ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 3 (2024). С. 88-95.

УДК 517.93

ГИПЕРЦИКЛИЧЕСКИЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ОБЛАСТИ

А.И. РАХИМОВА

Аннотация. В данной статье рассматривается пространство $H(\Omega)$ функций, аналитических в односвязной области Ω комплексной плоскости, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. Изучены вопросы гиперцикличности, хаотичности и часто–гиперцикличности некоторых операторов в этом пространстве. Доказано, что линейный непрерывный оператор в $H(\Omega)$, коммутирующий с оператором дифференцирования, гиперциклический. Также показано, что данный оператор является хаотическим и часто–гиперциклическим в $H(\Omega)$.

Ключевые слова: пространство аналитических функций, гиперциклический оператор, хаотический оператор, часто–гиперциклический оператор.

Mathematics Subject Classification: 37C20

1. Введение

1.1. Цель работы. Линейный непрерывный оператор $T : X \to X$ в топологическом пространстве X образует дискретную динамическую систему $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. Для описания поведения этой системы были введены такие характеристики для операторов, как цикличность, гиперцикличность, часто–гиперцикличность, хаотичность и многие другие. Задача описания гиперциклических операторов в пространстве $H(\mathbb{C})$ функций, аналитических в комплексной плоскости, рассматривалась Маклейном [1], Биркхофом [2], Годефруа [3], Шапиро [4], Кимом [5], [6] и другими авторами, а хаотических и часто–гиперциклических операторов в $H(\mathbb{C})$ — в работах Гроссе–Эрдманна, Пэрис [7], Баярт, Матерона [8], Девани [10] и других.

Основы теории хаотических операторов были заложены Девани [10]. Бэнкс, Брукс и другие авторы в статье [11] рассмотрели условия хаотичности Девани и доказали, что условие существенной зависимости оператора от начальных условий вытекает из условий топологической транзитивности и наличия плотного множества периодических точек. Годефруа, Шапиро [3] показали, что любой оператор свертки, характеристическая функция которого отлична от постоянной, является хаотическим в $H(\mathbb{C})$.

Понятие часто–гиперциклического оператора ввели Баярт и Гривакс в статье [12] для пространства $H(\mathbb{C})$. Бонилла и Гроссе–Эрдманн в работе [13] привели примеры таких операторов и векторов в $H(\mathbb{C})$. В книгах Гроссе–Эрдманн, Пэрис [7] и Баярт, Матерон [8] имеются подробные сведения по динамике линейных операторов, в том числе по хаотическим и часто–гиперциклическим операторам. В работе Лишанского [9] изучена динамика линейных операторов в пространствах Харди функций, аналитических в круге.

A.I. Rakhimova, Hypercyclic and chaotic operators in space of functions analytic in domain.

Поступила 10 августа 2023 г.

В случае пространств функций, аналитических в односвязной области на комплексной плоскости, задачи о гиперцикличности, хаотичности и часто–гиперцикличности линейных непрерывных операторов ранее не рассматривались. Данная работа посвящена изучению этих вопросов в пространстве таких функций.

Пусть Ω — произвольная односвязная область на плоскости $\mathbb{C}$. Определим как $H(\Omega)$ пространство аналитических в Ω функций и наделим его топологией равномерной сходимости на компактах из Ω, задаваемой системой норм

$$p_m(f) = \sup_{z\in K_m} |f(z)|, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где K_m — компакты в Ω с непустой внутренностью такие, что $K_m \subset \operatorname{int} K_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_m = \Omega$. По теореме Римана система полиномов полна в $H(\Omega)$, значит, пространство сепарабельно. Также оно метризуемо. Тогда $H(\Omega)$ является пространством Фреше. Отметим, что оно инвариантно относительно дифференцирования и относительно сдвига, если $\Omega = \Omega_\sigma = \{z \in \mathbb{C} : \ |\operatorname{Im} z| < \sigma\}$ — горизонтальная полоса на плоскости $\mathbb{C}$, где $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Результаты статьи приведены в теоремах 2.1, 3.1 и 3.2. Доказано, что линейный непрерывный оператор T в $H(\Omega)$, коммутирующий с оператором дифференцирования, гиперциклический (теорема 2.1), а также он хаотический (теорема 3.1) и часто–гиперциклический (теорема 3.2).

