

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Э.Р. АНДРИЯНОВА

Аннотация. Рассматривается первая смешанная задача для некоторого класса параболических уравнений с двумя нестепенными нелинейностями в цилиндрической области $D = (t > 0) \times \Omega$. Методом галеркинских приближений, предложенным Ф.Х. Мукминовым для параболического уравнения с двойной нелинейностью, доказывается существование сильных решений в пространстве Соболева-Орлича. Установлены принцип максимума, а также оценки сверху и снизу, характеризующие степенное убывание решения при $t \rightarrow \infty$ для ограниченных и неограниченных областей $\Omega \subset R_n$.

Ключевые слова: параболическое уравнение, N -функции, существование решения, оценка скорости убывания решения, пространства Соболева-Орлича.

Mathematics Subject Classification: 35D05, 35B50, 35B45, 35K55

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω — произвольная область пространства $R_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ рассматривается уравнение вида

$$(\beta(x, u))_t = \sum_{i=1}^n (a_{p_i}(x, \nabla u))_{x_i}, \quad \text{где } a(x, \nabla u) = a(x, p) \Big|_{p=\nabla u}, \quad (1)$$

с краевыми и начальным условиями:

$$u(t, x) \Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \quad (2)$$

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (3)$$

Здесь и далее нижние индексы t, x_i, p_i обозначают производные по соответствующим переменным.

Предположим, что функция $a(x, p)$, выпуклая по $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, удовлетворяет условию Каратеодори при $p \in R_n$ и $x \in \Omega$. Функция $\beta(x, u)$, $\beta(x, 0) = 0$,

$$|\beta(x, u)| \leq c_\beta |u \beta'_u(x, u)|, \quad (4)$$

абсолютно непрерывна и возрастает по u , а также измерима по $x \in \Omega$ при $u \in R$.

Вопросы существования и единственности решения нелинейных параболических уравнений рассматривались в работах [1] – [4], [7], [19] – [25] и других. В основном рассматривались задачи в предположении ограниченности области Ω и на ограниченном промежутке времени $[0, T]$ с произвольным $T > 0$. В работе [1] было доказано существование слабых

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00081-а).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания организациям высшего образования.

Поступила 14 ноября 2013 г.

E.R. ANDRIYANOVA, ESTIMATES OF DECAY RATE FOR SOLUTION TO PARABOLIC EQUATION WITH NON-POWER NONLINEARITIES.

© Андриянова Э.Р. 2014.

решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью в ограниченной области. Существование слабого решения параболического уравнения с двумя переменными нелинейностями в подходящих пространствах Соболева-Орлича при ограниченной области Ω доказано в [2]. В [3] доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения задачи Дирихле для вырождающихся параболических уравнений линейных по ∇u и имеющих переменный показатель нелинейности по u . Существование W - и H -решений для параболических уравнений 2-го порядка с переменным порядком нелинейности было доказано в работе [4].

Работа со слабым решением вызывает затруднение в исследовании, например, убывания решения при $t \rightarrow \infty$. В данной работе для построения сильного решения задачи (1) – (3) сразу на всем промежутке времени $[0, \infty)$ использовался метод галеркинских приближений (область Ω может быть неограниченной). Этим методом было построено решение параболического уравнения с двойной нелинейностью в работе [5] на ограниченном промежутке $[0, T]$ при любом $T > 0$ и в работе [6] на неограниченном промежутке времени.

Галеркинские приближения являются гладкими функциями, что облегчает доказательство для них необходимых оценок, которые затем предельным переходом распространяются на решение задачи (1) – (3). В настоящей работе получены оценки сверху и снизу, характеризующие степенное убывание решения при $t \rightarrow \infty$ в случае как ограниченных, так и неограниченных областей $\Omega \subset R_n$.

Исследованию поведения решения смешанной задачи для изотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью при $t \rightarrow \infty$ посвящена работа [6], а для анизотропных параболических уравнений с двойной нелинейностью — работы [7] – [9]. В работе [10] изучалось свойство вырождения решения нелинейного параболического уравнения с нестандартными анизотропными условиями роста за конечный промежуток времени. Теми же авторами в [11] установлены достаточные условия для взрыва решения однородной задачи Дирихле для анизотропного параболического уравнения с переменной нелинейностью за конечный промежуток времени. В [12] были установлены оценки повышенной суммируемости градиента для слабого решения параболической системы переменного порядка нелинейности. Точные двусторонние оценки скорости убывания нормы решения линейного и квазилинейного параболического уравнения в неограниченной области установлены в работах [13, 14], а для анизотропного параболического уравнения — в [15]. Исследованию поведения решений линейных и квазилинейных параболических уравнений посвящены также работы [16] – [18].

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определим здесь используемые в работе функциональные пространства и приведем некоторые известные факты из теории пространств Соболева-Орлича [26].

Будем говорить, что N -функция $B(s)$ удовлетворяет Δ_2 -условию при больших значениях s , если существуют такие числа $k > 0$, $s_0 > 0$, что $B(2s) \leq kB(s) \forall s \geq s_0$. Δ_2 -условие эквивалентно выполнению при больших s неравенства

$$B(ls) \leq kl^m B(s), \quad (5)$$

где l может быть любым числом, большим единицы, m — больше нуля. Обычно рассматривают только ограниченные области, и тогда достаточно выполнения условия (5) при $s \geq s_0 > 1$. Если же область неограниченная, то (см., например, доказательство леммы 1 ниже) приходится полагать $s_0 = 0$. В дальнейшем в работе предполагается, что все рассматриваемые N -функции удовлетворяют Δ_2 -условию при всех значениях $s > 0$ (т.е. $s_0 = 0$). Будем обозначать все N -функции заглавными латинскими буквами.

Все постоянные, встречающиеся в работе, положительны.

N -функция

$$\overline{B}(z) = \sup_{t \geq 0} (t|z| - B(t))$$

называется дополнительной. Известно следующее свойство дополнительных функций (см. [26]):

$$|zs| \leq B(z) + \bar{B}(s). \quad (6)$$

Для N -функций будем писать $B_1(s) \prec B_2(s)$, если существуют константы s_0, k , такие, что

$$B_1(s) \leq B_2(ks), \quad \text{для } s \geq s_0. \quad (7)$$

Пусть при почти всех $x \in \Omega$ функция $\beta_1(x, u)$ абсолютно непрерывна по $u \in R$ и определена равенством

$$\beta'_{1u}(x, u) = u\beta'_u(x, u), \quad \beta_1(x, 0) = 0. \quad (8)$$

При этом предполагается, что $\beta'_u(x, u) \geq 0$ — четная по u , ограниченная в каждой ограниченной области значений x, u функция, не равная нулю почти всюду ни в каком интервале по u .

Пусть для любых $u \in R, p \in R^n$ и $x \in \Omega$ выполняются следующие условия:

$$\sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, p)p_i \geq \sum_{i=1}^n B_i(p_i); \quad (9)$$

$$\Gamma \sum_{i=1}^n B_i(p_i) \geq a(x, p) \geq \delta \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, p)p_i; \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{B}_i(a_{p_i}(x, p)) \leq c \sum_{i=1}^n B_i(p_i); \quad (11)$$

$$u\beta'_{1u}(x, u) \leq \alpha\beta_1(x, u), \quad \alpha > 0, \quad \forall u \in R. \quad (12)$$

Здесь $B_1(z), B_2(z), \dots, B_n(z)$ являются N -функциями.

Предполагается существование N -функции $G(s)$ (тогда $G(s^2)$ также является N -функцией) такой, что

$$G(u^2) \leq \beta_1(x, u) \leq c_1 G(u^2); \quad (13)$$

$$\bar{G}(\beta'_u(x, u)) \leq c_2 G(u^2). \quad (14)$$

Здесь и далее через c_1, c_2, \dots обозначаем постоянные, которые, вообще говоря, могут не совпадать даже при одинаковых индексах.

Через $L_B(Q)$ обозначим пространство Орлича, соответствующее N -функции $B(s)$, с нормой Люксембурга

$$\|u\|_{L_B(Q)} = \|u\|_{B, Q} = \inf \{k \geq 0 : \int_Q B\left(\frac{u(x)}{k}\right) dx \leq 1\}.$$

Ниже в качестве Q могут выступать области Ω, D^T и другие.

Пространства Орлича, соответствующие N -функции $G(s^2)$, будем обозначать $L_{G_2}(Q)$ и через $L_{\bar{G}_2}(Q)$ — сопряженные к ним.

Определим также пространство Соболева-Орлича $\overset{\circ}{W}_{G, B}^1(\Omega)$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}_{G, B}^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{B_i, \Omega} + \|u\|_{G_2, \Omega}.$$

Через $V(D^T)$ будем обозначать пополнение $C_0^\infty(D^T)$ по норме

$$\|u\|_{V(D^T)} = \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{B_i, D^T} + \|u\|_{G_2, D^T}.$$

Для нормы Люксембурга выполнено неравенство (см. [26])

$$\|u(x)\|_{L_B(Q)} \leq 1 + \int_Q B(u(x)) dx. \quad (15)$$

Справедливо следующее простое утверждение.

