda u = g, \quad x\in\partial Q.$$

Функция $a(x,u,y)$ предполагается липшицевой по u. Оператор $\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u))$, в частности, может быть $p(u)$–лапласcианом. Доказаны существование и единственность энтропийного решения задачи. Единственность доказывается при априорном предположении, что энтропийное решение задачи удовлетворяет условию Липшица.

В работе [7] в гиперболическом пространстве рассматривается задача Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения второго порядка с сингулярным мерозначным потенциалом. Ограничения на структуру уравнения формулируются в терминах обобщенной N–функции. Доказано существование энтропийного решения задачи. Более подробный обзор работ по энтропийным и ренормализованным решениям можно найти в [5].

Как известно, пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ можно пополнять как по норме

$$\left(\int |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

так и по норме $\left(\int(|u|^p + |\nabla u|^p)dx\right)^{\frac{1}{p}}$, причем, во втором случае получается более узкое пространство $W_p^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}_p^1(\mathbb{R}^n)$. Обычно, например, в работах [3], [5] идут по второму пути. При рассмотрении задачи в неограниченной области это приводит к завышенным требованиям вида (1.1) или аналогичным. В настоящей работе используется пространство $\mathcal{H}_p^1(\Omega)$ первого типа.

Результаты настоящей работы верны и для некоторых областей, не являющихся внешними к шару. Но тогда пришлось бы формулировать требования на множество Γ в зависимости от конфигурации области. А это уже отдельная задача, которую мы здесь не рассматриваем.

2. Постановка задачи и основные результаты

Хорошо известно, что пространство $L_p(\Omega)$ при $p > 1$ сепарабельное и рефлексивное. В дальнейшем число $p \in (1, n)$ будем считать фиксированным.

Пусть $\mathcal{D}_\Gamma(\Omega)$ состоит из сужений на Ω функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, равных нулю в окрестности Γ.

Пространство $\mathcal{H}^1_p(\Omega)$ определим как пополнение пространства функций $\mathcal{D}_\Gamma(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{p,1} = \||\nabla u|\|_{L_p(\Omega)} = \|u\|_V.$$

Для краткости это пространство будем обозначать через V. Сопряженное к V пространство с индуцированной нормой обозначим через V^*. Действие функционалов l на элементах из V будем обозначать в угловых скобках: $\langle l, v\rangle$.

Будем рассматривать оператор вида

$$\mathcal{B}u = b_0(x, u, \nabla u) + b_1(x, u)\mu,$$

где μ — неотрицательная мера Радона. Предполагается, что оператор $\mathcal{B}u$ при $u, v \in \mathcal{D}_\Gamma(\Omega)$ действует по формуле

$$\langle \mathcal{B}u, v\rangle = \int\limits_\Omega b_0(x, u, \nabla u) v dx + \int\limits_\Omega b_1(x, u) v d\mu.$$

Корректность этой формулы при некоторых условиях на функции b_0, b_1 устанавливается ниже.

Результаты устанавливаются для уравнения

$$-\operatorname{div}(a(x, u, \nabla u)) + \mathcal{B}u = f, \quad f \in L_1(\Omega). \tag{2.1}$$

В работе доказывается существование энтропийного решения задач Зарембы и Неймана для этого уравнения. При дополнительных условиях устанавливается единственность решения.

Пусть μ — мера Радона с конечной полной вариацией и носителем, лежащим в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$. Будем считать, что мера продолжена нулем вне Q. Напомним, что μ принадлежит классу Морри $\mathbb{M}_s(Q)$, $s \geqslant 1$, если для любого шара с центром в x выполнено неравенство

$$|B_r(x)|_\mu := \int\limits_{B_r(x)} d|\mu| \leqslant c r^{n(1-1/s)}, \quad r > 0, \quad x \in Q.$$

В других обозначениях, $\mu \in \mathbb{M}_{\frac{n}{n-\theta}}(Q)$, при $\theta \in [0, n]$, $\theta = n(1 - 1/s)$, если

$$\int\limits_{B_r(x)} d|\mu| \leqslant c r^\theta.$$

Легко видеть, что дельта–функция δ принадлежит классу $\mathbb{M}_1(Q)$. Функции из $L_s(Q)$, в силу неравенства Гельдера, определяют меру из класса $\mathbb{M}_s(Q)$. Если

$$f \in L_q(\Omega \cap \{x^1 = \ldots = x^k = 0\}), \quad x' = (0, \ldots, 0, x^{k+1}, \ldots, x^n),$$

то для $d\mu = f(x)dx'$ имеем

$$\int\limits_{B_r(x_0)} |f(x)| dx' \leqslant \|f\|_q \left(\int\limits_{B_r(x_0) \cap \{x^1 = \ldots = x^k = 0\}} dx' \right)^{1-1/q} \leqslant c r^{(n-k)(1-1/q)},$$

и эта функция также определяет некоторую меру из класса Морри с носителем на плоскости размерности $n - k$.

Введем обозначение $\mathfrak{B}_r = \{x \in \Omega : \ |x| < r\}$, $r > r_0$.

Будем предполагать, что существует число $\widehat{s} > \frac{np}{np+p-n}$ такое, что

$$\mu \in \mathbb{M}_{\widehat{s}}(\mathfrak{B}_r), \ \forall\ r > r_0. \tag{2.2}$$

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\widehat{\theta} = n(1 - 1/\widehat{s})$. Известно компактное вложение при $q < \frac{\widehat{\theta}p}{n-p}$ для неотрицательной меры $\mu \in \mathbb{M}_{\widehat{s}}(Q)$:

$$W_p^1(Q) \hookrightarrow L_{q,\mu}(Q). \tag{2.3}$$

В частности, элементы пространства $W_p^1(Q)$ являются μ–измеримыми функциями. Это частный случай более общего утверждения [2, Proposition 2.5]. В случае меры Лебега компактным является вложение

$$W_p^1(Q) \hookrightarrow L_{q_0}(Q),$$

при $q_0 < \frac{np}{n-p}$.

Векторное поле $a(x, u, \nabla u)$ в (2.1) удовлетворяет при $x \in \Omega$ условиям ограниченности с возрастающей функцией $g(s)$, $s \geqslant 0$ и функцией $G \in L_1(\Omega)$

$$|a(x, r, y)|^{p'} \leqslant g(|r|)(G(x) + |y|^p), \quad r \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{2.4}$$

коэрцитивности

$$a(x, r, y) \cdot y \geqslant c_0|y|^p - G(x), \quad r \in \mathbb{R}, \quad c_0 > 0, \tag{2.5}$$

монотонности

$$(a(x, r, y) - a(x, r, z))(y - z) > 0, \quad y \neq z, \quad y, z \in \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega. \tag{2.6}$$

Кроме того, пусть каратеодориевая функция b_0 и μ–каратеодориевая функция b_1 удовлетворяют неравенствам:

$$|b_0(x, s, y)| \leqslant g(r)(\widetilde{G}_0(x) + |y|^p), \quad |s| \leqslant r, \quad |x| \leqslant r; \quad \forall r \geqslant 0, \tag{2.7}$$

$$|b_1(x, s)| \leqslant g(r)\widetilde{G}_1(x), \quad |s| \leqslant r, \quad |x| \leqslant r, \quad \forall r \geqslant 0, \tag{2.8}$$

где $\widetilde{G}_0 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{G}_1 \in L_{1,\mu,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$;

$$b_0(x, r, y)r \geqslant 0, \quad b_1(x, r)r \geqslant 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Определим функцию

$$T_k(r) = \begin{cases} k & \text{при } r > k, \\ r & \text{при } |r| \leqslant k, \\ -k & \text{при } r < -k. \end{cases}$$

Через $\mathcal{T}_p^1(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in V$ при любом $k > 0$.

Определение 2.1. *Энтропийным решением задачи Зарембы для уравнения* (2.1) *называется функция $u \in \mathcal{T}_p^1(\Omega)$ такая, что при всех $k > 0$, $\xi \in \mathcal{D}_\Gamma(\Omega)$ корректно неравенство*

$$\int\limits_\Omega (a(x, u, \nabla u)\nabla T_k(u - \xi) - fT_k(u - \xi))dx + \langle \mathcal{B}u, T_k(u - \xi)\rangle \leqslant 0, \tag{2.10}$$

то есть слагаемые в нем должны быть конечными.

Одним из основных результатов работы является

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (2.2)–(2.9), *тогда существует энтропийное решение задачи Зарембы для уравнения* (2.1).

Единственность энтропийного решения установлена при дополнительных ограничениях. Пусть каратеодориевая функция b_0 и μ–каратеодориевая функция b_1 удовлетворяют неравенствам:

$$|b_0(x,s)| \leqslant \widehat{G}_0(x), \quad |s| \leqslant 1, \quad x \in \Omega; \tag{2.11}$$

$$|b_1(x,s)| \leqslant \widehat{G}_1(x), \quad |s| \leqslant 1, \quad x \in \Omega; \tag{2.12}$$

где $\widehat{G}_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{G}_1 \in L_{1,\mu}(\mathbb{R}^n)$. В следующей теореме условие (2.4) используется с $g(r) = C > 0$.

Теорема 2.2. *Пусть $a = a(x,y)$ и функции $b_i(x,s)$, $i = 0,1$ возрастают по s и выполнены неравенства (2.11), (2.12). Пусть u_1, u_2 — энтропийные решения задачи Зарембы для уравнения (2.1). Если выполнены условия (2.2)–(2.6), (2.9), то $u_1 = u_2$.*

Отметим, что нам не известны работы, в которых доказывается единственность энтропийного решения задачи Дирихле или Неймана для эллиптического уравнения в неограниченной области, в котором поток a явно зависит от искомой функции u.