1.2. Основные определения. Пусть X — топологическое векторное пространство над полем $\mathbb{C}$. *Орбитой* элемента x оператора $T : X \to X$ называется множество

$$\operatorname{Orb}(T, x) = \{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$$

([7, опр. 1.2], [8, введ., опр. 0.1]). Элемент $x \in X$ называется *периодической точкой* оператора T, если найдется число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $T^n x = x$ ([7, опр. 1.23], [8, опр. 6.5]). Обозначим через $\operatorname{span} E$ линейную оболочку множества E в топологическом векторном пространстве.

Линейный непрерывный оператор $T : X \to X$ называется *гиперциклическим оператором* ([7, опр. 2.15], [8, введ., опр. 0.2]) в пространстве X, если существует элемент $x \in X$, орбита которого плотна в X. Элемент $x \in X$ является *гиперциклическим вектором* оператора T в X.

Непрерывный оператор $T : X \longrightarrow X$ в топологическом векторном пространстве X называется *топологически транзитивным*, если для любых непустых открытых множеств A, $B \subset X$ существует такое число $n \in \mathbb{N}$, что $T^n(A) \cap B \neq \varnothing$ ([7, опр. 1.11], [8, теор. 1.2]).

Оператор $\Phi : Y \to Y$ в метрическом пространстве (Y, d) называется *хаотическим*, если выполнены следующие условия Девани ([10, опр. 8.5]):

(A) Оператор Φ обладает существенной зависимостью от начальных условий: существует $\delta > 0$ такое, что для любого элемента $x \in Y$ и его любой окрестности U найдутся точка $y \in U$ и число $n \in \mathbb{N}$ такие, что $d(\Phi^n x, \Phi^n y) > \delta$;

(B) Оператор Φ является топологически транзитивным;

(C) Множество периодических точек оператора Φ является плотным подмножеством в пространстве Y.

Нижняя плотность ([7, опр. 9.1], [8, § 6.3, п. 6.3.1, опр. 0.2]) множества $A \subset \mathbb{N}$ $\underline{\operatorname{dens}} A$ определяется по формуле

$$\underline{\operatorname{dens}} A = \liminf_{N\to\infty} \frac{\#\{n \in A : \ n \leqslant N\}}{N}.$$

Пусть X — топологическое векторное пространство. Линейный непрерывный оператор $T : X \to X$ называется *часто–гиперциклическим оператором* ([7, опр. 9.2], [8, опр. 6.16]), если найдется такой элемент $x \in X$, что для любого непустого открытого подмножества $U \subset X$ выполняется условие $\underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N} : T^n x \in U\} > 0$. Элемент $x \in X$ является *часто–гиперциклическим вектором* оператора T в X. Заметим, что класс часто–гиперциклических операторов содержится в множестве гиперциклических операторов ([7, опр. 9.2], [8, опр. 6.16]).

В дальнейшем нам понадобятся приведенные ниже теоремы:

Теорема 1.1 (**Теорема Годефруа–Шапиро,** [3, следствие 1.3])**.** *Пусть $T : X \to X$ — линейный непрерывный оператор в сепарабельном пространстве Фреше X, подпространства*

$$X_0 = \text{span}\{x \in X : Tx = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$$

и

$$Y_0 = \text{span}\{x \in X : Tx = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$$

плотны в X.

Тогда T — гиперциклический оператор.

В работах [7] и [11] доказаны следующие факты:

Теорема 1.2 ([11, теорема 1])**.** *Если в метрическом пространстве X оператор $T : X \to X$ топологически транзитивный и множество его периодических точек всюду плотно в X, то оператор T обладает существенной зависимостью от начальных условий.*

Теорема 1.3 (**Теорема Биркгофа о транзитивности,** [7, теорема 2.19])**.** *Если X — пространство Фреше, то для линейного непрерывного оператора $T : X \to X$ топологическая транзитивность и гиперцикличность равносильны.*

В силу теоремы 1.2 условие (A) следует из условий (B) и (C), поэтому дальше при доказательстве хаотичности оператора его проверка не требуется. Из теоремы 1.3 следует, что для гиперциклического оператора в пространстве Фреше достаточно проверить плотность множества его периодических точек в этом пространстве. Заметим, что множество периодических точек является линейным подпространством.