Лемма 1. *Если $u_j \rightarrow u$ в $L_B(\Omega)$ и B удовлетворяет Δ_2 -условию, то существует C такое, что*

$$\int_{\Omega} B(u_j) dx \leq C.$$

Доказательство. Поскольку последовательность u_j сходится, то $\|u_j\|_{L_B(\Omega)} \leq c$. Тогда, воспользовавшись Δ_2 -условием, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} B(u_j) dx &= \int_{\Omega} B\left(\|u_j\|_{L_B(\Omega)} \frac{u_j}{\|u_j\|_{L_B(\Omega)}}\right) dx \leq \int_{\Omega} B\left(c \frac{u_j}{\|u_j\|_{L_B(\Omega)}}\right) dx \leq \\ &\leq kc^m \int_{\Omega} B\left(\frac{u_j}{\|u_j\|_{L_B(\Omega)}}\right) dx \leq kc^m. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Определим функцию $h(s)$ следующим образом

$$h(s) = s^{-\frac{1}{n}} \left(\prod_{i=1}^n \tilde{B}_i^{-1}(s) \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (16)$$

где

$$\tilde{B}_i(s) = \begin{cases} B_i(s), & \text{при } |s| \geq 1, \\ s^{\kappa} B_i(1), & \text{при } |s| \leq 1. \end{cases}$$

Отметим, что поскольку функции B_i — выпуклые, то выполняется неравенство $B'_i(1+) > B_i(1)$. Выберем $\kappa \in (1, n)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$B'_i(1) > \kappa B_i(1), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Определим также N -функцию $B^*(z)$ по формуле

$$(B^*)^{-1}(z) = \int_0^{|z|} \frac{h(s)}{s} ds, \quad (18)$$

если интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{h(s)}{s} ds \quad (19)$$

расходится к бесконечности и

$$\|u\|_{B^*, Q} = \sup_Q |u|,$$

если интеграл (19) ограничен. Сходимость последнего интеграла в нуле обеспечена неравенством $\kappa < n$. Известна теорема вложения А. Г. Королева [27], вытекающая из неравенства

$$\|u\|_{B^*, Q} \leq C \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{\tilde{B}_i, Q}, \quad (20)$$

справедливого для функций $u \in C_0^\infty(Q)$ в случае сходимости интеграла $\int_0^1 \frac{h(s)}{s} ds$ в нуле.

Отметим, что неравенство (20), доказанное в [27] для ограниченных областей, справедливо также для неограниченных областей Q , имеющих конечную меру.

3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Теорема 1. Пусть $u_0 \in \overset{\circ}{W}_{G,B}^1(\Omega)$ и выполняются условия (9)–(14). Тогда существует обобщенное решение задачи (1)–(3), удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{aligned} u &\in L_\infty([0, \infty); \overset{\circ}{W}_{G,B}^1(\Omega)), \\ \beta(x, u) &\in C([0, \infty); L_{\overline{G}_2}(\Omega)), \\ (\beta(x, u))_t &\in L_{\overline{G}_2}(D^T), \\ (\beta'_u(x, u))^{\frac{1}{2}} u_t &\in L_2(D^T), \quad \forall T > 0. \end{aligned}$$

Единственность решения задачи (1)–(3), со свойствами, установленными в теореме 1, будет доказана в другой работе. Формально можно считать, что в ниже следующих утверждениях речь идет о произвольном решении со свойствами, установленными в теореме 1.

Лемма 2. Пусть Ω — ограниченная область. Если начальная функция ограничена ($u_0(x) \leq b$), то обобщенное решение задачи (1)–(3) является ограниченным, т.е.

$$\text{vraisup}_D u(t, x) \leq b.$$

Замечание. Если начальная функция удовлетворяет неравенству $u_0(x) \geq -b$, то функция $-u$ будет являться решением некоего другого уравнения, но из того же рассматриваемого класса (ввиду четности N -функций). Поэтому, применив лемму к функции $-u$, получим $-u \leq b$, или $u \geq -b$.

Лемма 3. Пусть область Ω расположена в полупространстве $x_1 > 0$ и $\int_1^\infty \frac{h(s)}{s} ds = \infty$, а также выполняется условие

$$B_1 \prec B^*. \tag{21}$$

Тогда, если начальная функция ограничена ($u_0(x) \leq b$), то обобщенное решение задачи (1)–(3) является ограниченным, т.е.

$$\text{vraisup}_D u(t, x) \leq b. \tag{22}$$

Лемма 4. Пусть область Ω произвольна и $\int_1^\infty \frac{h(s)}{s} ds < \infty$. Тогда для любой функции $u \in V(D^T)$ справедливо неравенство

$$\text{vraisup}_{D^T} |u(t, x)| \leq c, \tag{23}$$

где c — возрастающая функция от $\|u\|_{V(D^T)}$.

При оценке снизу нормы решения задачи (1)–(3) потребуется следующее условие: существуют числа $q > 1$, $c > 0$ такие, что справедливо неравенство

$$\beta_1^q(x, u) \leq c(B^*(u) + 1), \quad x \in \Omega, \quad u \in R. \tag{24}$$

Теорема 2. Пусть область Ω ограничена и выполнены условия (9)–(14), а также условие (24), если интеграл (19) расходится. Тогда существует положительное число C ($C = C(u_0)$) такое, что для решения $u(t, x)$ задачи (1)–(3) выполнены неравенства

$$\int_\Omega G(u^2(t, x)) dx \geq \int_\Omega G(u_0^2(x)) dx (1 + Ct)^{\frac{1}{1-\gamma}}, \quad \text{при } \gamma > 1, \quad t \geq 0, \tag{25}$$

$$\int_{\Omega} G(u^2(t, x)) dx \geq \int_{\Omega} G(u_0^2(x)) dx (1 - Ct)^{\frac{1}{1-\gamma}}, \text{ при } \gamma < 1, t \leq 1/C, \quad (26)$$

где $\gamma = \frac{1}{\Gamma(\max(2, \alpha))}$.

Замечание. Случай $\gamma = 1$ загрубляем до $\gamma < 1$ увеличением Γ .

В следующем утверждении рассматривается область Ω , расположенная вдоль оси Ox_1 . Далее будем использовать обозначение $\Omega_a^b = \{x \in \Omega | a < x_1 < b\}$, при этом значения $a = 0, b = \infty$ опускаются. Положим $S(r) = \{x \in \Omega | x_1 = r\}$. Предполагается, что $\Omega_{-\infty}^0 = \emptyset$, и существует число $d > 0$ такое, что

$$\text{mes}(\Omega^r) \leq r^d, \quad r \geq r_0. \quad (27)$$

Для изучения убывания решения задачи (1)–(3) при $x_1 \rightarrow \infty$, определим функцию

$$\nu(r) = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \sup \left\{ z : \int_{S(r)} B_2(zu) dx' \leq \int_{S(r)} B_2(u_{x_2}) dx' \right\}, \quad (28)$$

где $x' = \{x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Будем считать, что область Ω удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty \nu(r) dr = \infty. \quad (29)$$

Предположим, что начальная функция имеет ограниченный носитель:

$$\text{supp} u_0 \subset \Omega^{r_0}, \quad r_0 > 0. \quad (30)$$

Пусть

$$B_1(s) \leq g B_2(s), \quad s < 1, \quad g \geq 1. \quad (31)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (9)–(14), (21), (29) – (31), область Ω расположена вдоль оси Ox_1 и выполнены неравенства

$$\nu(r) \leq \nu_0, \quad \text{при } r \geq r_0; \quad |u_0(x)| \leq \nu_0, \quad x \in \Omega. \quad (32)$$

Тогда решение $u(t, x)$ задачи (1)–(3) при всех $t \geq 0, r \geq 2r_0$ подчиняется оценке

$$\int_{\Omega_r} \beta_1(x, u(t, x)) dx \leq M \exp \left(-\lambda \int_{2R_0}^r \nu(\rho) d\rho \right), \quad (33)$$

с некоторыми числами $M, \lambda > 0$.

В следующей теореме предполагается, что существует число $q > 1$ такое, что функция $\beta_1(x, u)$ удовлетворяет соотношению

$$(\beta_1(x, u))^q \leq c_3 B_1(u), \quad \forall u \in R. \quad (34)$$

Возьмем μ так, чтобы

$$\mu > m + d(q - 1), \quad (35)$$

где m – число из Δ_2 -условия (5) для функции B_1 и d из (27). Пусть $r(t)$ произвольная положительная функция, удовлетворяющая неравенству

$$M \exp \left(-\lambda \int_{2r_0}^{r(t)} \nu(\rho) d\rho \right) \leq \left(\frac{r^\mu(t)}{(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad (36)$$

при t настолько больших, что $r(t) \geq 2r_0$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (9)–(14), (21), (29)–(32), (34), и область Ω расположена вдоль оси Ox_1 . Тогда для решения $u(t, x)$ задачи (1)–(3) справедлива оценка

$$\int_{\Omega} \beta_1(x, u(t, x)) dx \leq C(r^\mu(t)t^{-1})^{\frac{1}{q-1}}, \quad C = 2(q-1)^{\frac{1}{1-q}} \quad (37)$$

при t таких, что $r(t) \geq 2r_0$.