3. Технические леммы

Лемма 3.1. *Пусть $v^j \geq 0$, $j \in \mathbb{N}$, — измеримые неотрицательные функции в области Q (не обязательно ограниченной) такие, что*

$$v^j \to v \quad \text{п.в. в} \quad Q, \quad j \to \infty,$$

и сходятся интегралы

$$\int\limits_Q v^j(x)dx \to \int\limits_Q v(x)dx, \quad j \to \infty.$$

Тогда

$$v^j \to v \quad \text{сильно в} \quad L_1(Q), \quad j \to \infty.$$

Доказательство. Очевидно равенство

$$\int\limits_Q |v^j(x) - v(x)|dx = \int\limits_Q (v^j(x) - v(x))dx + 2 \int\limits_{x \in Q: v(x) > v^j(x)} (v(x) - v^j(x))dx.$$

Последний из интегралов стремится к нулю по теореме Лебега. Лемма доказана. □

Лемма 3.2. *Существует $h(r)$ — неотрицательная возрастающая функция такая, что выполнено неравенство*

$$\|u\|_{W^1_p(\mathfrak{B}_r)} \leqslant h(r)\|u\|_V, \quad r > r_0, \quad \forall u \in V. \tag{3.1}$$

Доказательство. Достаточно установить неравенство для $u \in \mathcal{D}_\Gamma(\Omega)$. Очевидно неравенство

$$\|\nabla u\|_{p,\mathfrak{B}_r} \leqslant \|u\|_V. \tag{3.2}$$

Поэтому непрерывным будет вложение

$$V \hookrightarrow W^1_p(\mathfrak{B}_r),$$

и выполнено неравенство (3.1). В самом деле, если оператор этого вложения не ограничен на $\mathcal{D}_\Gamma(\Omega)$, то найдется последовательность гладких функций v^k таких, что

$$\|v^k\|_{W^1_p(\mathfrak{B}_R)} \geqslant k\|v^k\|_V.$$

Умножая обе стороны неравенства на подходящий множитель, приводим его к виду

$$1 \geqslant k\|v^k\|_V, \tag{3.3}$$

где $\|v^k\|_{W_p^1(\mathfrak{B}_r)} = 1$. В силу (3.3), имеем

$$\|v^k\|_V \to 0.$$

По теореме Кондрашова, v^k сильно сходится в $L_p(\mathfrak{B}_r)$. С учетом (3.2), устанавливаем сходимость $v^k \to C \neq 0$ в пространстве $W_p^1(\mathfrak{B}_r)$. Можно считать также, что $v^k \to C = C(r)$ почти всюду в $\mathfrak{B}_r$. Чтобы получить противоречие, рассмотрим последовательность $\widehat{v}^k = v^k\zeta(|x| - r_0)$, где $\zeta(t) = \min(1, \max(0, t))$. Так как $\operatorname{supp}\widehat{v}^k \subset \overline{\Omega}$, то по неравенству Соболева — Гальярдо — Ниренберга

$$\|\widehat{v}^k\|_{L_{p^*}(\Omega)} \leqslant \alpha(p,n)\|\nabla\widehat{v}^k\|_{L_p(\Omega)}; \quad p^* = \frac{np}{n-p}. \tag{3.4}$$

Имеем неравенство

$$\|\widehat{v}^k\|_{L_{p^*}(\Omega)} \geqslant \|v^k\|_{L_{p^*}(\mathfrak{B}_r\setminus\mathfrak{B}_{r_0+1})} \to |C|\operatorname{mes}^{1/p^*}(\mathfrak{B}_r \setminus \mathfrak{B}_{r_0+1}).$$

С другой стороны, сходимость $\|v^k\|_{L_p(\mathfrak{B}_r)} \to 1$ влечет сходимость $|v^k|^p \to |C|^p$ в $L_1(\mathfrak{B}_r)$ (см. лемму 3.1), тогда

$$\|\nabla\widehat{v}^k\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \|v^k\nabla\zeta(|x|-r_0)\|_{L_p(\mathfrak{B}_{r_0+1})} + \|\nabla v^k\|_{L_p(\Omega)} \to |C|\alpha_1(p,n).$$

Последние два неравенства противоречат (3.4) при больших k и r. □

Отметим, что для функций $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ справедливо неравенство Соболева — Гальярдо — Ниренберга

$$\|u\|_{L_{p^*}(\Omega)} \leqslant \alpha_2(p,n)\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}. \tag{3.5}$$

Действительно, неравенство (3.1) позволяет построить продолжение до функции $\widehat{u} \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, совпадающее с u в Ω, и применить обычное неравенство Соболева — Гальярдо — Ниренберга в $\mathbb{R}^n$.

Авторы благодарны В.Е. Бобкову, указавшему на работу [8], из результатов которой следует утверждение леммы 3.2. Но мы предпочли дать простое доказательство этой леммы.

Лемма 3.3. *Пусть измеримая функция $u(x)$ определена в Ω. Множество $\{k : \operatorname{mes}\{x \in \Omega : \ |u(x)| = k\} > 0\}$ конечно или счетно.*

Доказательство. Пусть N — произвольное натуральное число. Выберем числа k_i такие, что

$$\operatorname{mes}\{x \in \mathfrak{B}_r : |u(x)| = k_i\} > \frac{1}{N}.$$

Эти множества не пересекаются, поэтому

$$\operatorname{mes}\{x \in \mathfrak{B}_r : \ |u(x)| = k_1\} + \operatorname{mes}\{x \in \mathfrak{B}_r : \ |u(x)| = k_2\} + \ldots \leqslant \operatorname{mes}\mathfrak{B}_r.$$

Следовательно, таких множеств не более, чем $N\operatorname{mes}\mathfrak{B}_r$. Тогда множество

$$\{k : \operatorname{mes}\{x \in \mathfrak{B}_r : \ |u(x)| = k\} > 0\}$$

конечно или счетно. Отсюда несложно вывести утверждение леммы. □

Значения k, для которых

$$\operatorname{mes}\{x \in \Omega : \ |u(x)| = k\} = 0,$$

будем называть регулярными. Пусть k — регулярное значение и $u^j(x) \to u(x)$ почти всюду в Ω. Тогда

$$\chi(|u^j(x)| < k) \to \chi(|u(x)| < k) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{3.6}$$

Действительно, если $|u(x)| < k$, то $|u^j(x)| < k$ при больших j. Отсюда следует сходимость при выбранном x. Если $|u(x)| > k$, то $|u^j(x)| > k$ при больших j. Отсюда следует сходимость и при таком x.

Лемма 3.4. *Пусть функция v такова, что $T_k(v) \in V$ для всех $k > k_0$ и справедливо неравенство*

$$\|T_k(v)\|_V^p \leqslant Ck.$$

Тогда

$$\operatorname{mes}\{x \in \Omega : |v| \geqslant k\} \leqslant \frac{C_1}{k^{p^*(1-p^{-1})}}, \quad k > k_0. \tag{3.7}$$

Доказательство. Пользуясь неравенством (3.5), устанавливаем:

$$\|T_k(v)\|_{p^*,\Omega} \leqslant C(p,n)\|T_k(v)\|_V.$$

При $k_1 \in (0, k]$ очевидны неравенства

$$\operatorname{mes}\{x \in \Omega : |v| \geqslant k_1\} \leqslant \frac{\int\limits_{\{x\in\Omega:|v|\geqslant k_1\}} |T_k(v)|^{p^*}dx}{k_1^{p^*}} \leqslant \frac{C(p,n)^{p^*}\|T_k(v)\|_V^{p^*}}{k_1^{p^*}} \leqslant C_1\frac{k^{p^*/p}}{k_1^{p^*}}.$$

Отсюда, полагая $k_1 = k$, выводим (3.7).

□

Лемма 3.5. *Пусть $Q \subset \Omega$, последовательность $\{v^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ограничена в $L_p(Q)$, $v \in L_p(Q)$, и*

$$v^m \to v \quad \textit{п.в. в} \quad Q, \quad m \to \infty.$$

Тогда

$$v^m \rightharpoonup v \quad \textit{слабо в} \quad L_p(Q), \quad m \to \infty.$$

Доказательство леммы 3.5 для ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ проведено в [10], для произвольной $Q \subset \Omega$ доказательство аналогично.

В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости в рассуждениях, вместо утверждения типа «из последовательности u^m можно выделить подпоследовательность сходящуюся п.в. в Ω при $m \to \infty$» будем писать просто «последовательность u^m содержит подпоследовательность, сходящуюся п.в. в Ω при $m \to \infty$». Или, будем использовать термин «по некоторой подпоследовательности слабо сходится» и т.п., опуская при этом индекс подпоследовательности.

Лемма 3.6. *Пусть v^j, $j \in \mathbb{N}$, v — такие функции из $L_p(Q)$, что*

$$v^j \to v \quad \textit{п.в. в} \quad Q, \quad j \to \infty;$$
$$|v^j|^p \leqslant H \in L_1(Q), \quad j \in \mathbb{N},$$

тогда

$$v^j \to v \quad \textit{сильно в} \quad L_p(Q), \quad j \to \infty.$$

Справедливость леммы 3.6 следует из теоремы Лебега.