Теорема 1.4 ([7, теорема 2.33])**.** *Пусть T — линейный оператор в комплексном векторном пространстве X. Тогда множество периодических точек оператора T задается в виде*

$$\text{Per}(T) = \text{span}\{x \in X : \exists \alpha \in \mathbb{Q} : Tx = e^{\alpha\pi i}x\}.$$

Пусть T — оператор в комплексном топологическом векторном пространстве Фреше X и $\mathbb{T}$ — единичная окружность. Набор функций $E_j : \mathbb{T} \to H(\Omega)$, $j \in J$, называется охватывающим полем собственных векторов, соответствующих собственным значениям с единичным модулем, если $E_j(w) \in \ker(T - wI)$ для всех $w \in \mathbb{T}$, $j \in J$ и множество $\text{span}\{E_j(w)\}_{w\in\mathbb{T}, j\in J}$ плотно в X. Векторное поле называется соответственно *непрерывным* или *C^2–гладким*, если каждая функция E_j, $j \in J$ соответственно непрерывна или дважды непрерывно дифференцируема по w на $\mathbb{T}$ ([7, определение 9.21]).

Теорема 1.5 ([7, теорема 9.22])**.** *Пусть T — оператор в комплексном сепарабельном пространстве Фреше X. Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) если оператор T имеет непрерывное охватывающее поле собственных векторов, соответствующих собственным значениям с единичным модулем, то он хаотический;

b) если оператор T имеет C^2–гладкое охватывающее поле собственных векторов, соответствующих собственным значениям с единичным модулем, то он часто–гиперциклический.

Мы воспользуемся также следующей теоремой.

Теорема 1.6 ([7, лемма 2.34]). *Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}$ — множество, содержащее предельную точку, тогда множество*

$$\operatorname{span}\{e^{\lambda z}, z \in \Omega\}_{\lambda \in \Lambda}$$

плотно в $H(\Omega)$.

2. Гиперциклические операторы

Для операторов, коммутирующих с дифференцированием, справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Пусть линейный непрерывный оператор T в пространстве $H(\Omega)$ коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественного отображения. Тогда T — гиперциклический оператор в $H(\Omega)$.*

Доказательство. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ ряд Тейлора

$$e^{\lambda z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} z^n$$

сходится равномерно на компактах плоскости, значит, он сходится в топологии пространства $H(\Omega)$. Функцию $T(z, \lambda) = T_z(e^{\lambda z})$ можно представить в виде поточечно сходящегося по λ ряда

$$T(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T(z^n)}{n!} \lambda^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

По теореме Абеля этот степенной ряд сходится равномерно на компактах плоскости, поэтому $T_z(e^{\lambda z})$ — целая функция по переменной λ.

Так как T коммутирует с D, то при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ верно равенство

$$T_z'(e^{\lambda z}) = \frac{d}{dz} T_z(e^{\lambda z}) = T_z \frac{d}{dz}(e^{\lambda z}) = \lambda T_z(e^{\lambda z}), \quad z \in \Omega.$$

Решение дифференциального уравнения $T_z'(e^{\lambda z}) = \lambda T_z(e^{\lambda z})$ имеет вид

$$T_z(e^{\lambda z}) = a_T(\lambda) e^{\lambda z}, \quad z \in \Omega, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Поскольку функция $T_z(e^{\lambda z})$ целая по λ, то $a_T(\lambda)$ — целая функция. Отметим, что $a_T(\lambda)$ не тождественна постоянной: если $a_T(\lambda) \equiv c$, где $c = const$, то $T_z(e^{\lambda z}) = ce^{\lambda z}$, а в силу того, что система экспонент полна в $H(\Omega)$, получим $Tf = cf$, $f \in H(\Omega)$, что противоречит условию теоремы.

Рассмотрим множества $W_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |a_T(\lambda)| < 1\}$ и $W_2 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |a_T(\lambda)| > 1\}$. Они открытые и непустые: если $W_2 = \emptyset$, то $a_T(\lambda)$ ограничена, значит, постоянна, а если $W_1 = \emptyset$, то $1/a_T(\lambda)$ ограничена. Определим $X_0 = \operatorname{span}\{e^{\lambda z}\}_{z \in W_1}$ и $Y_0 = \operatorname{span}\{e^{\lambda z}\}_{z \in W_2}$. Множества X_0 и Y_0 плотны в $H(\Omega)$. Таким образом, по теореме 1.1 оператор T гиперциклический в $H(\Omega)$.