Если вместо (29) будет выполнено более сильное требование

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r \nu(t) dt = \infty, \quad (38)$$

то можно выбрать $r(t) = t^{\frac{1}{2\mu}}$, тогда оценка (37) примет вид

$$\int_{\Omega} \beta_1(x, u(t, x)) dx \leq Ct^{\frac{-1}{2(q-1)}}. \quad (39)$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Обобщенным решением задачи (1)–(3) назовем функцию $u(t, x)$, принадлежащую пространству $V(D^T)$ при каждом $T > 0$, и удовлетворяющую при $\varphi \in C_0^\infty(D_{-1}^T)$ равенству

$$\int_{D^T} \left(-\beta(x, u)\varphi_t(t, x) + \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, \nabla u)\varphi_{x_i}(t, x) \right) dx dt = \int_{\Omega} \beta(x, u_0)\varphi(0, x) dx. \quad (40)$$

Выберем последовательность $\omega_k \in C_0^\infty(\Omega)$ линейно независимых функций, линейная оболочка которых плотна в $\dot{W}_{G,B}^1(\Omega)$. Положим $I_m = \cup_{k=1}^m \text{supp } \omega_k$. Галеркинские приближения к решению будем искать в виде

$$u_m(t, x) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t)\omega_k(x),$$

где функции $c_{mk}(t)$ определяются из уравнений

$$\int_{\Omega} \left(\omega_j \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_m}{b_m} + \beta(x, u_m) \right) + \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, \nabla u_m)(\omega_j)_{x_i} \right) dx = 0, \quad (41)$$

$j = 1, 2, \dots, m.$

Числа $b_m > 0$ выберем позже. Убедимся, что уравнения (41) разрешимы относительно производных c'_{mk} . Очевидно, что они имеют вид

$$\sum_{k=1}^m A_{jk}(t)c'_{mk} = F_j(c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mm}).$$

Матрица коэффициентов

$$A_{jk}(t) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{b_m} + \beta'_u(x, u_m) \right) \omega_j \omega_k dx$$

при каждом t является матрицей Грама системы линейно независимых векторов ω_k , $k = 1, 2, \dots, m$ и поэтому имеет обратную. Из уравнений (41) при начальных условиях $c_{mk}(0)$, подобранных так, чтобы $u_m(0, x) \rightarrow u_0(x)$ в $\dot{W}_{G,B}^1(\Omega)$, находим функции $c_{mk}(t)$. Сначала эти функции находятся на малом промежутке времени, но установленная ниже ограниченность галеркинских приближений позволяет определить их на бесконечном промежутке времени. Числа b_m выберем так, чтобы $\|u_m(0)\|_2^2/b_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Установим теперь оценки для галеркинских приближений. Умножим уравнения (41) на $c_{mj}(t)$, просуммируем и воспользуемся формулой (8), тогда

$$\int_{\Omega} \left(\left(\frac{u_m^2}{2b_m} \right)_t + \beta'_{1u}(x, u_m)(u_m)_t + \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, \nabla u_m) u_{mx_i} \right) dx = 0. \quad (42)$$

Воспользовавшись неравенством (9) получим:

$$\int_{\Omega} \left(\left(\frac{u_m^2}{2b_m} \right)_t + (\beta_1(x, u_m))_t + \sum_{i=1}^n B_i(u_{mx_i}) \right) dx \leq 0.$$

Проинтегрировав по t , ввиду (13), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^2(t, x)}{2b_m} + G(u_m^2(t, x)) \right) dx + \int_{D_0^t} \sum_{i=1}^n B_i(u_{mx_i}) dx dt &\leq \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^2(0, x)}{2b_m} + c_1 G(u_m^2(0, x)) \right) dx. \end{aligned}$$

Последний интеграл в правой части ограничен, ввиду выбранных выше сходимостей. Таким образом, получим следующую оценку

$$\int_{\Omega} G(u_m^2(t, x)) dx + \int_{D_0^t} \sum_{i=1}^n B_i(u_{mx_i}) dx dt \leq \bar{c}. \quad (43)$$

Теперь из (43) следует ограниченность последовательности u_m в пространстве $L_{\infty}([0, T]; L_{G_2}(\Omega))$ и в пространстве $V(D^T)$ при всех $T > 0$.

Далее, умножив уравнения (41) на $c'_{mj}(t)$ и просуммировав, получим:

$$\int_{\Omega} \left(\left(\frac{1}{b_m} + \beta'_u(x, u_m) \right) (u_m)_t^2 + \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, \nabla u_m) (u_{mx_i})_t \right) dx = 0,$$

или

$$\int_{\Omega} \left(\left(\frac{1}{b_m} + \beta'_u(x, u_m) \right) (u_m)_t^2 + a(x, \nabla u_m)_t \right) dx = 0. \quad (44)$$

Проинтегрируем последнее равенство по t :

$$\begin{aligned} \int_{D^T} \left(\frac{1}{b_m} + \beta'_u(x, u_m) \right) (u_m)_t^2 dx dt + \int_{\Omega} a(x, \nabla u_m(T, x)) dx &= \\ &= \int_{\Omega} a(x, \nabla u_m(0, x)) dx = I_{\Omega}. \end{aligned} \quad (45)$$

Для оценки интеграла I_{Ω} воспользуемся неравенством (10) и леммой 1, получим

$$I_{\Omega} \leq \Gamma \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n B_i(u_{mx_i}(0, x)) dx \leq C.$$

Соединив последнюю оценку и равенство (45), а также применив (10) и (9), получим

$$\int_{D^T} (\beta'_u(x, u_m)) (u_{mt})^2 dx dt + \delta \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n B_i(u_{mx_i}(T, x)) dx \leq C.$$

Поэтому из последнего неравенства, а также (43) устанавливаем ограниченность последовательности $(\beta'_u)^{\frac{1}{2}}(u_m)_t$ в $L_2(D^T)$ при каждом $T > 0$ и последовательности u_m в пространстве $L_\infty([0, \infty]; \overset{\circ}{W}_{G,B}^1(\Omega))$.

Установленные факты позволяют диагональным процессом выбрать подпоследовательность u_{m_k} , слабо сходящуюся в указанных ниже пространствах. Для упрощения записи под индекс k в подпоследовательностях будем опускать

$$u_m \rightarrow u \text{ слабо в } V(D^T),$$

$$(\beta'_u(x, u_m))^{\frac{1}{2}}(u_m)_t \rightarrow \tilde{u} \text{ слабо в } L_2(D^T), \forall T > 0.$$

Покажем, что функционал

$$\tilde{a}(u_m) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{p_i}(x, \nabla u_m),$$

в силу (11), ограничен в единичном шаре пространства $V(D^T)$

$$(\tilde{a}(u_m), v) = \sum_{i=1}^n \int_{D^T} a_{p_i}(x, \nabla u_m) v_{x_i} dx dt \leq \sum_{i=1}^n \int_{D^T} (B_i(v_{x_i}) + \bar{B}_i(a_{p_i}(x, \nabla u_m))) dx dt \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \int_{D^T} (B_i(v_{x_i}) + cB_i(u_{x_i})) dx dt \leq c_1, \quad \|v\|_{V(D^T)} \leq 1.$$

Следовательно, $\tilde{a}(u_m)$ – ограниченная последовательность в пространстве $(V(D^T))'$, и из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность

$$\tilde{a}(u_m) \rightarrow \chi \quad \text{слабо в } (V(D^T))'.$$

Сходимость имеет место при каждом $T = 1, 2, \dots$, причем предельные функции совпадают в общей области определения. Тогда, фактически, сходимость имеет место при любом $T > 0$.

Ниже будет доказано, что $\tilde{u} = (\beta'_u(x, u))^{\frac{1}{2}} u_t$, $\chi = \tilde{a}(u)$, и функция u является обобщенным решением задачи (1)-(3). Соответствующие рассуждения разобьем на три шага.

ШАГ 1. Последовательность $u_m(t)$ ограничена в пространстве $\overset{\circ}{W}_{G,B}^1(\Omega)$ при любом $t > 0$:

$$\|u_m(t)\|_{W_{G,B}^1(\Omega)} \leq C, \quad m = 1, 2, \dots$$

Зафиксируем счетное плотное подмножество $\{t_s\} \subset [0, \infty]$. Можно считать, что $t_0 = 0$. Для каждой ограниченной области $\Omega^r \subset \Omega$ с гладкой границей известна компактность вложения $W_1^1(\Omega^r) \subset L_1(\Omega^r)$. Так как $\overset{\circ}{W}_{G,B}^1(\Omega) \subset W_1^1(\Omega^r)$, то диагональным процессом можно выделить подпоследовательность $u_{m_k}(t_s) \rightarrow h_s$ сильно в $L_1(\Omega^r)$ при всех натуральных s . Выбирая еще раз подпоследовательность, можно считать также (отбрасывая подиндексы), что $u_m(t_s, x) \rightarrow h_s(x)$ почти всюду в Ω^r при каждом t_s . В частности, при $t_0 = 0$ имеем $u_m(0, x) \rightarrow u_0(x)$ почти всюду в Ω .

Для следующего шага используем лемму, доказанную в [6].

Лемма 5. Пусть последовательность $v_m(t) \in C([0, T]; L_2(\Omega))$ обладает свойствами:

- 1) $v_m(t_s, x)$ сходится почти всюду в Ω^r , при каждом t_s и некотором $r > 0$,
- 2) последовательность v_{m_t} ограничена в $L_2(D^T)$.

Тогда можно выделить подпоследовательность v_{m_k} , сходящуюся к функции v в пространстве $C([0, T]; L_1(\Omega^r))$, и $v_{m_k} \rightarrow v$ почти всюду в $(0, T) \times \Omega^r$.