Лемма 3.7. *Пусть последовательность $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ограничена в $L_{p'}(Q)$. Тогда существует подпоследовательность такая, что*

$$v^j \rightharpoonup v \quad \textit{слабо в} \quad L_{p'}(Q), \quad j \to \infty.$$

Если h^j, $j \in \mathbb{N}$, h — такие функции из $L_p(Q)$, что

$$h^j \to h \quad \textit{сильно в} \quad L_p(Q), \quad j \to \infty,$$

то

$$\int\limits_Q v^j h^j dx \to \int\limits_Q vhdx, \quad j \to \infty.$$

Доказательство леммы 3.7 несложно и опускается. Ниже будет использоваться лемма Витали в следующей форме (см. [11, гл. III, §6, теорема 15]).

Лемма 3.8. *Пусть v^j, $j \in \mathbb{N}$, v — измеримые функции в ограниченной области Q такие, что*

$$v^j \to v \quad \textit{п.в. в} \quad Q, \quad j \to \infty,$$

и интегралы

$$\int\limits_Q |v^j(x)|dx, \quad j \in \mathbb{N},$$

равномерно абсолютно непрерывны, тогда

$$v^j \to v \quad \textit{сильно в} \quad L_1(Q), \quad j \to \infty.$$

Лемма 3.9. *Пусть $H^j \to H$ в $L_1(Q)$ при $j \to \infty$. Пусть v^j, $j \in \mathbb{N}$, — измеримые функции в ограниченной области Q такие, что*

$$\begin{aligned} &v^j \to v \quad \textit{п.в. в} \quad Q, \quad j \to \infty;\\ &|v^j| \leqslant H^j, \quad j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

тогда

$$v^j \to v \quad \textit{сильно в} \quad L_1(Q), \quad j \to \infty.$$

Лемму 3.9 нетрудно вывести из леммы Витали.

Следующее утверждение обычно называют теоремой Леви.

Лемма 3.10. *Пусть $(S, \sum, \mu)$ — пространство с положительной мерой, $\{f_n\}$ — неубывающая последовательность неотрицательных измеримых, необязательно интегрируемых функций. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S f_n(x)d\mu = \int\limits_S \sup_n f_n(x)d\mu.$$

Доказательство дано в [11, гл. III, §6, следствие 17]).

Лемма 3.11. *Пусть в Ω выполнены условия (2.4)–(2.6) и при $k > 0$ для некоторой последовательности $w^j \in V$ выполнены условия*

$$\begin{aligned} &\nabla w^j \rightharpoonup \nabla w \quad \textit{в} \quad L_p(\Omega), \quad j \to \infty,\\ &w^j \to w \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty,\\ &\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{B}_R} (a(x, T_k(w^j), \nabla w^j) - a(x, T_k(w^j), \nabla w)) \cdot \nabla(w^j - w))dx = 0, \quad \forall R > R_0. \end{aligned}$$

Тогда по некоторой подпоследовательности

$$\begin{aligned} &\nabla w^j \to \nabla w \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty, \\ &\nabla w^j \to \nabla w \quad \textit{сильно в} \quad L_{p,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad j \to \infty,\\ &a(x, T_k(w^j), \nabla w^j) \cdot \nabla w^j \to a(x, T_k(w), \nabla w) \cdot \nabla w \textit{в} \quad L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad j \to \infty. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Аналогичное утверждение в более общей формулировке доказано в [9, лемма 4.10]

4. Слабое решение аппроксимационной задачи

Векторное поле $a^m(x,r,y) = a(x, T_m(r), y)$, в силу (2.4), определяет оператор

$$\widetilde{A} : V \times V \to V^*.$$

В контексте настоящей работы он действует по формуле

$$\langle \widetilde{A}(u,v), w\rangle = \int\limits_\Omega a^m(x,u,\nabla v)\cdot \nabla w dx, \qquad u,v,w \in V.$$

Положим

$$f^m(x) = T_m(f(x))\chi_m(x),$$
$$\chi_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in \mathfrak{B}_m, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin \mathfrak{B}_m, \end{cases}$$
$$b_0^m(x,r,y) = T_m(b_0(x,r,y))\chi_m(x), \quad b_1^m(x,r) = T_m(b_1(x,r))\chi_m(x).$$

Очевидно, что при $r \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$

$$|b_0^m(x,r,y)| \leqslant m\chi_m(x), \quad |b_1^m(x,r)| \leqslant m\chi_m(x), \quad x \in \Omega.$$

Кроме того, применяя (2.9), устанавливаем

$$b_0^m(x,r,y)r \geqslant 0, \quad b_1^m(x,r)r \geqslant 0, \quad x \in \Omega, \quad r \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Используя неравенство (3.1), несложно показать, что $f^m \in V^*$,

$$f^m \to f \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad m \to \infty,$$

и при этом

$$|f^m(x)| \leqslant |f(x)|, \quad |f^m(x)| \leqslant m\chi_m(x), \quad x \in \Omega, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Оператор $\mathcal{B}_m : \ V \to V^*$ действует по формуле

$$\langle \mathcal{B}_m u, v\rangle = \int\limits_\Omega b_0^m(x,u,\nabla u) v dx + \int\limits_\Omega b_1^m(x,u) v d\mu = \langle K_0(u), v\rangle + \langle K_1(u), v\rangle.$$

Сходимость второго из интегралов обеспечивается вложением (2.3) и неравенством (3.1). Используя (4.1), легко установить неотрицательность оператора $\mathcal{B}_m$:

$$\langle \mathcal{B}_m u, u\rangle \geq 0, \quad u \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Рассмотрим уравнение

$$-\operatorname{div} a^m(x,u,\nabla u) + \mathcal{B}_m u = f^m(x), \quad x \in \Omega, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

с функцией $a^m(x,r,y) = a(x,T_m(r),y)$.

Слабым решением задачи Зарембы для уравнения (4.3) называется функция $u^m \in V$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega a(x,T_m(u^m),\nabla u^m)\cdot\nabla v dx + \langle \mathcal{B}_m u^m, v\rangle = \langle f^m, v\rangle \tag{4.4}$$

для любой функции $v \in \mathcal{D}_\Gamma(\Omega)$. Нетрудно доказать, что соотношение (4.4) справедливо также при всех $v \in V$. При доказательстве существования слабого решения u^m задачи Зарембы индекс m будем опускать.

Слабое решение $u^m \in V$ задачи Зарембы для уравнения (4.3) будем искать методом Галеркина.

Пусть последовательность функций $\omega_j \in \mathcal{D}_\Gamma(\Omega)$ ортонормирована и имеет плотную линейную оболочку в $L_2(\Omega)$. Приближения к решению задачи ищутся в виде $u^N = \sum\limits_{j=1}^{N} h_j^N \omega_j$. Зафиксируем N. Положим $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_N) \in \mathbb{R}^N$ и определим функции $P_k(\mathbf{h})$, $k = 1, 2, \dots, N$, формулами

$$P_k(\mathbf{h}) = \int\limits_\Omega a^m(x, u^N, \nabla u^N) \cdot \nabla \omega_k dx + \langle \mathcal{B}_m u^N, \omega_k \rangle - \langle f^m, \omega_k \rangle.$$

Вектор $\mathbf{h}^N$ определяется из системы уравнений $P_k(\mathbf{h}^N) = 0$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Докажем разрешимость уравнений на вектор $\mathbf{h}^N$. Введем обозначение

$$P(\mathbf{h}^N) = (P_1(\mathbf{h}^N), P_2(\mathbf{h}^N), \dots, P_N(\mathbf{h}^N)).$$

Используя условие (2.5), неотрицательность оператора $\mathcal{B}_m$ и неравенства (3.1),

$$|\langle f^m, u^N \rangle| \leqslant C(m) \|u^N\|_{p, \mathfrak{B}_m},$$

имеем

$$\begin{aligned} (P(\mathbf{h}^N), \mathbf{h}^N) &= \int\limits_\Omega a^m(x, u^N, \nabla u^N) \cdot \nabla u^N dx + \langle \mathcal{B}_m u^N, u^N \rangle - \langle f^m, u^N \rangle \\ &\geqslant \int\limits_\Omega (c_0 |\nabla u^N|^p - G(x)) dx + \langle \mathcal{B}_m u^N, u^N \rangle - \langle f^m, u^N \rangle \\ &\geqslant \int\limits_\Omega c_0 |\nabla u^N|^p dx - C(m) \|u^N\|_{p, \mathfrak{B}_m} - C_1. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Таким образом, при $p > 1$ из (4.5) получаем неравенство

$$(P(\mathbf{h}), \mathbf{h}) > 0$$

при больших $|\mathbf{h}|$. По лемме (см. [12, глава 1, лемма 4.3]), найдется вектор $\mathbf{h}^N$ такой, что $P_k(\mathbf{h}^N) = 0$, $k = 1, 2, \dots, N$. Используя (4.5) и равенство $(P(\mathbf{h}^N), \mathbf{h}^N) = 0$, получаем неравенство

$$\int\limits_\Omega |\nabla u^N|^p dx \leqslant C_1 + C_2 \|u^N\|_{p, \mathfrak{B}_m}.$$

Отсюда, ввиду (3.1), следует равномерная оценка

$$\|u^N\|_V = \|\nabla u^N\|_{p, \Omega} \leqslant C_3, \quad \forall N = 1, 2, \dots.$$