□

Операторы из следствий 2.1–2.4 линейные непрерывные и коммутируют с оператором дифференцирования, поэтому они удовлетворяют теореме 2.1.

Следствие 2.1. *Пусть полином $P(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$, где $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in (0; m)$, отличен от постоянной. Тогда оператор $T = \sum_{n=0}^{m} a_n D^n$ является гиперциклическим в $H(\Omega)$.*

Положим $\Omega_\sigma = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| < \sigma\}$, где $\sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

Следствие 2.2. *Пусть заданы числа $m \in \mathbb{N}$ и $a_j \in \mathbb{R}$, $c_j \in \mathbb{C}$, $j \in (1; m)$. Тогда оператор $Tf(z) = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j f(z + a_j)$ при условии, что он не кратен тождественному, гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$.*

Следствие 2.3. *Пусть $N \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$, для всех $j = 0, 1, \ldots, N$ и $k = 1, 2, \ldots, m$ заданы числа $c_{jk} \in \mathbb{C}$ и точки $a_k \in \mathbb{R}$. Тогда оператор*

$$Tf(z) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=1}^{m} c_{jk} (D^j f)(z + a_k),$$

действующий в $H(\Omega_\sigma)$ и не кратный тождественному, является гиперциклическим в $H(\Omega_\sigma)$.

Следствие 2.4. *Оператор $M_F[f](z) = \langle F_w, f(z + w)\rangle$, где $F \in H^*(\Omega_\sigma)$, носитель которого лежит на вещественной оси, гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$ (см. [14,* теорема 17.3]*).*

Приведем пример не гиперциклического оператора.

Пример 2.1. *Пусть $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$ — фиксированные числа. Тогда оператор $Tf(z) = f'(\lambda z + b)$ при условии $|\lambda| < 1$ не гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$.*

Доказательство. Очевидно, оператор T линейный и непрерывно отображает $H(\Omega_\sigma)$ в $H(\Omega_\sigma)$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in H(\Omega_\sigma)$. Действие оператора T n раз на функцию f имеет вид

$$T^n f(z) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f^{(n)} \left(\lambda^n z + b\left(\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}\right)\right).$$

Возьмем произвольный компакт $K \subset \Omega_\sigma$. Очевидно, что

$$\sup_{z \in K} \left|\lambda^n z + b\left(\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}\right) - \frac{b}{1-\lambda}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

значит, для некоторого $N \in \mathbb{N}$ при $n \geq N$

$$\left|\lambda^n z + b\left(\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}\right) - \frac{b}{1-\lambda}\right| < \frac{\sigma}{4}, \quad z \in K.$$

Обозначим

$$z_n = \lambda^n z + b\left(\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}\right).$$

По интегральной формуле Коши при $n \geq N$

$$f^{(n)}(z_n) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - \frac{b}{1-\lambda}| = \frac{\sigma}{2}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_n)^{n+1}},$$

поэтому

$$|f^{(n)}(z_n)| \leqslant \frac{2^{2n+1} n!}{\sigma^{n+1}} \max_{|\xi - \frac{b}{1-\lambda}| \leq \frac{\sigma}{2}} |f(\xi)| := C_0 \left(\frac{4}{\sigma}\right)^n n!,$$

где $C_0 = \frac{2}{\sigma} \max\limits_{|\xi - \frac{b}{1-\lambda}| \leq \frac{\sigma}{2}} |f(\xi)|$. Тогда при $n \geq N$, $z \in K$

$$|T^n f(z)| = |\lambda|^{\frac{n(n-1)}{2}} |f^{(n)}(z_n)| \leqslant C_0 \left(\frac{4}{\sigma}\right)^n n! |\lambda|^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

то есть

$$\max_{z\in K}|T^n f(z)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Поскольку K — произвольный компакт, то $T^n f(z) \to 0$ при $n \to \infty$ в топологии пространства $H(\Omega_\sigma)$. В частности, множество $\{T^n f\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничено в пространстве $H(\Omega_\sigma)$ и не может быть всюду плотным.

