ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 3 (2024). С. 69-77.

УДК 517.574 : 517.982.1 : 517.55 : 517.987.1

ДВОЙСТВЕННАЯ КОНСТРУКЦИЯ И СУЩЕСТВОВАНИЕ (ПЛЮРИ)СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ МИНОРАНТЫ

Е.Г. КУДАШЕВА, Э.Б. МЕНЬШИКОВА, Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. Рассматриваются проблемы существования и построения субгармонической или плюрисубгармонической функции, огибающей снизу функцию на подмножестве в конечномерном вещественном или комплексном пространстве. Такие проблемы естественным образом возникали в теориях равномерных алгебр, потенциала и комплексного потенциала, что нашло отражение в работах Д.А. Эдвардса, Т.В. Гамелина, Е.А. Полецкого, С. Бу и В. Шахермайера, Б. Коула и Т. Рансфорда, Ф. Ларуссона и Р. Сигурдссона и многих других. В наших работах 1990-х гг. и последних лет было показано, что эти проблемы играют ключевую роль при исследовании нетривиальности весовых пространств голоморфных функций, при описании нулевых множеств и подмножеств функций из таких пространств, в вопросах представления мероморфных функций в виде отношения голоморфных функций с ограничениями на их рост, при изучении аппроксимации экспоненциальными системами в функциональных пространствах и пр. Основные результаты статьи о существовании субгармонической или плюрисубгармонической функции–миноранты выводятся из нашей общей теоретико–функциональной схемы, которая позволяет дать двойственное определение нижней огибающей относительно выпуклого конуса в проективном пределе векторных решёток. Эта схема разрабатывалась нами в последние годы и основана на развитии абстрактной формы выметания. Идеология абстрактного выметания восходит к А. Пуанкаре и М.В. Келдышу в рамках выметания мер и субгармонических функций в теории потенциала. Она широко используется в теории вероятности, например, в известной монографии П. Мейера, а также отражена, зачастую неявно, в монографиях Г.П. Акилова, С.С. Кутателадзе, А.М. Рубинова и др., связанных с теорией упорядоченных векторных пространств и решёток. В нашей статье разработанная нами схема адаптируется для выпуклых подконусов конуса всех субгармонических или плюрисубгармонических функций. Это позволяет получить новые критерии существования субгармонической или плюрисубгармонической миноранты для функций на области.

Ключевые слова: субгармоническая функция, плюрисубгармоническая функция, нижняя огибающая, векторная решётка, проективный предел, выметание.

Mathematics Subject Classification: 31B05, 31C10, 46A40, 31B15

1. Введение. Формулировка и обсуждение результатов

1.1. Истоки и постановка задачи. Пусть H — некоторый класс, состоящий из субгармонических или плюрисубгармонических функций на области D конечномерного евклидова соответственно вещественного или комплексного пространства. Основная рассматриваемая задача — при каких соотношениях между H и расширенной вещественной функции f на D со значениями в расширении $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ поля вещественных чисел $\mathbb{R}$

E.G Kudasheva, E.B. Menshikova, B.N. Khabibullin, Dual construction and existence of (pluri)subharmonic minorant.

Исследование второго автора выполнялось за счёт гранта Российского научного фонда № 24-21-00002, https://rscf.ru/project/24-21-00002/.

Поступила 11 февраля 2024 г.

найдётся такая функция $h \in H$, что $-\infty \neq h \leqslant f$ на D? Естественное требование к H — его выпуклость. Здесь рассматривается случай, когда H — выпуклый конус. Двойственное решение основной задачи в случаях, когда H — конусы *всех* (плюри)субгармонических функций на области D, естественным образом следует из двойственного описания нижней (плюри)субгармонической огибающей для расширенной числовых функций на D, данных в работах Бу и Шахермайера [1], Полецкого [2], Коула и Рансфорда [3], а также наших [4]–[13] и мн. др. в 1990–2020-е гг. при определённых ограничениях на функцию f. Интерес к подобным задачам вызван их многочисленными применениями в теориях равномерных алгебр, (плюри)потенциала [2], в вопросах нетривиальности весовых пространств голоморфных функций, описания распределения нулевых множеств и множеств единственности для таких пространств, представления мероморфных функций в виде отношения функций из этих пространств [5]–[7], [9]–[12]. В статье представлено дальнейшее развитие нашего подхода к подобного рода задачам. Этот подход основывается на общем двойственном описании огибающих к векторам в проективных пределах векторных решёток и понятии выметания.