Аналогично, используя (4.5) и неотрицательность $\mathcal{B}_m$, устанавливаем, что

$$\langle \mathcal{B}_m u^N, u^N \rangle \leqslant C_3, \quad \forall N = 1, 2, \dots.$$

Поэтому можно выбрать подпоследовательность N_k так, что

$$u^{N_k} \rightharpoonup u \ \text{ слабо в } V \text{ и слабо в } W_p^1(\mathfrak{B}_r),\ r \geqslant r_0.$$

Используя неравенства вида (3.1) и теорему Реллиха — Кондрашова, получаем

$$u^{N_k} \to u \text{ сильно в } L_{p,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}).$$

Поэтому можно считать (выбирая подходящую подпоследовательность), что

$$u^{N_k} \to u \text{ п.в. в } \Omega.$$

Последовательность $a^m(x, u^N, \nabla u^N)$, в силу (2.4), ограничена в пространстве $(L_{p'}(\Omega))^n$, при этом

$$|a^m(x, u^N, \nabla u)|^{p'} \leqslant g(m)(G(x) + |\nabla u|^p) \in L_1(\Omega).$$

Поэтому, по лемме 3.6, имеем сильную сходимость в $L_{p'}(\Omega)$

$$a^m(x, u^N, \nabla u) \to a^m(x, u, \nabla u), \quad N \to \infty. \tag{4.6}$$

Кроме того, по лемме 3.7, из последовательности $a^m(x, u^N, \nabla u^N)$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Индексы подпоследовательности будем опускать:

$$a^m(x, u^N, \nabla u^N) \rightharpoonup \kappa \text{ слабо в } (L_{p'}(\Omega))^n. \tag{4.7}$$

Поскольку $|K_0(u^N)| = |b_0^m(x, u^N, \nabla u^N)| \leqslant m$, последовательность $K_0(u^N)$ ограничена в пространстве $L_{p'}(\mathfrak{B}_m)$. Опуская индексы подпоследовательности, можно считать, что последовательность $K_0(u^N)$ слабо сходится к k_0 в пространстве $L_{p'}(\mathfrak{B}_m) \subset V^*$. Аналогично, последовательность $K_1(u^N)$ слабо сходится к k_1 в пространстве $L_{q',\mu}(\mathfrak{B}_m) \subset V^*$.

Предельный переход $N \to \infty$ в равенствах $P_k(h^N) = 0$ приводит к соотношению

$$\int\limits_\Omega \kappa \cdot \nabla \omega_k dx + \langle k_0 + k_1, \omega_k \rangle = \langle f^m, \omega_k \rangle. \tag{4.8}$$

После умножения на h_k^N нетрудно получить равенство

$$\int\limits_\Omega \kappa \cdot \nabla u^N dx + \langle k_0 + k_1, u^N \rangle = \langle f^m, u^N \rangle.$$

После предельного перехода $N \to \infty$ будем иметь

$$\int\limits_\Omega \kappa \cdot \nabla u dx + \langle k_0 + k_1, u \rangle = \langle f^m, u \rangle. \tag{4.9}$$

Предельный переход в равенстве $(P(\mathbf{h}^N), \mathbf{h}^N) = 0$ (см. (4.5)) с использованием леммы 3.7 дает соотношение

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_\Omega a^m(x, u^N, \nabla u^N) \cdot \nabla u^N dx + \langle k_0 + k_1, u \rangle = \langle f^m, u \rangle. \tag{4.10}$$

Из (4.9) и (4.10) следует, что

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_\Omega a^m(x, u^N, \nabla u^N) \cdot \nabla u^N dx = \int\limits_\Omega \kappa \cdot \nabla u dx. \tag{4.11}$$

Докажем теперь, что $\nabla u^N \to \nabla u$ п.в. Из слабой сходимости последовательности u^N в пространстве V и сильной сходимости (4.6) следует, что

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_\Omega a^m(x, u^N, \nabla u) \cdot (\nabla u^N - \nabla u) dx = 0. \tag{4.12}$$

Пусть

$$\begin{aligned} H_N =& (a^m(x, u^N, \nabla u^N) - a^m(x, u^N, \nabla u))(\nabla u^N - \nabla u) \\ =& a^m(x, u^N, \nabla u^N)\nabla u^N - a^m(x, u^N, \nabla u^N)\nabla u - a^m(x, u^N, \nabla u)(\nabla u^N - \nabla u). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Из (2.6) следует, что $H_N \geqslant 0$. Из (4.7) следует равенство

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_\Omega a^m(x, u^N, \nabla u^N) \nabla u dx = \int\limits_\Omega \kappa \nabla u dx. \tag{4.14}$$

Предельный переход, с использованием (4.11)–(4.14), приводит к соотношению

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_\Omega H_N dx = 0,$$

которое в других обозначениях

$$\Lambda(x,r,y,z) = (a(x,r,y) - a(x,r,z)) \cdot (y-z), \quad y,z \in \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{R},$$

записывается в виде

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{\Omega} \Lambda(x, T_m(u^N), \nabla u^N, \nabla u)dx = 0.$$

Применяя лемму 3.11, получаем сходимость $\nabla u^N \to \nabla u$ п.в. в Ω. Тогда

$$\kappa = a^m(x,u,\nabla u), \qquad k_0 = b_0^m(x,u,\nabla u), \qquad k_1 = b_1(x,u),$$

и из (4.8) легко следует, что функция u является слабым решением аппроксимационной задачи Зарембы.

5. Существование решения

Положим в (4.4) $v = T_{k,h}(u^m) = T_k(u^m - T_h(u^m))$. Учитывая (4.1), будем иметь

$$\begin{aligned}\int\limits_{\{\Omega: h\leqslant|u^m|<k+h\}} & a^m(x,u^m,\nabla u^m)\nabla u^m dx + k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant k+h\}} |b_0^m(x,u^m,\nabla u^m)|dx \\ &+ k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant k+h\}} |b_1^m(x,u^m)|d\mu + \int\limits_{\{\Omega: h\leqslant|u^m|<k+h\}} b_0^m(x,u^m,\nabla u^m)u^m(1-h/|u_m|)dx \\ &+ \int\limits_{\{\Omega: h\leqslant|u^m|<k+h\}} b_1^m(x,u^m)u^m(1-h/|u_m|)d\mu \leqslant k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant h\}} |f^m|dx.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Применяя (4.2), (2.5), из (5.1) выводим

$$\begin{aligned}\int\limits_{\{\Omega: h\leqslant|u^m|<k+h\}} & (a^m(x,u^m,\nabla u^m)\cdot\nabla u^m + G(x))dx + k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant k+h\}} |b_0^m(x,u^m,\nabla u^m)|dx \\ &+ k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant k+h\}} |b_1^m(x,u^m)|d\mu \leqslant r \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant h\}} (k|f| + |G|)dx, \quad m\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Полагая в (5.2) $h=0$, используя неравенство (2.5), получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\{\Omega:|u^m|<k\}} & c_0|\nabla u^m|^p dx + k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant k\}} |b_0^m(x,u^m,\nabla u^m)|dx \\ &+ k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant k\}} |b_1^m(x,u^m)|d\mu \leqslant (k+1)C_1, \quad m\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Из (5.3) следует оценка

$$\int\limits_{\{\Omega:|u^m|<k\}} |\nabla u^m|^p dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla T_k(u^m)|^p dx \leqslant c_0^{-1}C_1(k+1), \quad m\in\mathbb{N}.$$

Отсюда $T_k(u^m)\in V$, и для любого $k>1$

$$\|T_k(u^m)\|_V^p \leqslant C_2 k, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Рефлексивность пространства V позволяет выделить слабо сходящуюся в V подпоследовательность

$$T_k(u^m) \rightharpoonup v_k \in V, \qquad m\to\infty. \tag{5.5}$$

Неравенство (5.4) позволяет применить лемму 3.4, из которой следует оценка
$$\mathrm{mes}\{x \in \Omega : |u^m(x)| \geqslant k\} \leqslant \frac{C}{k^{p^*(1-p^{-1})}}, \qquad m > k > 1. \tag{5.6}$$
Тогда, выбирая достаточно большое k, получаем
$$\int\limits_{\{\Omega:|u^m| \geqslant k\}} (|f| + |G|)dx \leqslant \varepsilon(k), \quad m > k, \tag{5.7}$$
где $\varepsilon(k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Установим сходимости по подпоследовательности:
$$u^m \to u \quad \text{п.в. и} \quad \mu - \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty. \tag{5.8}$$

Последовательность $T_s(u^m)$ ограничена в пространстве V и, в силу (3.1), ограничена в пространстве $W^1_p(\mathfrak{B}_R)$. По теореме Кондрашова из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $T_s(u^m) \to \widetilde{v}_s$ в $L_p(\mathfrak{B}_R)$ при $m \to \infty$. Отсюда следует сходимость $T_s(u^m) \to \widetilde{v}_s$ почти всюду в $\mathfrak{B}_R$. В силу (5.5), имеем равенство $v_s = \widetilde{v}_s$ почти всюду в $\mathfrak{B}_R$. Далее, диагональным процессом по $R \in \mathbb{N}$ устанавливается сходимость по некоторой подпоследовательности $T_s(u^m) \to v_s$ почти всюду в Ω. Обозначим через Q множество точек из Ω в которых последовательность $u^m(x)$ имеет конечный предел. Этот предел обозначим через $u(x)$. При $x \in Q$ имеем равенства
$$v_s(x) = \lim T_s(u^m(x)) = T_s \lim u^m(x) = T_s(u).$$
Если для некоторого x выполнено $\lim |T_s(u^m(x))| < s$, то
$$\lim T_s(u^m(x)) = v_s(x) = \lim u^m(x),$$
то есть $x \in Q$. Тогда при почти всех $x \notin Q$ имеем $\lim |T_s(u^m(x))| = s$ для всех $s > 0$. В частности $\lim |T_{s+h}(u^m(x))| = s + h$. Тогда $|u^m(x)| > s$ при больших m, следовательно, $\lim |u^m(x)| = \infty$. В силу (5.6), мера множества таких точек в шаре $\mathfrak{B}_R$ равна нулю. Отсюда заключаем, что разность $\Omega \setminus Q$ имеет меру нуль и сходимость (5.8) для меры Лебега установлена. Тогда $v_s(x) = T_s(u)$ при почти всех $x \in \Omega$.