□

3. Хаотические и часто–гиперциклические операторы

Для операторов, коммутирующих с дифференцированием, выполняются следующие утверждения о хаотичности и часто–гиперцикличности.

Теорема 3.1. *Пусть линейный непрерывный оператор T в пространстве $H(\Omega)$ коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественного отображения. Тогда T — хаотический оператор.*

Доказательство. Покажем справедливость утверждения, проверив определение хаотичности. В теореме 2.1 было показано, что T — гиперциклический оператор в пространстве Фреше $H(\Omega)$. В силу теорем 1.2 и 1.3 осталось показать, что T имеет плотное множество периодических точек в $H(\Omega)$.

При доказательстве теоремы 2.1 получили, что действие оператора T на экспоненты определяется по формуле

$$T(e^{\lambda z}) = a_T(\lambda)e^{\lambda z},$$

где $a_T(\lambda)$ — целая функция, отличная от постоянной, $\lambda \in \mathbb{C}$, $z \in \Omega$. Введем обозначение $\varphi(\lambda) = a_T(\lambda)$.

По теореме 1.4 совокупность периодических точек оператора T задается в виде

$$V = \operatorname{span}\Big\{f \in H(\Omega) : \exists\alpha \in \mathbb{Q} : Tf(z) = e^{\alpha\pi i}f(z)\Big\}.$$

Тогда множеством собственных значений, соответствующих функциям из V, является

$$W = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\alpha \in \mathbb{Q} : \varphi(\lambda) = e^{\alpha\pi i}\Big\}.$$

Поскольку $\varphi(\lambda)$ — непостоянная целая функция, то она принимает все значения, кроме, может быть, одного значения. Значит, ее образ $\varphi(\mathbb{C})$ пересекает единичную окружность $\mathbb{T}$. Так как непостоянная голоморфная функция $\varphi(\lambda)$ является открытым отображением, то бесконечно много точек $\lambda = \varphi^{-1}(e^{\alpha\pi i})$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, лежат в некотором компакте в $\mathbb{C}$. Отсюда получим, что W имеет предельную точку. По теореме 1.6 $V = \operatorname{span}\{e^{\lambda z}\}_{\lambda\in W}$ плотно в $H(\Omega)$. Следовательно, оператор T хаотический в $H(\Omega)$.

□

Теорема 3.2. *Пусть линейный непрерывный оператор T в пространстве $H(\Omega)$ коммутирует с оператором дифференцирования и не является скалярным кратным тождественного отображения. Тогда T — часто–гиперциклический оператор.*

Доказательство. Доказательство теоремы основывается на теореме 1.5.

В теореме 2.1 было показано, что T — гиперциклический оператор в пространстве Фреше $H(\Omega)$. При ее доказательстве получили, что действие оператора T на экспоненты равно

$$T(e^{\lambda z}) = a_T(\lambda)e^{\lambda z},$$

где $a_T(\lambda)$ — целая функция, отличная от постоянной, $\lambda \in \mathbb{C}$, $z \in \Omega$. Обозначим $\varphi(\lambda) = a_T(\lambda)$. Из предыдущего уравнения видно, что числа $\varphi(\lambda)$ входят в множество собственных значений оператора T, а экспоненты $e^{\lambda z}$ являются его собственными функциями.

Поскольку φ — целая функция, отличная от постоянной, то по теореме Пикара множество $\varphi(\mathbb{C})$ содержит всю единичную окружность, кроме, возможно, одной точки. Возьмем точку $w \in \mathbb{T}$ так, чтобы в точке z, $\varphi(z) = w$, производная $\varphi'(z)$ была отлична от нуля: $\varphi'(z) \neq 0$. В этом случае функция φ отображает некоторую открытую окрестность $\widetilde{U}$ точки z конформно в некоторую открытую окрестность U точки w.