В [10], [11] достаточно детально изложена как постановка конкретных рассматриваемых здесь задач, так и история тематики по ним с обширной библиографией вплоть до последних лет, включая приложения к теории функций и аппроксимации. Отметим ещё раз, что в работах других авторов, причастных к этой тематике, рассматривались огибающие только из конкретных конусов *всех* (плюри)субгармонических функций. В нашей статье выпуклые подконусы весьма общие и могут быть значительно у́же конусов всех (плюри)субгармонических функций. Кроме того, от функции f требовалась локальная ограниченность сверху, например, полунепрерывность сверху на D. Это не могло охватить случаи функций f из разности $H - H$, а именно этот случай в связи с предложенными в [6]–[11] приложениями представляет собой наибольший интерес. Эти ограничения были недавно сняты третьим автором в статье [13], но лишь для случая выпуклого конуса H *всех* субгармонических функций на области. Наша статья может рассматриваться как существенное развитие этого результата [13, теорема 1], распространяющая его на широкие классы выпуклых подконусов в конусе всех субгармонических функций на области и расширенных вещественных функций f на D. Таким образом, основные продвижения в данной статье в отличие от предшествующих работ — это, во-первых, двойственная конструкция миноранты или нижней огибающей из широкого класса разнообразных выпуклых подконусов конуса субгармонических или плюрисубгармонических функций на области D, а во-вторых, снятие условия локальной ограниченности сверху функции f, для которой строится миноранта или нижняя огибающая из выпуклого конуса H. Перейдём теперь к точным определениям и формулировкам.

1.2. Определения, обозначения, соглашения. Множества $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ соответственно *натуральных, вещественных, комплексных чисел,* $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ и *расширенная вещественная прямая* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, где $-\infty := \inf \mathbb{R} = \sup \emptyset$, $+\infty := \sup \mathbb{R} = \inf \emptyset$ для *пустого множества* $\emptyset$, рассматриваются с их естественными алгебраическими, геометрическими, топологическими структурами. Евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ размерности $d \in \mathbb{N}$ рассматривается с *евклидовой нормой* $|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$ для $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ и *d–мерной мерой Лебега* $\mathfrak{m}_d$. Как обычно, $\mathbb{C}$ — поле всех *комплексных* чисел, или комплексная плоскость. В настоящей статье d–мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^d = \mathbb{R}^d + i\mathbb{R}^d$ удобно отождествлять с $2d$–мерным пространством $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{2d}$ с мерой Лебега $\mathfrak{m}_{2d}$.

Для пары *расширенных вещественных функций* $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ и $g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ пишем $f \leqslant g$ *на* D, если $f(x) \leqslant g(x)$ для каждой точки $x \in X$.

Через $C(X)$ обозначаем *векторное пространство над* $\mathbb{R}$ *непрерывных функций* на топологическом пространстве X со значениями в $\mathbb{R}$.

Всюду далее буквой $D\subset \mathbb{R}^d$ обозначаем *область*, т.е. связное открытое подмножество в $\mathbb{R}^d$, а также $\overline{B}_o(r):=\bigl\{x\in\mathbb{R}^d \bigm| |x-o|\leqslant r\bigr\}$ — *шар радиуса $r>0$ с центром $o\in\mathbb{R}^d$.*

Подмножество H векторного пространства над полем $\mathbb{R}$ называется *конусом*, если

$$tH:=\bigl\{th \bigm| h\in H\bigr\}\subset H \quad \text{при всех } 0<t\in\mathbb{R}.$$

Если конус H содержит нулевой вектор, т.е. $tH\subset H$ при всех $0\leqslant t\in\mathbb{R}$, то H — *конус с вершиной в нуле.* Конус H *выпуклый,* если H — выпуклое множество. Таким образом, H — *выпуклый конус с вершиной в нуле*, если и только если

$$tH+tH:=\bigl\{th_1+th_2 \bigm| h_1\in H, h_2\in H\bigr\}\subset H \quad \text{при всех } 0\leqslant t\in\mathbb{R}.$$

Через $\mathsf{Meas}_0^+(D)$ обозначаем *выпуклый конус с вершиной в нуле всех положительных конечных борелевских мер с компактными носителем в D*, $\mathsf{sbh}(D)$ — *выпуклый конус с вершиной в нуле всех субгармонических на D функций,* который включает в себя функцию, тождественно равную $-\infty$ на D. При рассмотрении области $D\subset\mathbb{C}^d$ через $\mathsf{psbh}(D)\subset\mathsf{sbh}(D)$ обозначаем *выпуклый конус с вершиной в нуле всех плюрисубгармонических функций на D.* Все необходимые используемые в настоящей статье сведения о субгармонических и плюрисубгармонических функциях можно почерпнуть из [14], [15].