Отметим еще сходимость $T_s(u^m) \to v_s$ в $L_{q,\mu}(\mathfrak{B}_R)$, вытекающую из (2.3) и (3.1). Тогда $T_s(u^m) \to v_s$ μ–почти всюду в $\mathfrak{B}_R$ (по некоторой подпоследовательности). Далее, диагональным процессом по $R \in \mathbb{N}$ устанавливается сходимость по некоторой подпоследовательности
$$T_s(u^m) \to T_s(u), \quad m \to \infty, \tag{5.9}$$
μ–почти всюду в Ω, а также (5.8).

Соотношение (5.5) переписывается в виде
$$\nabla T_k(u^m) \rightharpoonup \nabla T_k(u) \quad \text{в} \quad L_p(\Omega), \quad m \to \infty. \tag{5.10}$$

Далее будет установлена сильная сходимость
$$\nabla T_k(u^m) \to \nabla T_k(u) \quad \text{в} \quad L_{p,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad m \to \infty. \tag{5.11}$$

Из (5.4), (2.4) при любом $k > 1$ имеем оценку:
$$\|a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m))\|_{p',\Omega} \leqslant C_5(k), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{5.12}$$
Тогда можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность
$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \rightharpoonup a_k \text{ слабо в } L_{p'}(\Omega), \ m \to \infty. \tag{5.13}$$

Пусть $k > 0$, $h > k + 1$,
$$z^m = T_k(u^m) - T_k(u), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Полагаем $\varphi_k(r) = r\exp(\gamma^2 r^2)$, где $\gamma = \frac{g(k)}{c_0}$. Очевидно, что

$$\psi_k(r) = \varphi_k'(r) - \gamma|\varphi_k(r)| \geqslant 7/8, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следуют неравенства

$$7/8 \leqslant \psi_k(z^m) \leqslant \max_{[-2k,2k]} \psi_k(r) = C(k), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ввиду (5.8), $z^m \to 0$ почти всюду в Ω и μ–п.в. Поэтому

$$\varphi_k(z^m) \to 0, \quad \varphi_k'(z^m) \to \varphi_k'(0) = 1, \quad \psi_k(z^m) \to \psi_k(0) = 1, \quad m \to \infty, \tag{5.14}$$

почти всюду в Ω и μ–п.в. Очевидны неравенства

$$|\varphi_k(z^m)| \leqslant \varphi_k(2k), \quad 1 \leqslant \varphi_k'(z^m) \leqslant \varphi_k'(2k), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{5.15}$$

Положим $\eta_h(r) = \zeta(h - r + 1)$.

Для краткости записи будем использовать обозначения

$$d\nu = \eta_{R-1}(|x|)dx, \qquad \eta_{h-1}^m(x) = \eta_{h-1}(|u^m|), \qquad \widetilde{\eta}_{h-1}(x) = \eta_{h-1}(|u|).$$

Из (5.8) следует сходимость

$$\eta_{h-1}^m \to \widetilde{\eta}_{h-1} \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty.$$

Взяв в качестве тестовой функции в (4.4) $\varphi_k(z^m)\eta_{R-1}(|x|)\eta_{h-1}^m$, получим

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathfrak{B}_R} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m))\nabla(\varphi_k(z^m)\eta_{R-1}\eta_{h-1}^m)dx \\ &\quad + \int\limits_{\mathfrak{B}_R} b_0^m(x, u^m, \nabla u^m)\eta_{R-1}\varphi_k(z^m)\eta_{h-1}^m dx \\ &\quad + \int\limits_{\mathfrak{B}_R} b_1^m(x, u^m)\varphi_k(z^m)\eta_{R-1}\eta_{h-1}^m d\mu \\ &\quad - \int\limits_{\mathfrak{B}_R} f^m\varphi_k(z^m)\eta_{h-1}^m dx = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0, \quad m \geqslant h. \end{aligned} \tag{5.16}$$

5.1. Оценки интегралов $I_2 - I_4$.

Ввиду неравенства

$$\eta_{h-1}(|u^m|)|b_1^m(x, u^m)| \leqslant g(h)\widetilde{G}_1(x), \quad x \in \mathfrak{B}_R,$$

вытекающего из (2.8), по теореме Лебега, используя (5.14), имеем

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{\mathfrak{B}_R} |\varphi_k(z^m)|g(h)\widetilde{G}_1(x)d\mu = \varepsilon_1(m). \tag{5.17}$$

Здесь и далее

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_i(m) = 0.$$

Аналогично, поскольку $f \in L_1(\Omega)$, получаем

$$|I_4| \leqslant \int\limits_{\mathfrak{B}_R} |f\varphi_k(z^m)|dx = \varepsilon_2(m). \tag{5.18}$$

Очевидно, что $z^m u^m \geq 0$ при $|u^m| \geqslant k$, $\varphi_k(z^m)u^m \geq 0$, поэтому, ввиду (4.1), имеем

$$b_0^m(x, u^m, \nabla u^m)\varphi_k(z^m) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |u^m| \geqslant k.$$

Учитывая это и применяя (2.8), оценим интегралы

$$-I_2 \leqslant \int\limits_{\{\mathfrak{B}_R:|u^m|<k\}} |b_0^m(x,u^m,\nabla u^m)||\varphi_k(z^m)|d\nu$$
$$\leqslant g(k)\int\limits_{\mathfrak{B}_R}\left(|\nabla T_k(u^m)|^p+\widetilde{G}_0(x)\right)|\varphi_k(z^m)|d\nu, \quad m\in\mathbb{N}.$$

Используя (2.5), выводим

$$\begin{aligned}-I_2 \leqslant &\frac{g(k)}{c_0}\int\limits_{\mathfrak{B}_R}\left(c_0\widetilde{G}_0(x)+G(x)\right)|\varphi_k(z^m)|d\nu\\ &+\frac{g(k)}{c_0}\int\limits_{\mathfrak{B}_R} a(x,T_k(u^m),\nabla T_k(u^m)\nabla T_k(u^m)|\varphi_k(z^m)|d\nu = I_{21}+I_{22}.\end{aligned} \tag{5.19}$$

Ввиду (5.14), имеем

$$I_{21}=\frac{g(k)}{c_0}\int\limits_{\mathfrak{B}_R}\left(c_0\widetilde{G}_0(x)+G(x)\right)|\varphi_k(z^m)|d\nu=\varepsilon_3(m). \tag{5.20}$$

Так как $\varphi_k(z^m)u^m \geqslant 0$ при $|u^m|>h-1\geqslant k$, выполнено равенство $\varphi_k(z^m)|u^m| = |\varphi_k(z^m)|u^m$. Используя это, оценим интегралы

$$\begin{aligned}I_{12}=&-\int\limits_{\{\mathfrak{B}_R:h-1\leqslant|u^m|<h\}}(a(x,T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot\nabla|u^m|)\varphi_k(z^m)d\nu\\ =&-\int\limits_{\{\mathfrak{B}_R:h-1\leqslant|u^m|<h\}}(a(x,u^m,\nabla u^m)\cdot\nabla u^m+G(x))|\varphi_k(z^m)|d\nu\\ &+\int\limits_{\{\mathfrak{B}_R:h-1\leqslant|u^m|<h\}}G(x)|\varphi_k(z^m)|d\nu.\end{aligned}$$

Пользуясь (5.2), (5.7), (5.15), находим, что

$$|I_{12}|\leqslant\varepsilon(h), \quad m\geqslant h, \tag{5.21}$$

где $\varepsilon(h)\to 0$ при $h\to\infty$.