ШАГ 2. К последовательности $v_m = f(x, u_m) = \int_0^{u_m} (\beta'_u(x, \tau))^{\frac{1}{2}} d\tau$ применим лемму 5. Тогда

$(v_m)_t = (\beta'_u)^{\frac{1}{2}}(u_m)_t$. Принадлежность $v_m(t)$ к $L_2(\Omega)$ при каждом $t > 0$ следует из ограниченности носителя функции $u_m(t)$, ее гладкости и ограниченности $\beta'_u(x, u)$ на ограниченном

множестве значений аргументов. Благодаря произвольности $r > 0$ и $T = 1, 2, \dots$, диагональным процессом можно выделить подпоследовательность v_{m_k} , сходящуюся в D почти всюду. Так как β'_u не зануляется целиком на интервалах, то $f(x, u_m)$ возрастающая по u_m функция и имеет обратную, $u_m = f^{-1}(x, v_m)$. Тогда из сходимости последовательности v_{m_k} следует сходимость последовательности u_{m_k} почти всюду в D к u . То, что предельная функция будет именно u , вытекает из следующего утверждения (см. [19, гл.1, §1.4, лемма 1.3]):

Лемма 6. Пусть последовательность g_m сходится к g почти всюду в Q и ограничена в $L_q(Q)$. Тогда $g_m \rightarrow g$ слабо в $L_q(Q)$.

Неравенство $\int_{\Omega^r} u^2 dx \leq \int_{\Omega^r} (G(u^2) + \bar{G}(1)) dx$ влечет непрерывность вложения $V(D^T) \subset L_2([0, T] \times \Omega^r)$. Поэтому слабая сходимость $u_m \rightarrow u$ в $V(D^T)$ влечет слабую сходимость $u_m \rightarrow u$ в $L_2([0, T] \times \Omega^r)$. Из леммы 6 следует также, что $v_{m_k} \rightarrow v = \int_0^u (\beta'_u(x, \tau))^{\frac{1}{2}} d\tau$ слабо в $L_2(D^T)$ при каждом $T > 0$.

Из леммы 5 известно, что $v_{m_k}(T) \rightarrow v(T)$ в $L_1(\Omega^r)$. Тогда можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в Ω^r : $v_{m_k}(T, x) \rightarrow v(T, x) \Rightarrow u_{m_k}(T, x) \rightarrow u(T, x)$ почти всюду в Ω^r (а, следовательно, и в Ω). Ограниченность последовательности $u_m(T)$ в пространстве $\dot{W}_{G,B}^1(\Omega)$ позволяет выделить подпоследовательность такую, что

$$u_{m_k}(T) \rightarrow u(T) \text{ слабо в } \dot{W}_{G,B}^1(\Omega), \text{ при фиксированном } T. \quad (46)$$

Отсюда следует, что $u \in L_\infty([0, \infty); \dot{W}_{G,B}^1(\Omega))$.

Далее, $((v_m)_t, \varphi)_{D^T} = -(v_m, \varphi_t)_{D^T}$, $\varphi \in C_0^\infty(D^T)$. Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим

$$(\tilde{u}, \varphi)_{D^T} = -(v, \varphi_t)_{D^T}.$$

Отсюда следует, что $\tilde{u} = v_t = (\beta'_u(x, u))^{\frac{1}{2}} u_t$.

Покажем, что последовательность $\beta'_u(x, u_m)(u_m)_t$ ограничена в $L_{\bar{G}_2}(D^T)$. В самом деле,

$$\begin{aligned} |(\beta'_u(x, u_m)(u_m)_t, \varphi)_{D^T}| &= |((\beta'_u)^{\frac{1}{2}}(u_m)_t, \varphi(\beta'_u)^{\frac{1}{2}})_{D^T}| \leq c \|\varphi(\beta'_u)^{\frac{1}{2}}\|_{L_2(D^T)} \leq \\ &\leq c_1 \left(\int_{D^T} G(\varphi^2) dx dt + \int_{D^T} \bar{G}(\beta'_u(u_m)) dx dt \right)^{\frac{1}{2}} < c_2, \quad \|\varphi\|_{G_2, D^T} \leq 1, \end{aligned}$$

поскольку последний интеграл оценивается по формуле (14). Тогда можно считать, что $\beta'_u(x, u_m)(u_m)_t \rightarrow \bar{u}$ слабо в $L_{\bar{G}_2}(D^T)$.

Покажем теперь, что $\beta(x, u(t, x))$ принадлежит пространству $C([0, \infty]; L_{\bar{G}_2}(\Omega))$. Рассмотрим функционал

$$l(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi(x) \beta(x, u(t, x)) dx.$$

Используя (4), покажем его ограниченность в единичном шаре пространства $L_{G_2}(\Omega)$

$$|l(\varphi)| \leq c_\beta \int_{\Omega} |\varphi u \beta'_u(x, u)| dx \leq c_\beta \int_{\Omega} (\bar{G}(\beta'_u(x, u)) + G(|\varphi u|)) dx. \quad (47)$$

Первый из интегралов в правой части неравенства ограничен благодаря условию (14). Оценим второй интеграл

$$G(|\varphi u|) \leq G\left(\frac{\varphi^2 + u^2}{2}\right) \leq G(\varphi^2) + G(u^2).$$

Поскольку $\int_{\Omega} G(\varphi^2) dx \leq 1$, получаем ограниченность второго интеграла в правой части (47). Ограниченность функционала постоянной, не зависящей от $t \in [0, \infty)$, обеспечивает принадлежность $\beta(x, u)$ пространству $L_{\infty}([0, \infty); L_{\overline{G}_2}(\Omega))$. Переходя к пределу в равенстве

$$(\beta(x, u_m), \varphi_t)_{D^T} = -(\beta'_u(x, u_m)(u_m)_t, \varphi)_{D^T},$$

получаем, что

$$(\beta(x, u), \varphi_t)_{D^T} = -(\bar{u}, \varphi)_{D^T},$$

то есть $(\beta(x, u))_t = \bar{u} \in L_{\overline{G}_2}(D^T)$. Следовательно, ввиду произвольности $T > 0$, $\beta(x, u) \in C([0, \infty); L_{\overline{G}_2}(\Omega))$. При этом

$$\beta(x, u(0)) = \beta(x, u_0). \quad (48)$$

В самом деле, в шаге 1 отмечалась сходимость $u_m(0, x) \rightarrow u_0(x)$ почти всюду в Ω . Далее, по лемме 5 сходимость $v_m(0) \rightarrow v(0)$ в $L_1(\Omega^r)$, $r > 0$, влечет сходимость $u_m(0, x) = f^{-1}(x, v_m(0, x)) \rightarrow u(0, x)$ почти всюду в Ω по подходящей подпоследовательности, что обеспечивает равенство (48).

Шаг 3. Переходим к доказательству равенства $\chi = \tilde{a}(u)$. Умножим уравнение (41) на гладкую функцию $d_j(t)$, проинтегрируем по t и перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$, обозначив $d_j(t)\omega_j(x)$ через φ в конечном выражении

$$(\beta_t(x, u), \varphi)_{D^T} + (\chi, \varphi)_{D^T} = 0. \quad (49)$$

Отметим, что

$$\left(\frac{(u_m)_t}{b_m}, \varphi\right)_{D^T} = \frac{1}{b_m} \left(- (u_m, \varphi_t)_{D^T} + (u_m(T), \varphi(T))_{\Omega} - (u_m(0), \varphi(0))_{\Omega}\right) \rightarrow 0$$

в силу ограниченности u_m в $L_{\infty}([0, T]; L_{G_2}(\Omega))$ и того, что $b_m \rightarrow \infty$. Легко видеть также, что любая функция из $V(D^T)$ может быть приближена линейными комбинациями вида

$$\sum_{i=1}^N d_j(t)\omega_j(x).$$

Поэтому (49) справедливо и для функций φ из пространства $V(D^T)$. Таким образом, u будет являться обобщенным решением задачи (1)–(3), если будет установлено, что $\chi = \tilde{a}(u)$.

Пусть $w_m = (\beta_1(x, u_m))^{1/2}$, $w_m \rightarrow w = (\beta_1(x, u))^{1/2}$ почти всюду в D . Если будет установлено, что $w \in L_2(D^T)$ имеет обобщенную производную $w_t \in L_2(D^T)$, то будет выполнено тождество

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \|w\|_2^2 dt = \|w(T)\|_{L_2(\Omega)} - \|w(0)\|_{L_2(\Omega)}. \quad (50)$$

Воспользуемся (13)

$$\int_{\Omega} \beta_1(x, u_m(T, x)) dx \leq c_1 \int_{\Omega} G(u_m^2(T, x)) dx < c_2. \quad (51)$$

Значит последовательность $w_m(T)$ ограничена в $L_2(\Omega)$, и по лемме 6 из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $w(T)$ слабо в $L_2(\Omega)$. Заметим, что тогда $\|w\|_2^2 = \lim(w, w_m) \leq \liminf \|w\|_2 \|w_m\|_2$. Откуда следует неравенство

$$\liminf \|\beta_1(x, u_m(T))\|_{L_1(\Omega)} \geq \|\beta_1(x, u(T))\|_{L_1(\Omega)}. \quad (52)$$

Проинтегрировав неравенство (51) по T , получаем, что последовательность w_m ограничена в $L_2(D^T)$, и по лемме 6 из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к w слабо в $L_2(D^T)$.

Для доказательства того, что $w_t \in L_2(D^T)$, применим условие (12), тогда

$$\begin{aligned} \int_{D^T} \left((\beta_1^{\frac{1}{2}}(x, u_m))_t \right)^2 dxdt &= \int_{D^T} \left(\frac{\beta'_{1u}(x, u_m)(u_m)_t}{2\beta_1^{\frac{1}{2}}(x, u_m)} \right)^2 dxdt \leq \\ &\leq \int_{D^T} \frac{\alpha(\beta'_{1u}(x, u_m))^2 (u_m)_t^2}{4u\beta'_{1u}(x, u_m)} dxdt = \frac{\alpha}{4} \int_{D^T} \beta'_u(x, u_m)(u_m)_t^2 dxdt < c. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из (45). Следовательно, $(w_m)_t$ слабо сходится к \bar{w} в $L_2(D^T)$. Далее, $(w_m, \varphi_t)_{D^T} = -((w_m)_t, \varphi)_{D^T}$, $\varphi \in C_0^\infty(D^T)$. Переходя к пределу, получим $(w, \varphi_t)_{D^T} = -(\bar{w}, \varphi)_{D^T}$. Значит $\bar{w} = w_t$.