Пусть $\psi = \varphi^{-1} : U \to \widetilde{U}$ — обратное отображение, оно голоморфно в U. Зафиксируем некоторую нетривиальную замкнутую дугу единичной окружности $\gamma \subset U$, содержащую точку w. Возьмем C^2–гладкую функцию $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ такую, что $f(w) \neq 0$ и $f \equiv 0$ вне γ. Определим функцию $E : \mathbb{T} \to H(\Omega)$ в виде $E(\lambda) = f(\lambda)e^{\psi(\lambda)z}$. Поскольку множество $V = \{\psi(\lambda),\ \lambda \in \gamma,\ f(\lambda) \neq 0\}$ очевидным образом имеет предельные точки, то по теореме F множество $\operatorname{span}\{f(\lambda)e^{\psi(\lambda)z}, \psi(\lambda) \in V\}$ плотно в $H(\Omega)$. Очевидно, набор из одной функции E образует охватывающее поле собственных векторов, соответствующих собственным значениям с единичным модулем. Тем самым, теорема 3.2 следует из теоремы 1.5.

□

Поскольку операторы из следствий 3.1–3.4 линейные непрерывные в $H(\Omega)$ и коммутируют с оператором дифференцирования, то для них справедливы теоремы 3.1 и 3.2.

Следствие 3.1. *Пусть полином*

$$P(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n,$$

где $m \in \mathbb{N}$ и $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in (0; m)$, отличен от постоянной. Тогда оператор $T = \sum\limits_{n=0}^{m} a_n D^n$ хаотический и часто–гиперциклический в $H(\Omega)$.

Положим $\Omega_\sigma = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \sigma\}$, где $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Следствие 3.2. *Пусть заданы числа $m \in \mathbb{N}$ и $a_j \in \mathbb{R}$, $c_j \in \mathbb{C}$, $j \in (1; m)$. Тогда оператор $Tf(z) = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j f(z + a_j)$ при условии, что он не кратен тождественному, хаотичен и часто–гиперцикличен в $H(\Omega_\sigma)$.*

Следствие 3.3. *Пусть $N \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$, для всех $j = 0, 1, \ldots, N$ и $k = 1, 2, \ldots, m$ заданы числа $c_{jk} \in \mathbb{C}$ и точки $a_k \in \mathbb{R}$. Тогда оператор*

$$Tf(z) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=1}^{m} c_{jk} (D^j f)(z + a_k),$$

действующий в $H(\Omega_\sigma)$ и не кратный тождественному, хаотический и часто–гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$.

Следствие 3.4. *Оператор $M_F[f](z) = \langle F_w, f(z + w)\rangle$, где $F \in H^*(\Omega_\sigma)$, носитель которого лежит на вещественной оси, хаотический и часто–гиперциклический в $H(\Omega_\sigma)$ (см.* [14, теорема 17.3]*).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G.R. MacLane. *Sequences of derivatives and normal families* // J. Anal. Math. **2**, 72–87 (1952).
2. G.D. Birkhoff. *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières* // C. R. **189**, 473–475 (1929).
3. G. Godefroy, J.H. Shapiro. *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds* // J. Funct. Anal. **98**:2, 229–269 (1991).
4. R.M. Gethner, J. Shapiro. *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions* // Proc. Amer. Math. Soc. **100**:2, 281–288 (1987).
5. В.Э. Ким. *Гиперциклические и хаотические операторы на пространстве целых функций* // Труды Института математики с ВЦ УНЦ РАН. **1**, 126–130 (2008).
6. В.Э. Ким. *Гиперцикличность и хаотичность операторов обобщенной свертки, порождаемых операторами Гельфонда–Леонтьева* // Мат. заметки. **85**:6, 849–856 (2009).
7. K.–G. Grosse–Erdmann, A. Peris Manguillot. *Linear chaos*, Springer, Berlin (2011).
8. F. Bayart, E. Matheron. *Dynamics of Linear Operators*, Cambridge University Press, Cambridge (2009).
9. А.А. Лишанский. *Существование гиперциклических подпространств у операторов Теплица* // Уфим. мат. ж. **7**:2, 109–113 (2015).
10. R.L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison–Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City, CA etc. (1989).
11. J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey. *On Devaney's definition of chaos* // Am. Math. Mon. **99**:4, 332–334 (1992).
12. F. Bayart, S. Grivaux. *Frequently hypercyclic operators* // Trans. Am. Math. Soc. **358**:11, 5083–5117 (2006).
13. A. Bonilla, K.–G. Grosse–Erdmann. *Frequently hypercyclic operators and vectors* // Ergodic Theory Dyn. Syst. **27**:2, 383–404 (2007).
14. В.В. Напалков. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука (1982).

Алсу Ильдаровна Рахимова,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `alsu1405@mail.ru`