Далее, используя (5.12) и неравенство $|\nabla\eta_{R-1}(|x|)|\leqslant 1$, получим оценку для интегралов

$$\begin{aligned}&I_{13}=\int\limits_{\{\mathfrak{B}_R:|u^m|<h\}}(a(x,T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\nabla\eta_{R-1}(|x|))\eta_{h-1}(|u^m|)\varphi_k(z^m)dx;\\ &|I_{13}|\leqslant C_7(h)\|\varphi_k(z^m)\|_{p,\mathfrak{B}_R}=\varepsilon_5(m).\end{aligned} \tag{5.22}$$

Несложно установить равенство $I_1=I_{11}+I_{12}+I_{13}$, где

$$I_{11}=\int\limits_{\mathfrak{B}_R} a(x,T_h(u^m),\nabla T_h(u^m))\cdot(\nabla z^m)\eta_{h-1}(|u^m|)\varphi_k'(z^m)d\nu.$$

Теперь, используя оценки интегралов (5.17)–(5.22), из (5.16) выводим неравенства

$$\begin{aligned}I_5=&I_{11}-I_{22}=(I_1+I_2)-I_{12}-I_{13}-I_{22}-I_2\\ &\leqslant-(I_3+I_4)+\varepsilon_4(m)+\varepsilon(h)=\varepsilon_5(m)+\varepsilon(h), \quad m\geqslant h.\end{aligned} \tag{5.23}$$

5.2. Представление I_5. Выполняя элементарные преобразования, запишем равенства

$$\begin{aligned}
I_5 = &\int\limits_{\mathfrak{B}_R} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m)\varphi_k'(z^m)d\nu \\
&- \int\limits_{\mathfrak{B}_R} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(u)\varphi_k'(z^m)\eta^m_{h-1}d\nu \\
&- \frac{g(k)}{c_0}\int\limits_{\mathfrak{B}_R} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m)|\varphi_k(z^m)|d\nu \\
= &\int\limits_{\mathfrak{B}_R} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m)\psi_k(z^m)d\nu \\
&- \int\limits_{\mathfrak{B}_R} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(u)\varphi_k'(z^m)\eta^m_{h-1}d\nu \\
= &\int\limits_{\mathfrak{B}_R} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla z^m)\psi_k(z^m)d\nu \\
&+ \int\limits_{\mathfrak{B}_R} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u)\psi_k(z^m)d\nu \\
&- \int\limits_{\mathfrak{B}_R} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(u)\varphi_k'(z^m)\eta^m_{h-1}d\nu \\
= &I_{51} + I_{52} + I_{53}.
\end{aligned}$$

Очевидно равенство

$$\begin{aligned}
I_5 = &I_{51} - \frac{g(k)}{c_0}\int\limits_{\mathfrak{B}_R} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m))\nabla T_k(u)|\varphi_k(z^m)|d\nu \\
&+ \int\limits_{\mathfrak{B}_R} \left(a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - \eta^m_{h-1}a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m))\right) \nabla T_k(u)\varphi_k'(z^m)d\nu \\
= &I_{51} + I_{54} + I_{55}, \quad m \geqslant h.
\end{aligned}$$

5.3. Оценки интегралов I_{54}, I_{55}. Применяя (5.14), (5.15), лемму 3.6 с

$$H = |\nabla T_k(u)\varphi_k(2k)|^p,$$

получаем

$$\nabla T_k(u)|\varphi_k(z^m)| \to 0 \quad \text{сильно в } L_p(\Omega), \quad m \to \infty.$$

Отсюда, ввиду сходимости (5.13), устанавливаем

$$I_{54} = \varepsilon(m).$$

В интеграле I_{55} интегранд F зануляется при $|u^m| \leqslant k$, поэтому $F = F\chi\{|u^m| > k\}$. Применяя (5.14), (5.15), лемму 3.6, получаем

$$\nabla T_k(u)\chi\{|u^m| > k\}\varphi_k'(z^m) \to \nabla T_k(u)\chi\{|u| > k\} = 0 \quad \text{сильно в } L_p(\mathfrak{B}_R), \quad m \to \infty.$$

Отсюда, ввиду сходимости (5.13), устанавливаем

$$I_{55} = \varepsilon(m).$$

Из (5.23), поскольку I_{51} не зависит от h, следует, что

$$I_{51} \leqslant \varepsilon_6(m). \tag{5.24}$$

Оценим интеграл

$$\begin{aligned} I_6 = &\int\limits_{\Omega} (a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u))) \\ &\cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u))\psi_k(z^m) d\nu \\ = &\int\limits_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m))(\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u))\psi_k(z^m) d\nu \\ &- \int\limits_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u))(\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u))\psi_k(z^m) d\nu = I_{51} - I_{61}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Из (2.4) имеем оценки

$$|a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u))|^{p'} \leqslant g(k)(|\nabla T_k(u))|^p + G(x)) \in L_1(\Omega), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, из сходимости почти всюду (5.8), по лемме 3.6, получаем сходимость

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u))\psi_k(z^m) \to a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)) \quad \text{сильно в } L_{p'}(\Omega), \quad m \to \infty.$$

Применяя (5.10) и лемму 3.7, выводим

$$I_{61} = \varepsilon(m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Используя (5.24), (5.25), находим, что

$$I_6 \leqslant \varepsilon_7(m).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_7 = &\int\limits_{\Omega} (a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u)))\,(\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u)) d\nu \\ &\leqslant 8/7 I_6 \leqslant \varepsilon(m). \end{aligned}$$

Обозначим

$$q^j(x) = \Lambda(x, T_k(u^j), \nabla T_k(u^j), \nabla T_k(u)), \quad x \in \Omega, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{5.26}$$

Используя обозначение (5.26), имеем

$$0 \leqslant \int\limits_{\Omega} q^m(x) d\nu = I_7 \leqslant \varepsilon(m).$$

По лемме 3.11, примененной к $w^j = T_k(u^j)$, $w = T_k(u)$, с учетом (5.9), имеем сходимости (5.11) и

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m))\nabla T_k(u^m) \to a(x, T_k(u), \nabla T_k(u))\nabla T_k(u) \quad \text{в} \quad L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \tag{5.27}$$

В силу (3.8),

$$\nabla T_k(u^m) \to \nabla T_k(u) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty. \tag{5.28}$$

Докажем, что при всех $s > 0$, $R > 0$,

$$b_0^m(x, T_s(u^m), \nabla T_s(u^m)) \to b_0(x, T_s(u), \nabla T_s(u)) \quad \text{в} \quad L_1(\mathfrak{B}_R), \quad m \to \infty. \tag{5.29}$$

Из (5.8), (5.28) следует, что имеет место сходимость

$$b_0(x, T_s(u^m), \nabla T_s(u^m)) \to b_0(x, T_s(u), \nabla T_s(u)) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty.$$

По условию (2.7)

$$|b_0^m(x, T_s(u^m), \nabla T_s(u))| \leqslant g(r)(\widetilde{G}_0(x) + |\nabla T_s(u^m)|^p) \in L_1(\mathfrak{B}_R),$$

где можно взять $r = s + R$. Поэтому (5.29) есть следствие леммы 3.9 и сходимости (5.11). Аналогичным образом доказывается сходимость

$$b_1^m(x, T_s(u^m)) \to b_1(x, T_s(u)) \quad \text{в} \quad L_{1,\mu}(\mathfrak{B}_R), \quad m \to \infty. \tag{5.30}$$

Чтобы доказать (2.10), возьмем пробную функцию $v = T_k(u^m - \xi)$, $\xi \in D_\Gamma(\Omega)$, в тождестве (4.4), получим

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Omega a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla T_k(u^m - \xi) dx \\ &\quad + \int\limits_\Omega (b_0^m(x, u^m, \nabla u^m) - f^m) T_k(u^m - \xi) dx + \int\limits_\Omega b_1^m(x, u^m) T_k(u^m - \xi) d\mu = 0. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Положим $\mathbf{M} = k + \|\xi\|_\infty$. Если $|u^m| \geqslant \mathbf{M}$, то

$$|u^m - \xi| \geqslant |u^m| - \|\xi\|_\infty \geqslant k,$$

поэтому

$$\{\Omega : |u^m - \xi| < k\} \subseteq \{\Omega : |u^m| < \mathbf{M}\},$$

следовательно

$$\begin{aligned} I^m &= \int\limits_\Omega a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla T_k(u^m - \xi) dx \\ &= \int\limits_\Omega a(x, T_\mathbf{M}(u^m), \nabla T_\mathbf{M}(u^m)) \nabla T_k(u^m - \xi) dx \\ &= \int\limits_\Omega a(x, T_\mathbf{M}(u^m), \nabla T_\mathbf{M}(u^m))(\nabla T_\mathbf{M}(u^m) - \nabla \xi) \chi_{\{\Omega : |u^m - \xi| < k\}} dx, \quad m \geqslant \mathbf{M}. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} I_1^m &:= \int\limits_{\{\Omega : |u^m - \xi| < k\}} (a(x, T_\mathbf{M}(u^m), \nabla T_\mathbf{M}(u^m)) \nabla T_\mathbf{M}(u^m) + G(x)) dx \\ &\geq \int\limits_{\{\Omega : |u^m - \xi| < k, |x| < R\}} (a(x, T_\mathbf{M}(u^m), \nabla T_\mathbf{M}(u^m)) \nabla T_\mathbf{M}(u^m) + G(x)) dx. \end{aligned}$$

Для регулярных значений k имеет место сходимость (3.6) характеристических функций

$$\chi_{\{\Omega : |u^m - \xi| < k\}} \to \chi_{\{\Omega : |u - \xi| < k\}} \quad \text{п.в.} \quad \Omega, \quad m \to \infty.$$

Из сходимости (5.27) и леммы 3.9, имеем по лемме Фату:

$$\liminf_{m \to \infty} I_1^m \geqslant \int\limits_{\{\Omega : |u - \xi| < k, |x| < R\}} (a(x, T_\mathbf{M}(u), \nabla T_\mathbf{M}(u)) \nabla T_\mathbf{M}(u) + G(x)) dx, \quad \forall R > 0.$$

Тогда, ввиду неотрицательности интегралов,

$$\liminf_{m \to \infty} I_1^m \geqslant \int\limits_{\{\Omega : |u - \xi| < k\}} (a(x, T_\mathbf{M}(u), \nabla T_\mathbf{M}(u)) \nabla T_\mathbf{M}(u) + G(x)) dx.$$