Подставляя в (49) $\varphi = u$ и применяя (50), получаем

$$\begin{aligned} (-\chi, u)_{D^T} &= ((\beta(x, u))_t, u)_{D^T} = \int_{D^T} \beta'_{1u}(x, u)u_t dxdt = \tag{53} \\ &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \|\beta_1^{\frac{1}{2}}(x, u)\|_2^2 dt = \|\beta_1(u(T))\|_{L_1(\Omega)} - \|\beta_1(u(0))\|_{L_1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Далее используется монотонность оператора \tilde{a} . Легко проверить (см. [19, гл.2, §1, предложение 1.1]), что

$$X_m = \int_0^T (\tilde{a}(u_m(t)) - \tilde{a}(h(t)), u_m(t) - h(t))_\Omega dt \geq 0, \quad \forall h \in V(D^T).$$

Из уравнений (41) легко выводятся соотношения

$$\begin{aligned} (\tilde{a}(u_m), u_m)_{D^T} &= \|\beta_1(u_m(0))\|_{L_1(\Omega)} - \|\beta_1(u_m(T))\|_{L_1(\Omega)} + \tag{54} \\ &+ \frac{1}{2b_m} (\|u_m(0)\|_2^2 - \|u_m(T)\|_2^2). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} X_m &= \|\beta_1(u_m(0))\|_{L_1(\Omega)} - \|\beta_1(u_m(T))\|_{L_1(\Omega)} + \frac{1}{2b_m} (\|u_m(0)\|_2^2 - \|u_m(T)\|_2^2) - \\ &- (\tilde{a}(u_m), h)_{D^T} - (\tilde{a}(h), u_m - h)_{D^T}. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь (52), выводим

$$\begin{aligned} 0 \leq \limsup X_m &\leq \|\beta_1(u(0))\|_{L_1(\Omega)} - \|\beta_1(u(T))\|_{L_1(\Omega)} - \\ &- (\chi, h)_{D^T} - (\tilde{a}(h), u - h)_{D^T}. \end{aligned}$$

Применив (53), получим

$$(\chi - \tilde{a}(h), u - h)_{D^T} \geq 0.$$

Положим $h = u - \lambda\omega$, $\lambda > 0$, $\omega \in V(D^T)$, тогда

$$\lambda(\chi - \tilde{a}(u - \lambda\omega), \omega)_{D^T} \geq 0.$$

Устремляя $\lambda \rightarrow 0$, будем иметь $(\chi - \tilde{a}(u), \omega) \geq 0$, $\forall \omega$. Отсюда $\chi = \tilde{a}(u)$.

Для дальнейшего использования запишем (53) в виде

$$\|\beta_1(u(T))\|_{L_1(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (a_{p_i}(x, \nabla u), u_{x_i})_{D^T} = \|\beta_1(u(0))\|_{L_1(\Omega)}. \tag{55}$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 2–4

Пусть $\{u > b\}$ обозначает множество $\{(t, x) \in D^T | u(t, x) > b\}$. Отметим, что

$$\text{mes}\{u > b\} < \frac{c}{G(b^2)}, \quad u \in L_{G_2}(D^T). \quad (56)$$

Действительно,

$$c > \int_{D^T} G(u^2) dx dt > \int_{D^T \cap \{u > b\}} G(b^2) dx dt = G(b^2) \text{mes}\{u > b\},$$

откуда и следует неравенство (56).

Для области, расположенной вдоль оси Ox_1 , докажем следующее неравенство

$$\int_{\Omega^r} B_1(v(x)) dx \leq \int_{\Omega^r} B_1(rv_{x_1}(x)) dx, \quad v \in C_0^\infty(\Omega). \quad (57)$$

Пусть $f(x_1) \in C[0, r]$, $f(0) = 0$. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница, получим

$$|f(x_1)| = \left| \int_0^{x_1} f'(x_1) dx_1 \right| \leq \int_0^r |f'(x_1)| dx_1, \quad x_1 \in [0, r].$$

Теперь применим интегральное неравенство Йенсена (см. [26, гл.2, §8.2, нер.-во 8.2]), тогда

$$B_1\left(\frac{f(x_1)}{r}\right) \leq B_1\left(\frac{\int_0^r |f'(x_1)| dx_1}{r}\right) \leq \frac{1}{r} \int_0^r B_1(f'(x_1)) dx_1.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по x_1

$$\int_0^r B_1\left(\frac{f(x_1)}{r}\right) dx_1 \leq \int_0^r B_1(f'(x_1)) dx_1.$$

Тогда, после подстановки $f(x_1) = rv(x)$ и интегрирования по $x' = \{x_2, \dots, x_n\}$, получим (57).

Доказательство лемм 2,3. Покажем, что если $u_0(x) \leq b$ для п.в. $x \in \Omega$, то выполняется (22). Положим $u^{(b)}(t, x) = \max(u(t, x) - b, 0)$. Воспользуемся тождеством (49) при $\varphi = u^{(b)}(t, x)\xi(x)$, где $\xi(x)$ – липшицева финитная функция,

$$\begin{aligned} & ((\beta(x, u))_t, u^{(b)}(t, x)\xi(x))_{D^T} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{p_i}(x, \nabla u), u^{(b)}(t, x)\xi(x) \right)_{D^T} = 0, \\ & ((\beta(x, u))_t, u^{(b)}(t, x)\xi(x))_{D^T} + \sum_{i=1}^n (a_{p_i}(x, \nabla u), u_{x_i}^{(b)}(t, x)\xi(x))_{D^T} + \\ & + \sum_{i=1}^n (a_{p_i}(x, \nabla u), u^{(b)}(t, x)\xi_{x_i}(x))_{D^T} = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Выберем $\xi = \eta(x_1)$, где

$$\eta(\rho) = \begin{cases} 1, & \text{при } \rho < r, \\ 0, & \text{при } \rho > R, \\ \frac{R-\rho}{R-r}, & \text{при } \rho \in [r, R]. \end{cases}$$

Тогда $|\xi_{x_1}| \leq \frac{1}{R-r}$. Заметим, что $u^{(b)}(0, x) = u_0^{(b)}(x) = 0$, для почти всех $x \in \Omega$. Далее оцениваем интегралы, входящие в равенство (58), по условию (9)

$$\sum_{i=1}^n \int_{D^T} a_{p_i}(x, \nabla u) u_{x_i}^{(b)}(t, x) \xi(x) dx dt \geq \sum_{i=1}^n \int_{D^T \cap \{u > b\}} B_i(u_{x_i}) \xi(x) dx dt. \quad (59)$$

Теперь преобразуем первый интеграл в (58)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{D^T} \beta_t(x, u) u^{(b)}(t, x) \xi(x) dx dt = \int_{D^T \cap \{u > b\}} \beta'_u(x, u) u_t(t, x) u^{(b)}(t, x) \xi(x) dx dt = \\ &= \int_{D^T \cap \{u > b\}} \beta'_u(x, b + u^{(b)}) (u^{(b)})_t u^{(b)} \xi(x) dx dt. \end{aligned}$$

Положим $h(x, y) = \int_0^y \beta'_u(x, b + v) v dv$, тогда $h'_y(x, u^{(b)}) \geq 0$, поскольку $\beta'_u \geq 0$.

Таким образом, интеграл I_1 приводится к виду

$$I_1 = \int_{\Omega} \xi(x) h(x, u^{(b)}(t, x)) \Big|_0^T dx = \int_{\Omega} \xi(x) u^{(b)} h'_y(x, \theta(x) u^{(b)}) \Big|_{t=T} dx \geq 0, \quad (60)$$

где $0 < \theta(x) < 1$.

В случае ограниченной области Ω выбираем r так, чтобы она содержалась в шаре радиуса r . Тогда $\xi_{x_i} = 0$ в D^T и из (58), (59) выводим неравенство

$$\sum_{i=1}^n \int_{D^T \cap \{u > b\}} B_i(u_{x_i}) \xi(x) dx dt \leq 0.$$

Отсюда имеем

$$B_i(u_{x_i}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (61)$$

для почти всех $t, x \in D^T \cap \{u > b\} \cap \{x_1 < r\}$. Применив неравенство (57) к функции $u^{(b)}(t, x)$, находим

$$\int_{\Omega^r} B_1(u^{(b)}(t, x)) dx \leq \int_{\Omega^r} B_1(r u_{x_1}^{(b)}(t, x)) dx = 0, \quad \text{при почти всех } t \in (0, T).$$

Следовательно, $u^{(b)}(t, x) = 0$ при почти всех $x \in \Omega^r$, $t \in (0, T)$.

Для оценки последнего интеграла в (58) в случае неограниченной области Ω последовательно воспользуемся неравенствами (6), (11)

$$\begin{aligned} \int_{D^T} a_{p_1}(x, \nabla u) u^{(b)}(t, x) \xi_{x_1}(x) dx dt &\leq \frac{1}{R-r} \int_{D^T} |a_{p_1}(x, \nabla u) u^{(b)}(t, x)| dx dt \leq \quad (62) \\ &\leq \frac{1}{R-r} \int_{D^T} (\bar{B}_1(a_{p_1}(x, \nabla u)) + B_1(u^{(b)}(t, x))) dx dt \leq \\ &\leq \frac{1}{R-r} \int_{D^T} \left(c \sum_{i=1}^n B_i(u_{x_i}) + B_1(u^{(b)}(t, x)) \right) dx dt. \end{aligned}$$

Учитывая (58)–(60), (62), выводим

$$\sum_{i=1}^n \int_{D^T \cap \{u > b\}} B_i(u_{x_i}(t, x)) \xi(x) dx dt \leq \frac{c}{R-r} \int_{D^T} \left(\sum_{i=1}^n B_i(u_{x_i}) + B_1(u^{(b)}) \right) dx dt. \quad (63)$$

Покажем теперь ограниченность интеграла $\int_{D^T} B_1(u^{(b)}(t, x)) dx dt$. Воспользуемся условиями (21), (5) и (20)

$$\begin{aligned} \int_{D^T} B_1(u^{(b)}) dx dt &\leq \int_{D^T \cap \{u^{(b)} > s_0\}} B^*(ku^{(b)}) dx dt + \int_{D^T \cap \{u > b\}} B_1(s_0) dx dt \leq \\ &\leq \int_{D^T} B^* \left(k \|u^{(b)}\|_{B^*, D^T} \frac{u^{(b)}}{\|u^{(b)}\|_{B^*, D^T}} \right) dx dt + B_1(s_0) \text{mes}\{u > b\} \leq \\ &\leq k^* (k \|u^{(b)}\|_{B^*, D^T})^m + c_3 \leq k^* \left(Ck \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}^{(b)}\|_{\tilde{B}_i, D^T} \right)^m + c_3, \end{aligned} \quad (64)$$

где k, s_0 взято из определения (7), а k^*, m – из определения (5).

Покажем теперь, что

$$\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}^{(b)}\|_{\tilde{B}_i, D^T} \leq c_4. \quad (65)$$

Применив (56), а также неравенство (15), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}^{(b)}\|_{\tilde{B}_i, D^T} &\leq n + \int_{D^T \cap \{u > b\}} \sum_{i=1}^n \tilde{B}_i(u_{x_i}) dx dt = \\ &= n + \int_{D^T \cap \{|u_{x_i}| > 1\} \cap \{u > b\}} \sum_{i=1}^n \tilde{B}_i(u_{x_i}) dx dt + \int_{D^T \cap \{|u_{x_i}| \leq 1\} \cap \{u > b\}} \sum_{i=1}^n \tilde{B}_i(u_{x_i}) dx dt \leq \\ &\leq n + \int_{D^T \cap \{|u_{x_i}| > 1\}} \sum_{i=1}^n B_i(u_{x_i}) dx dt + \int_{D^T \cap \{u > b\}} \sum_{i=1}^n B_i(1) dx dt \leq c_4. \end{aligned}$$

Ограниченность интеграла $\int_{D^T} B_1(u^{(b)}(t, x)) dx dt$ доказана.

Таким образом, правая часть в (63) стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Поэтому (61) справедливо и для неограниченной области Ω . Тогда $u^{(b)}(t, x) = 0$ почти всюду в $(0, T) \times \Omega^r$. Ввиду произвольности $r > 0, T > 0$, отсюда следует, что $u(t, x) \leq b$ для почти всех $(t, x) \in D$.

Доказательство леммы 4. Возьмем произвольное $b > 0$ и воспользуемся (20) и (65), получим

$$\|u^{(b)}\|_{\infty, D^T} \leq C \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}^{(b)}\|_{\tilde{B}_i, D^T} \leq c_4.$$

Поскольку $u(t, x) \leq b + u^{(b)}(t, x)$, то (23) установлено.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть теперь область Ω ограничена. Установим оценки снизу скорости убывания решения задачи (1)–(3) при $t \rightarrow \infty$.

Введем обозначения

$$e_m(t) = e(t) = \int_{\Omega} \left(\beta_1(x, u_m(t, x)) + \frac{u_m^2(t, x)}{2b_m} \right) dx,$$

$$h(t) = \int_{\Omega} a(x, \nabla u_m) dx,$$

опуская индекс m там, где это допустимо. Из формулы (42) следует, что

$$e'(t) = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, \nabla u_m) u_{mx_i} dx. \quad (66)$$

Далее, из (44) имеем

$$-h'(t) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{b_m} + \beta'_u(x, u_m) \right) u_{mt}^2 dx.$$

Поэтому

$$(e'(t))^2 = \left(\int_{\Omega} \left(\beta'_{1u}(x, u_m)(u_m)_t + \frac{u_m(t)u_{mt}(t)}{b_m} \right) dx \right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\|(u_m)_t(\beta'_u(x, u_m))\|_2^{\frac{1}{2}} \|u_m(\beta'_u(x, u_m))\|_2^{\frac{1}{2}} + \frac{\|u_m(t)\|_2 \|u_{mt}(t)\|_2}{b_m} \right)^2.$$

Применим теперь неравенство Коши-Буняковского для скалярного произведения в \mathbb{R}_2 и воспользуемся условием (12). Тогда

$$(e'(t))^2 \leq \int_{\Omega} \left(\beta'_u(x, u_m)((u_m)_t)^2 + \frac{u_{mt}^2(t)}{b_m} \right) dx \int_{\Omega} \left(\beta'_u(x, u_m)u_m^2 + \frac{u_m^2(t)}{b_m} \right) dx \leq$$

$$\leq -\bar{\alpha}h'(t)e(t), \quad \bar{\alpha} = \max(\alpha, 2).$$

При помощи (66) перепишем последнее в виде

$$e'(t) \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, \nabla u_m) u_{mx_i} dx \right) \geq \bar{\alpha}h'(t)e(t).$$

Отсюда, используя левое неравенство в (10), а также (9), получим

$$\frac{e'(t)}{e(t)} \geq \frac{\bar{\alpha}h'(t)}{h(t)} \frac{h(t)}{\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, \nabla u_m) u_{mx_i} dx} \geq \bar{\alpha}\Gamma \frac{h'(t)}{h(t)},$$

или

$$\gamma \frac{e'(t)}{e(t)} \geq \frac{h'(t)}{h(t)}, \quad \text{где } \gamma = \frac{1}{\bar{\alpha}\Gamma}.$$

После интегрирования имеем

$$h(t) \leq \frac{h(0)e^{\gamma(t)}}{e^{\gamma(0)}}.$$

Тогда, ввиду (66) и условия (10),

$$e'(t) \geq -h(t)/\delta \geq -\frac{h(0)e^\gamma(t)}{\delta e^\gamma(0)},$$

или

$$\frac{e'}{e^\gamma} \geq -\frac{h(0)}{\delta e^\gamma(0)}.$$

Отсюда имеем

$$e^{1-\gamma}(t) - e^{1-\gamma}(0) \leq (\gamma - 1) \frac{h(0)t}{\delta e^\gamma(0)}, \text{ для случая } \gamma > 1;$$

$$e^{1-\gamma}(t) - e^{1-\gamma}(0) \geq -(1 - \gamma) \frac{h(0)t}{\delta e^\gamma(0)} \text{ для случая } \gamma < 1.$$

Таким образом, получаем

$$e(t) \geq e(0) \left(1 + (\gamma - 1) \frac{h(0)t}{\delta e(0)} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}, \text{ для } \gamma > 1; \quad (67)$$

$$e(t) \geq e(0) \left(1 - (1 - \gamma) \frac{h(0)t}{\delta e(0)} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}, \text{ для } \gamma < 1, \quad t \in \left[0, \frac{\delta e(0)}{(1 - \gamma)h(0)} \right). \quad (68)$$

Докажем предельный переход

$$\int_{\Omega} \beta_1(x, u_m) dx \rightarrow \int_{\Omega} \beta_1(x, u) dx. \quad (69)$$

Если интеграл (19) сходится, то, по лемме 4, $|u_m| \leq c$. Тогда теорема Лебега об ограниченной сходимости позволяет совершить предельный переход (69). Пусть теперь интеграл (19) расходится, и выполнено условие (24). Сходимость $u_m(t, x) \rightarrow u(t, x)$ при почти всех $x \in \Omega$ по теореме Егорова влечет равномерную сходимость на множестве $\Omega_\delta \subset \Omega$, $\text{mes } \Omega/\Omega_\delta < \delta$. Если при достаточно больших m выполнено неравенство

$$|u_m(t, x) - u(t, x)| < \varepsilon, \quad x \in \Omega_\delta,$$

то

$$\beta_1(x, u_m) \leq c_1 G(u_m^2(t, x)) \leq c_1 G((|u(t, x)| + \varepsilon)^2).$$

Поэтому теорема Лебега об ограниченной сходимости позволяет совершить предельный переход $\int_{\Omega_\delta} \beta_1(x, u_m) dx \rightarrow \int_{\Omega_\delta} \beta_1(x, u) dx$. Далее,

$$\begin{aligned} I_{m,\delta} &= \int_{\Omega/\Omega_\delta} |\beta_1(x, u_m)| dx \leq \|\beta_1(x, u_m)\|_{L_q(\Omega)} \|1\|_{L_{\bar{q}}(\Omega/\Omega_\delta)} \leq \\ &\leq \delta^{1/\bar{q}} \|\beta_1(x, u_m)\|_{L_q(\Omega)}. \end{aligned}$$

Пользуясь условием (24), а также рассуждениями (64) и (65), получим

$$I_{m,\delta} \leq c \delta^{1/\bar{q}} \left(\int_{\Omega} (B^*(u_m) + 1) dx \right)^{1/q} \leq \bar{c} \delta^{1/\bar{q}}.$$

Теперь нетрудно завершить доказательство предельного перехода (69).