Поэтому из сходимости (5.13) следует также неравенство

$$\liminf_{m\to\infty} I^m \geqslant \int\limits_{\{\Omega:|u-\xi|<k\}} a(x, T_{\mathbf{M}}(u), \nabla T_{\mathbf{M}}(u)) \cdot (\nabla T_{\mathbf{M}}(u) - \nabla\xi)dx$$
$$= \int\limits_{\Omega} a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u-\xi)dx = C_I.$$

Используя лемму 3.9, выполняя предельный переход при $m \to \infty$, устанавливаем

$$J_1^m := \int\limits_{\Omega} f^m T_k(u^m - \xi)dx \to \int\limits_{\Omega} f T_k(u-\xi)dx = C_{J_1}. \tag{5.32}$$

Вводя обозначение

$$J_2^m := \int\limits_{\Omega} b_0^m(x, u^m, \nabla u^m)T_k(u^m - \xi)dx + \int\limits_{\Omega} b_1^m(x, u^m)T_k(u^m - \xi)d\mu,$$

из (5.31) получаем

$$C_I + \liminf_{m\to\infty} J_2^m \leqslant C_{J_1}.$$

Пусть

$$w^m = u^m - \xi, \qquad w = u - \xi, \qquad \operatorname{supp}\xi \subset \mathfrak{B}_{l_0}, \qquad l \geqslant l_0,$$
$$\mathfrak{B}_{l,s}^m = \{x \in \mathfrak{B}_l : \ |u^m(x)| < s\}, \quad s \geqslant \mathbf{M}, \qquad \mathfrak{B}_{l,s} = \{x \in \mathfrak{B}_l : \ |u(x)| < s\}.$$

Числа s будем выбирать так, чтобы $\operatorname{mes}\{x \in \mathfrak{B}_l : \ |u(x)| = s\} = 0$. Тогда, учитывая (4.1) и неравенство $u^m(x)T_k(u^m - \xi) \geqslant 0$ при $|u^m(x)| > \mathbf{M}$ (или при $|x| > l_0$), имеем:

$$J_2^m = \int\limits_{\Omega\setminus\mathfrak{B}_{l,s}^m} b_0^m(x, u^m, \nabla u^m)T_k(w^m)dx + \int\limits_{\Omega\setminus\mathfrak{B}_{l,s}^m} b_1^m(x, u^m)T_k(w^m)d\mu$$
$$+ \int\limits_{\mathfrak{B}_{l,s}^m} b_0^m(x, u^m, \nabla u^m)T_k(w^m)dx + \int\limits_{\mathfrak{B}_{l,s}^m} b_1^m(x, u^m)T_k(w^m)d\mu$$
$$\geqslant \int\limits_{\mathfrak{B}_{l,s}^m} b_0^m(x, T_s(u^m), \nabla u^m)T_k(w^m)dx + \int\limits_{\mathfrak{B}_{l,s}^m} b_1^m(x, T_s(u^m))T_k(w^m)d\mu = J_{l,s}^m.$$

Применяя (5.29), (5.30), переходим к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_{l,s}} b_1(x, T_s(u))T_k(u-\xi))d\mu + \int\limits_{\mathfrak{B}_{l,s}} b_0(x, T_s(u), \nabla u)T_k(u-\xi)dx = \lim_{m\to\infty} J_{l,s}^m \leqslant \liminf_{m\to\infty} J_2^m.$$

Поскольку, в силу (2.9),

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_{l,s}\setminus\mathfrak{B}_{l_0,s}} b_0(x, T_s(u), \nabla u)T_k(u-\xi)dx = \int\limits_{\mathfrak{B}_{l,s}\setminus\mathfrak{B}_{l_0,s}} |b_0(x, T_s(u), \nabla u)T_k(u)|dx,$$

по теореме Леви возможен предельный переход при $l \to \infty$. Полагая $\Omega_s = \{x \in \Omega : \ |u(x)| < s\}$ и переходя к пределу при $l \to \infty$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_s} b_1(x, u)T_k(u-\xi)d\mu + \int\limits_{\Omega_s} b_0(x, u, \nabla u)T_k(u-\xi)dx \leqslant \liminf_{m\to\infty} J_2^m.$$

Поскольку, в силу (2.9),

$$\int\limits_{\Omega_s\setminus\Omega_M} b_1(x,u)T_k(u-\xi)d\mu = \int\limits_{\Omega_s\setminus\Omega_M} |b_1(x,u)T_k(u-\xi)|d\mu,$$

возможен предельный переход при $s\to\infty$. В результате получим

$$\int\limits_\Omega b_1(x,u)T_k(u-\xi)d\mu + \int\limits_\Omega b_0(x,u,\nabla u)T_k(u-\xi)dx \leqslant \liminf_{m\to\infty} J_2^m.$$

Соединяя (5.31)–(5.32), выводим (2.10).

6. Единственность

Лемма 6.1. *Пусть u — энтропийное решение задачи Зарембы для уравнения (2.1) и выполнены условия теоремы 2.2. Тогда $b_0(x,u)\in L_1(\Omega)$, $b_1(x,u)\in L_{1,\mu}(\Omega)$, и при всех $k>1$ справедливы неравенства*

$$\int\limits_\Omega |\nabla T_k(u)|^p dx \leqslant Ck. \tag{6.1}$$

Доказательство. Запишем неравенство (2.10) при $\xi=0$

$$\int\limits_\Omega (a(x,\nabla u)\cdot\nabla T_k(u) - fT_k(u))dx + \langle \mathcal{B}u, T_k(u)\rangle \leqslant 0.$$

Из условия (2.5) следует неравенство

$$\int\limits_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla T_k(u)dx \geqslant \int\limits_\Omega (c_0|\nabla T_k(u)|^p - G(x))dx.$$

Таким образом,

$$\int\limits_\Omega (c_0|\nabla T_k(u)|^p + b_0(x,u)T_k(u))dx + \int\limits_\Omega b_1(x,u)T_k(u)d\mu \leqslant \int\limits_\Omega (G+fT_k(u))dx < \infty.$$

Следствием этого, ввиду (2.9), являются неравенства (6.1) и

$$\int\limits_\Omega |b_0(x,u)|\chi(|u|>1)dx + \int\limits_\Omega |b_1(x,u)|\chi(|u|>1)d\mu < \infty. \tag{6.2}$$

Из условий (2.11), (2.12) следует неравенство

$$\int\limits_\Omega |b_0(x,u)|\chi(|u|\leqslant 1)dx + \int\limits_\Omega |b_1(x,u)|\chi(|u|\leqslant 1)d\mu \leqslant \int\limits_\Omega (\widehat{G}_0(x)+\widehat{G}_1(x))dx < \infty,$$

соединив которое с (6.2), получаем первое из утверждений леммы. □

Лемма 6.2. *Пусть u — энтропийное решение задачи Зарембы для уравнения (2.1) и выполнены условия теоремы 2.2. Тогда (2.10) справедливо при $\xi\in V\cap L_\infty(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $\xi\in V$, $\|\xi\|_\infty\leqslant C_0$. Тогда найдется последовательность $v_i\in\mathcal{D}_\Gamma(\Omega)$ такая, что $\|v_i\|_\infty\leqslant C_0$, $\nabla v_i\to\nabla\xi$ в $L_p(\Omega)$. При этом $v_i\to\xi$ в $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и п.в. в Ω. В силу (2.3), имеем также сходимости $v_i\to\xi$ в $L_{q,\mathrm{loc},\mu}(\Omega)$ и μ–п.в. в Ω. Имеем

$$T_k(u-v_i)\to T_k(u-\xi)\ \text{ п.в. и } \mu\text{-п.в.}$$

Далее,

$$|\nabla T_k(u-v_i)| \leqslant |\nabla T_K(u)| + |\nabla v_i|,$$

где $K = k + C_0$. Нетрудно установить, что

$$\nabla T_k(u - v_i) \rightharpoonup \nabla T_k(u - \xi) \text{ слабо в } L_p(\Omega).$$

Пользуясь определением энтропийного решения, запишем неравенство

$$\int\limits_\Omega a(x, \nabla u)\nabla T_k(u - v_i)dx + \int\limits_\Omega b_0(x, u)T_k(u - v_i)dx \\ + \int\limits_\Omega b_1(x, u)T_k(u - v_i)d\mu \leqslant \int\limits_\Omega fT_k(u - v_i)dx.$$

Первый из интегралов имеет вид

$$\int\limits_\Omega a(x, \nabla T_K(u))\nabla T_k(u - v_i)dx,$$

причем, ввиду (2.4), $a(x, \nabla T_K(u)) \in L_{p'}(\Omega)$. Поэтому возможен предельный переход при $i \to \infty$ в этом интеграле. Предельный переход в оставшихся интегралах совершается по теореме Лебега с использованием леммы 6.1. □

Доказательство теоремы 2.2 основано на методе из работы [1].