Функции

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^n c_{mk}(t) \omega_k$$

принадлежат линейной оболочке функций $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$. В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, поэтому

$$\int_{\Omega} u_m^2(t) dx \leq c_m \|u_m(t)\|_{L_{G_2}(\Omega)}^2 \leq \widetilde{c}_m, \forall t > 0.$$

Выберем числа b_m так, чтобы $\widetilde{c}_m \leq b_m/m$. Тогда, пользуясь (69), при помощи формулы (13), получим

$$e_m(t) \rightarrow \int_{\Omega} \beta_1(x, u) dx \leq c_1 \int_{\Omega} G(u^2(t)) dx.$$

После предельного перехода в (67) и (68) при $m \rightarrow \infty$, где $e(t) = e_m(t)$, получим оценки (25), (26).

6.1. Доказательство теоремы 3. Пусть $\theta(\rho)$, $\rho > 0$ — абсолютно непрерывная функция, равная единице при $\rho \geq r$, нулю при $\rho \leq r_0$, линейная при $\rho \in [r_0, 2r_0]$ и удовлетворяющая уравнению

$$\theta'(\rho) = \lambda \nu(\rho) \theta(\rho), \quad \rho \in (2r_0, r), \quad (70)$$

(постоянную λ определим позднее). Решая это уравнение, находим

$$\theta(\rho) = \exp\left(-\lambda \int_{\rho}^r \nu(t) dt\right), \quad \rho \in (2r_0, r).$$

При $\rho \in (r_0, 2r_0)$ имеем

$$\theta'(\rho) = \frac{\theta(2r_0)}{r_0} = \frac{1}{r_0} \exp\left(-\lambda \int_{2r_0}^r \nu(t) dt\right), \quad \rho \in (r_0, 2r_0). \quad (71)$$

Пусть $\xi(x)$ — липшицева неотрицательная срезающая функция. Подставив в (49) $\varphi = u\xi$, получим

$$(\beta(x, u)_t, u\xi)_{D^T} + (\chi, u\xi)_{D^T} = 0.$$

Перепишем это в виде

$$\int_{D^T} \left(\beta'_{1u}(x, u) u_t \xi + \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, \nabla u) (u\xi)_{x_i} \right) dx dt = 0.$$

Положим $\xi(x) = \theta(x_1)$. Используя (9) и учитывая, что носители ξ и u_0 не пересекаются, после интегрирования первого слагаемого по t и применения (70), (71) получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \beta_1(x, u(T)) \theta(x_1) dx + \int_{D^T} \sum_{i=1}^n B_i(u_{x_i}) \theta(x_1) dx dt \leq \\ & \leq \int_{D^T} |u a_{p_1}(x, \nabla u) \theta'(x_1)| dx dt \leq \int_{D^T \cap \{2r_0 < x_1 < r\}} |u a_{p_1}(x, \nabla u) \lambda \nu(x_1) \theta(x_1)| dx dt + \\ & + \int_{D^T \cap \{r_0 < x_1 < 2r_0\}} \left| u a_{p_1}(x, \nabla u) \frac{\theta(2r_0)}{r_0} \right| dx dt = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (72)$$

Отметим, что $B(su) \leq sB(u)$, при $s \leq 1$. Далее, пользуясь ограниченностью функций ν ($\nu \leq \nu_0$) и u ($|u| \leq v_0$) (см. (32)), при помощи (6), (11), (31) оценим первый интеграл

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{D^T \cap \{2r_0 < x_1 < r\}} \theta(x_1) \left(\bar{B}_1(\varepsilon a_{p_1}(x, \nabla u)) + B_1(u\nu \frac{\lambda}{\varepsilon}) \right) dxdt \leq \\ &\leq \int_{D^T \cap \{2r_0 < x_1 < r\}} \theta(x_1) \left(\varepsilon c \sum_{i=1}^n B_i(u_{x_i}) + gB_2(u\nu \frac{\lambda}{\varepsilon}) \right) dxdt. \end{aligned}$$

Выберем теперь $\varepsilon = \frac{1}{2c}$, а также λ так, чтобы $\frac{\lambda}{\varepsilon} \nu_0 v_0 \leq 1$ и $\frac{\lambda}{\varepsilon} g \leq \frac{1}{2}$, тогда, воспользовавшись определением функции ν , получим

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{1}{2} \int_{D^T \cap \{2r_0 < x_1 < r\}} \theta(x_1) \sum_{i=1}^n B_i(u_{x_i}) dxdt + \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_{2r_0}^r dx_1 \theta(x_1) \int_{\gamma(x_1)} B_2(u\nu) dx' \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{D^T \cap \{2r_0 < x_1 < r\}} \theta(x_1) \sum_{i=1}^n B_i(u_{x_i}) dxdt + \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_{2r_0}^r dx_1 \theta(x_1) \int_{\gamma(x_1)} B_2(u_{x_2}) dx' \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{D^T} \theta(x_1) \left(\sum_{i=1}^n B_i(u_{x_i}) + B_2(u_{x_2}) \right) dxdt. \end{aligned}$$

Для I_2 , используя неравенство (11), выводим оценку

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{\theta(2r_0)}{r_0} \int_{D^T \cap \{r_0 < x_1 < 2r_0\}} (B_1(u) + \bar{B}_1(a_{p_1}(x, \nabla u))) dxdt \leq \\ &\leq \frac{\theta(2r_0)}{r_0} \int_{D^T \cap \{r_0 < x_1 < 2r_0\}} (B_1(u) + c \sum_{i=1}^n B_i(u_{x_i})) dxdt. \end{aligned}$$

Далее, ввиду (57), (5)

$$\int_{D^T \cap \{x_1 < 2r_0\}} B_1(u) dxdt \leq \int_{D^T \cap \{x_1 < 2r_0\}} B_1(2r_0 u_{x_1}) dxdt \leq c \int_{D^T} B_1(u_{x_1}) dxdt.$$

Теперь, используя оценки для I_1 , I_2 , из (72) находим

$$\int_{\Omega} \beta_1(x, u(T)) \theta(x_1) dx \leq \frac{\theta(2r_0)}{r_0} \int_{D^T} c_1 \sum_{i=1}^n B_i(u_{x_i}) dxdt.$$

Ограниченность последнего интеграла получается из (43) предельным переходом по $m \rightarrow \infty$. Поскольку $\theta(x_1) = 1$ при $x_1 \geq r$, то имеем неравенство (33).

6.2. Доказательство теоремы 4. Выберем положительное число $r \geq 2r_0$. Введем обозначение

$$\varepsilon(r) = M \exp(-\lambda \int_{2r_0}^r \nu(t) dt)$$

и, пользуясь (33), запишем соотношение

$$\Phi(t) \equiv \int_{\Omega} \beta_1(x, u(t, x)) dx \leq \int_{\Omega^r} \beta_1(x, u(t, x)) dx + \varepsilon(r).$$

Пусть t_r такая точка интервала $(0, \infty)$, что $\Phi(t_r) = \varepsilon(r)$. Если такой точки нет, то либо $\Phi(t) > \varepsilon(r)$ при всех $t > 0$, тогда полагаем $t_r = \infty$, либо $\Phi(t) < \varepsilon(r)$ при всех $t \geq 0$. В последнем случае желаемая оценка (74) выполнена. Из (55) следует невозрастание функции $\Phi(t)$, поэтому

$$0 \leq \Phi(t) - \varepsilon(r) \leq \int_{\Omega^r} \beta_1(x, u(t, x)) dx, \quad t \in [0, t_r]. \quad (73)$$

Пользуясь условием (34), (27), запишем неравенства

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \varepsilon(r) &\leq \left(\int_{\Omega^r} \beta_1(x, u(t, x))^q dx \right)^{1/q} (\text{mes} \Omega^r)^{1/\bar{q}} \leq \\ &\leq \left(c_3 \int_{\Omega^r} B_1(u(t, x)) dx \right)^{1/q} r^{d/\bar{q}}, \quad r \geq r_0. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь неравенством (57), а также Δ_2 -условием (5), (9), (35) и (55), получим

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \varepsilon(r) &\leq \left(c_3 \int_{\Omega^r} B_1(r u_{x_1}) dx \right)^{1/q} r^{d/\bar{q}} \leq \\ &\leq c_4 r^{d/\bar{q}} \left(\int_{\Omega^r} r^m B_1(u_{x_1}) dx \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Будем считать, что числа μ , r_0 выбраны так, что выполнено неравенство $c_4 r^{d/\bar{q}+m/q} \leq r^{\mu/q}$ при $r \geq r_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \varepsilon(r) &\leq r^{\mu/q} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, \nabla u) u_{x_i} dx \right)^{1/q} = \\ &= r^{\mu/q} \left(-\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \beta_1(x, u(t)) dx \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Решая это дифференциальное неравенство, находим

$$\Phi(t) \leq \varepsilon(r) + \left(\frac{r^{\mu}}{(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}}. \quad (74)$$

Последнее неравенство справедливо при всех $r \geq 2r_0$. Выбирая $r = r(t)$ (см. (36)), получаем (37). Теорема доказана.

7. ПРИМЕРЫ

Приведем теперь примеры уравнений, удовлетворяющих условиям (4), (9)–(14), (24), (34).

7.1. Пример 1. Введем следующее обозначение

$$t^{[a,b]} = \begin{cases} |t|^a, & \text{при } |t| < 1, \\ |t|^b, & \text{при } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Пусть $n = 2$. Выберем N -функции $B_1(s), B_2(s), G(s)$, а также функции $\beta(x, u), a(x, p)$ следующим образом

$$B_1(s) = s^{[2,5/2]}, \quad B_2(s) = s^{[5/4,3/2]}, \quad G(s) = s^{[5/4,11/10]},$$

$$\sum_{i=1}^2 a_{p_i}(x, p) p_i = B_1(p_1) + B_2(p_2) \frac{2 + |x|}{1 + |x|}.$$

Понятно, что зависимость от x может быть и у функции $\beta(x, u)$, но, чтобы не загромождать формулы, здесь ограничимся простейшим примером включения зависимости от x .

$$\beta(u) = \begin{cases} \frac{5}{3}|u|^{\frac{3}{2}}, & \text{при } |u| < 1, \\ \frac{5}{3} + \frac{11}{6}(|u|^{\frac{6}{5}} - 1), & \text{при } |u| \geq 1. \end{cases}$$

По формуле (8) найдем функцию

$$\beta_1(u) = u^{[5/2,11/5]}.$$

Несложно проверить, что для данных функций выполнены условия (4),(9)–(14), (24), (31), (34). Далее, по формуле (16) при $\kappa = \frac{3}{2}$ получим

$$\tilde{B}_1(s) = s^{[3/2,5/2]}, \quad \tilde{B}_2(s) = |s|^{3/2}, \quad h(s) = s^{[1/6,1/30]}.$$

Тогда, поскольку интеграл (19) расходится к бесконечности, по формуле (18) найдем

$$(B^*)^{-1}(z) = \begin{cases} 6z^{\frac{1}{6}}, & \text{при } |z| < 1, \\ 30z^{\frac{1}{30}} - 24, & \text{при } |z| \geq 1, \end{cases}$$

$$B^*(s) = \begin{cases} \left(\frac{s}{6}\right)^6, & \text{при } |s| < 6, \\ \left(\frac{|s|+24}{30}\right)^{30}, & \text{при } |s| \geq 6. \end{cases}$$

Из условий (10),(12) легко видеть, что можно взять $\Gamma = \frac{8}{5}$, $\alpha = \frac{5}{2}$. Таким образом, из (26) получим оценку в случае произвольной ограниченной области Ω

$$\int_{\Omega} G(u^2(t, x)) dx \geq \int_{\Omega} G(u_0^2(x)) dx (1 - Ct)^{\frac{4}{3}}, \quad \text{при } t \leq 1/C.$$

Теперь в качестве Ω выберем следующую область

$$\Omega(f) = \{x | x_1 > 0, -x_1^{\frac{1}{2}} + f(x_1) \leq x_2 \leq x_1^{\frac{1}{2}} + f(x_1)\},$$

где f – произвольная непрерывная функция. Тогда $\text{mes } \Omega^r(f) = \frac{4}{3}r^{\frac{3}{2}} \leq r^2$, $r \geq 2$. Из (28) найдем $\nu(r) = \frac{1}{2\sqrt{r}}$. Несложно проверить, что область $\Omega(f)$ удовлетворяет условиям (29),(38). Далее, в условии (34) можно выбрать $q = \frac{25}{22}$. Тогда из (39) найдем оценку сверху

$$\int_{\Omega(f)} \beta_1(u(t, x)) dx \leq Ct^{-\frac{11}{3}}.$$

7.2. Пример 2. Пусть $n = 2$. Выберем N -функции $B_1(s), B_2(s), G(s)$, а также функции $\beta(x, u), a(x, p)$ следующим образом

$$B_1(s) = s^{[9/2,6]}, \quad B_2(s) = s^{[17/4,6]}, \quad G(s) = s^{[3/2,2]}, \quad \sum_{i=1}^2 a_{p_i}(p)p_i = B_1(p_1) + B_2(p_2);$$

$$\beta(u) = \begin{cases} \frac{3}{2}|u|^2, & \text{при } |u| < 1, \\ \frac{3}{2} + \frac{4}{3}(|u|^3 - 1), & \text{при } |u| \geq 1. \end{cases}$$

По формуле (8) найдем функцию

$$\beta_1(u) = u^{[3,4]}.$$

Несложно проверить, что для данных функций выполнены условия (4),(9)–(14),(31), (34). Далее, по формуле (16) при $\kappa = \frac{3}{2}$ получим

$$\tilde{B}_1(s) = s^{[3/2,6]}, \quad \tilde{B}_2(s) = s^{[3/2,6]}, \quad h(s) = s^{[1/6,-1/3]}.$$

Таким образом, интеграл (19) сходится.

Из условий (10),(12) легко видеть, что можно взять $\Gamma = \frac{4}{17}$, $\alpha = 4$. Тогда из (25) получим оценку в случае произвольной ограниченной области Ω

$$\int_{\Omega} G(u^2(t, x)) dx \geq \int_{\Omega} G(u_0^2(x)) dx (1 + Ct)^{-16}, \quad \text{при } t \geq 0.$$

Далее, в условии (34) можно выбрать $q = \frac{3}{2}$. Тогда из (39) найдем оценку сверху

$$\int_{\Omega(f)} \beta_1(u(t, x)) dx \leq Ct^{-1}.$$

Комментарий. Поскольку при $|u| < 1$ и $|u| \geq 1$ функции имеют разные показатели роста, то степенные оценки сверху и снизу также имеют разные показатели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптев Г.И. Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 9. С. 83–112.
2. S. Antontsev, S. Shmarev *Parabolic equations with double variable nonlinearities* // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. 2010. Т. 270. С. 33–48.
3. Антонцев С.Н., Шмарев С.И. *Существование и единственность решений вырождающихся параболических уравнений с переменными показателями нелинейности* // Фундамент. и прикл. матем. 2006. Т. 12, № 4. С. 3–19.
4. Алхутов Ю.А., Жиков В.В. *Теоремы существования решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности* // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. 2010. Т. 270. С. 21–32.
5. Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х. *Оценка снизу скорости убывания решения параболического уравнения с двойной нелинейностью* // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3, № 3. С.3–14.
6. Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решения параболического уравнения с двойной нелинейностью* // Математический сборник. Москва. 2013. Т. 204, № 7. С. 3–28.
7. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *О решениях анизотропных параболических уравнений высокого порядка в неограниченных областях* // Матем. сб. 2014. Т. 205, № 1. С. 9–46.
8. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *Убывание решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченных областях* // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5, № 1. С. 63–82.
9. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *Решения анизотропных параболических уравнений с двойной нелинейностью в неограниченных областях* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. Т. 1(30). С. 82–89.

10. S.N. Antontsev, S.I. Shmarev *Extinction of Solutions of Parabolic Equations with Variable Anisotropic Nonlinearities*
Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 16–25.
11. S. Antontsev, S. Shmarev *On the blow-up of solutions to anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity* // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. 2010. Т. 270. С. 33–48.
12. Жиков В.В., Пастухова С.Е. *О свойстве повышенной суммируемости для параболических систем переменного порядка нелинейности* // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 2. С. 179–200.
13. Кожевникова Л.М. *Стабилизация решений псевдодифференциальных параболических уравнений в неограниченных областях* // Изв. РАН. Сер. матем. 2010. Т. 74, № 2. С. 109–130.
14. Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М. *Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в областях с некомпактными границами* // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 9. С. 3–26.
15. Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решений анизотропного квазилинейного параболического уравнения в неограниченных областях* // Труды МИАН. М., Наука. 2012. Т. 278, № 3. С. 114–128.
16. Гушин А.К. *Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка, Краевые задачи для дифференциальных уравнений* // III, Сборник работ под редакцией В.П. Михайлова, Тр. МИАН СССР. 1973. Т. 126. С. 5–45.
17. N. Alikakos, R. Rostamian *Gradient estimates for degenerate diffusion equation* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1982. V. 91, № 3-4. P. 335–346.
18. Тедеев А.Ф. *Стабилизация решений начально-краевых задач для квазилинейных параболических уравнений* // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44, № 10. С. 1441–1450.
19. Лионс Ж.А. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*. Издательство "Мир". Москва. 1972. 587 с.
20. P.A. Raviart *Sur la resolution de certaines equations paraboliques non lineaires* // J. Funct. Anal. 5. 1970. P. 209–328.
21. O. Grange, F. Mignot *Sur la resolution d'une equation et d'une inequation paraboliques non lineaires* // J. Funct. Anal. 11. 1972. P. 77–92.
22. A. Vamberger *Etude d'une equation doublement non lineaire* // J. Funct. Anal. 24. 1977. P. 148–155.
23. F. Bernis *Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains* // Math. Ann. 279. 1988. P. 373–394.
24. Жиков В.В., Пастухова С.Е. *Об уравнениях Навье–Стокса: теоремы существования и энергетические равенства* // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. 2012. Т. 278. С. 75–95.
25. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью* // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3, № 4. С. 64–85.
26. Рutiцкий Я.Б., Красносельский М.А. *Выпуклые функции и пространства Орлича*. Гос. издательство физ.-мат. лит.-ры. Москва. 1958. 587 с.
27. Королев А.Г. *Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева-Орлича* // Вестн. Москов. ун.-та, выпуск 4. 1983.

Элина Радиковна Андриянова,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: Elina.Andriyanov@mail.ru