Пользуясь определением энтропийного решения, запишем неравенство вида (2.10) для u_1 с $\xi = T_h(u_2)$

$$\int\limits_\Omega a(x, \nabla u_1)\nabla T_k(u_1 - T_h(u_2))dx + \int\limits_\Omega b_0(x, u_1)T_k(u_1 - T_h(u_2))dx \\ + \int\limits_\Omega b_1(x, u_1)T_k(u_1 - T_h(u_2))d\mu \leqslant \int\limits_\Omega fT_k(u_1 - T_h(u_2))dx. \tag{6.3}$$

Применяя его в случае $u_1 = u_2 = u$, будем иметь

$$\int\limits_\Omega a(x, \nabla u)\nabla T_k(u - T_h(u))dx + \int\limits_\Omega b_0(x, u)T_k(u - T_h(u))dx \\ + \int\limits_\Omega b_1(x, u)T_k(u - T_h(u))d\mu \leqslant \int\limits_\Omega fT_k(u - T_h(u))dx.$$

Используя (2.5) и (2.9), нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_{\{\Omega:\ h\leqslant|u|<h+k\}} |\nabla u|^p dx \leqslant \int\limits_{\{\Omega:\ |u|\geqslant h\}} (G + |f|k)dx = \varepsilon(h), \tag{6.4}$$

где $\varepsilon(h) \to 0$ при $h \to \infty$ (в силу леммы 3.4).

Складывая неравенство (6.3) с аналогичным для u_2, получим соотношение

$$\int\limits_{\{|u_1-T_h(u_2)|<k\}} a(x,\nabla u_1)\nabla T_k(u_1-T_h(u_2))dx$$
$$+\int\limits_{\{|u_2-T_h(u_1)|<k\}} a(x,\nabla u_2)\nabla T_k(u_2-T_h(u_1))dx$$
$$+\int\limits_{\Omega}(b_0(x,u_1)T_k(u_1-T_h(u_2))+b_0(x,u_2)T_k(u_2-T_h(u_1)))dx \tag{6.5}$$
$$+\int\limits_{\Omega}(b_1(x,u_1)T_k(u_1-T_h(u_2))+b_1(x,u_2)T_k(u_2-T_h(u_1)))d\mu$$
$$\leqslant\int\limits_{\Omega} f(T_k(u_1-T_h(u_2))+T_k(u_2-T_h(u_1)))dx.$$

Обозначим через I^1 сумму двух интегралов в (6.5), и I^2, I^3, I^4 — остальные интегралы соответственно. Имеем $I^1+I^2+I^3\leqslant I^4$. Чтобы совершить предельный переход $h\to\infty$, будем разбивать каждый из интегралов на несколько частей. Положим

$$A_0=\{x\in\Omega:\ |u_1-u_2|<k,\ |u_1|<h,\ |u_2|<h\}.$$

Сумму двух интегралов из (6.5) по этому множеству можно записать в виде

$$I_0=\int\limits_{A_0}(a(x,\nabla u_1)-a(x,\nabla u_2))\nabla(u_1-u_2)dx\geqslant 0.$$

Для интеграла по множеству

$$A_1=\{x\in\Omega:\ |u_1-u_2|<k,\ |u_2|\geqslant h\}$$

имеем

$$\int\limits_{A_1} a(x,\nabla u_1)\cdot\nabla(u_1-T_h(u_2))dx=\int\limits_{A_1} a(x,\nabla u_1)\cdot\nabla u_1 dx\geqslant-\int\limits_{\{|u_2|\geqslant h\}} G(x)dx=-\varepsilon(h).$$

Для оставшегося множества

$$A_2=\{x\in\Omega:\ |u_1-u_2|<k,\ |u_1|\geqslant h,\ |u_2|<h\}$$

имеем неравенство

$$\int\limits_{A_2} a(x,\nabla u_1)\nabla(u_1-T_h(u_2))dx\geqslant-\int\limits_{A_2}(G(x)+a(x,\nabla u_1)\nabla u_2 dx.$$

Очевидно,

$$\|a(x,\nabla u_1)\nabla u_2\|_{L_1(A_2)}\leqslant\|a(\nabla u_1)\|_{L_{p'}(h\leqslant|u_1|<h+k)}\|\nabla u_2\|_{L_p(h-k\leqslant|u_2|<h)}=\varepsilon_1(h).$$

Последнее равенство вытекает из (6.4) и (2.4).

Проведя аналогичные выкладки для второго интеграла в (6.5) и суммируя получившиеся результаты находим, что $I^1\geqslant I_0-\varepsilon_2(h)$.

Рассмотрим интеграл I^3 формулы (6.5). Этот интеграл по множеству

$$B_0(h)=\{x\in\Omega:\ |u_1|<h,\ |u_2|<h\}$$

дает величину

$$J_0 = \int\limits_{B_0(h)} (b_1(x,u_1) - b_1(x,u_2))T_k(u_1-u_2)d\mu \geqslant 0.$$

Интеграл I^3 по множеству

$$B_1 = \{x \in \Omega: \ |u_1| \geqslant h\},$$

с исчезающей мерой, при $h \to \infty$ дает величину, которая оценивается так:

$$|J_1| \leqslant k \int\limits_{B_1} (|b_1(x,u_1)| + |b_1(x,u_2))|)d\mu \leqslant \varepsilon_3(h).$$

Интеграл J_2 по оставшемуся множеству оценивается подобным образом $|J_2| \leqslant \varepsilon_4(h)$. В итоге имеем неравенство

$$I^3 \geqslant \int\limits_{B_0(h)} (b_1(x,u_1) - b_1(x,u_2))T_k(u_1-u_2)d\mu - \varepsilon_5(h).$$

Аналогично,

$$I^2 \geqslant \int\limits_{B_0(h)} (b_0(x,u_1) - b_0(x,u_2))T_k(u_1-u_2)dx - \varepsilon_6(h), \qquad I^4 \leqslant \varepsilon_7(h).$$

Суммируя полученные выше неравенства и отбрасывая некоторые неотрицательные слагаемые, находим, что

$$\int\limits_{B_0(h)} (b_0(x,u_1) - b_0(x,u_2))T_k(u_1-u_2)dx \leqslant \varepsilon_8(h).$$

Используя возрастание функции b_0 по второму аргументу, лемму 3.10, и переходя к пределу при $h \to \infty$ в этом неравенстве, получим

$$\int\limits_{\Omega} (b_0(x,u_1) - b_0(x,u_2))T_k(u_1-u_2)dx \leqslant 0.$$

Отсюда заключаем, что $u_1 = u_2$ почти всюду в Ω.

7. Некоторые примеры

Здесь приведем примеры функций b_0, b_1, удовлетворяющих требуемым условиям. Пусть $n=4$, $p=3$. Мера μ совпадает с лебеговой мерой, сосредоточенной на части плоскости

$$\{x \in \Omega : x_1 = 0, x_2 = 0\}.$$

Эта мера, как нетрудно заметить, принадлежит классу Морри $\mathfrak{M}_2(\Omega)$. Пусть $g(r)$, $r \geqslant 0$ — произвольная возрастающая функция. Положим

$$b_0(x,r) = G_0(x)g(|r|)r/|r|, \qquad b_1(x,r) = G_1(x)g(|r|)r/|r|,$$

где $G_0 \in L_1(\Omega)$, $G_1 \in L_{1,\mu}(\Omega)$, причем функция G_1 равна нулю за пределами носителя функции μ. Легко видеть, что условия (2.7)–(2.12), исключая неравенство (2.10), выполнены. Для теоремы существования годится также функция

$$b_0(x,r,y) = G_0(x)g(|r|)\frac{r|y|}{|r|(1+|y|)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ph. Benilan, L. Boccardo, Th. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J.L. Vazquez. *An L^1–theory of existence and nuniqueness of solutions of nonlinear elliptic equation* // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. **22**:2, 241–273 (1995).
2. N. Saintier, L. Véron. *Nonlinear elliptic equations with measure valued absorption potential* // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5) **22**:1, 351–397 (2021).
3. A. Malusa, M.M. Porzio. *Renormalized solutions to elliptic equations with measure data in unbounded domains* // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods **67**, 2370–2389 (2007).
4. Л.М. Кожевникова А.П. Кашникова. *Эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений нелинейной эллиптической задачи в пространствах Музилака — Орлича* // Дифферен. уравн. **59**:1, 35–50 (2023).
5. Л.М. Кожевникова. *Существование энтропийного решения нелинейной эллиптической задачи в неограниченной области* // Теор. мат. физ. **218**:1, 124–148 (2024).
6. S. Ouaro, N. Sawadogo. *Nonlinear elliptic $p(u)$–Laplacian problem with Fourier boundary condition* // Cubo **22**:1, 85–124 (2020).
7. В.Ф. Вильданова, Ф.Х. Мукминов. *Энтропийное решение для уравнения с мерозначным потенциалом в гиперболическом пространстве* // Мат. сб. **214**:11, 37–62 (2023).
8. F. Crispo, P. Maremonti. *An interpolation inequality in exterior domains* // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **112**, 11–39 (2004).
9. А.П. Кашникова, Л.М. Кожевникова. *Существование решений нелинейных эллиптических уравнений с данными в виде меры в пространствах Музилака — Орлича* // Мат. сб. **213**:4, 38–73 (2022).
10. M.B. Benboubker, E. Azroul, A. Barbara. *Quasilinear elliptic problems with nonstandard growth* // Electron. J. Differ. Equ. **2011**, 62 (2011).
11. Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. *Линейные операторы. Общая теория.* М.: ИЛ. 1962.
12. Ж.Л. Лионс. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* М.: Мир. 1972.

Фарит Хамзаевич Мукминов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: mfarith@yandex.ru

Олег Сергеевич Стехун,
Санкт–Петербургский государственный университет,
Лаборатория им. П.Л. Чебышева,
14 линия В.О., 29б,
199178, г. Санкт–Петербург, Россия
E-mail: stekhun@mail.ru