Как и в монографии [16], если интеграл от функции по мере μ существует и принимает значение из $\overline{\mathbb{R}}$, то эту функцию называем интегрируемой по мере μ, или *μ–интегрируемой,* а если этот интеграл ещё и конечен, т.е. со значением в $\mathbb{R}$, то эту функцию называем суммируемой по мере μ, или *μ–суммируемой.* Таким образом, расширенная вещественная функция $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}}$ *локально интегрируема на D по мере μ*, или *локально μ–интегрируема на D*, если существует интеграл

$$\int_K f\,\mathrm{d}\mu\in\overline{\mathbb{R}} \quad \text{для каждого компакта } K\subset D, \tag{1.1}$$

а если все интегралы в (1.1) конечны, т.е. принимают значения из $\mathbb{R}$, то функция f *локально суммируема на D по мере μ*, или *локально μ–суммируема на D.*

Понятия суммируемости или интегрируемости интегралов, а также равенств $\overset{\text{п.в.}}{=}$ и неравенств $\leqslant^{\text{п.в.}}$ почти всюду (п.в.) *без указания меры* относятся ниже именно к мере $\mathfrak{m}_d$.

Всякая *постоянная* $c\in\overline{\mathbb{R}}$ часто рассматривается и как *функция, тождественно равная* величине c. Таким образом, для функции $u\colon D\to\overline{\mathbb{R}}$ запись $u\neq-\infty$ означает, что функция u не тождественная $-\infty$ на D. Через

$$\begin{aligned}&\mathsf{sbh}_*(D):=\bigl\{u\in\mathsf{sbh}(D)\bigm| u\neq-\infty\bigr\},\\ &\mathsf{psbh}_*(D):=\bigl\{u\in\mathsf{psbh}(D)\bigm| u\neq-\infty\bigr\}\subset\mathsf{sbh}_*(D)\end{aligned} \tag{1.2}$$

обозначаем выпуклые конусы с вершиной в нуле всех соответственно субгармонических на $D\subset\mathbb{R}^d$ и плюрисубгармонических на $D\subset\mathbb{C}^d$ функций, не равных тождественно $-\infty$. Каждая функция $u\in\mathsf{sbh}_*(D)$ локально суммируема на D.

Для расширенной вещественной функции $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}}$ её *полунепрерывная сверху регуляризация* $f^*\colon D\to\overline{\mathbb{R}}$ определяется как $f^*(x):=\limsup\limits_{x'\to x}f(x')$ в каждой точке $x\in D$. Функция $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}}$ *локально ограничена сверху на D*, если $\sup\limits_{x\in K}f(x)<+\infty$ для каждого компакта $K\subset D$.

Наше исследование опирается на функционально–аналитические результаты из [10] и [11], где достаточно детально изложена и история вопроса с обширной библиографией, на чём мы здесь не останавливаемся. Здесь эти результаты применяются для двойственного описания *нижней огибающей* $x\underset{x\in D}{\longmapsto}\sup\bigl\{h(x)\bigm| H\ni h\leqslant f\bigr\}$ функций $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}}$ относительно выпуклых подконусов $H\subset\mathsf{sbh}(D)$, а также для двойственного описания условий, при которых для пары функций $v\in H_*\overset{(1.2)}{:=}H\setminus\{-\infty\}$ и $M\in H_*$, а также непрерывной функции $m\in C(D)$ найдётся такая функция $h\in H_*$, что $v+h\leqslant M+m$ на D. Наши основные результаты можно трактовать и как решения в частных случаях поставленных в [10, п. 2.3, задачи 1–3], [11, раздел 1.2; п. 1.2.3, задачи 1–3] общих проблем о существовании огибающей из выпуклых конусов или множеств.

Теорема 1.1. *Пусть выпуклый конус $H\subset \mathsf{sbh}(D)$ с вершиной в нуле содержит постоянную -1 и для любой локально ограниченной сверху на D последовательности $(h_k)_{k\in\mathbb N}$ функций $h_k\in H$ полунепрерывная сверху регуляризация h^* поточечного верхнего предела*

$$h\colon x\underset{x\in D}{\longmapsto}\limsup_{k\to\infty}h_k(x):=\inf_{n\in\mathbb N}\sup_{k\geq n}h_k(x) \tag{1.3}$$

этой последовательности $(h_k)_{k\in\mathbb N}$ принадлежит этому конусу H.

Тогда для любой определённой п.в. функции f на D, равной п.в. некоторой функции из $C(D)+H-H$, также, естественно, определённой п.в., следующее равенство

$$\sup\left\{\int_{\overline{B}_o(r)}h\,d\mathfrak m_d\;\middle|\;-\infty\neq h\in H, h\leqslant^{\text{п.в.}}f\text{ на }D\right\}=\inf_{\mu\in \mathsf J_o^r(D;H)}\int_D f\,d\mu, \tag{1.4}$$

где

$$\mathsf J_o^r(D;H):=\left\{\mu\in\mathsf{Meas}_0^+(D)\;\middle|\;\int_{\overline{B}_o(r)}h\,d\mathfrak m_d\leqslant\int_D h\,d\mu\text{ для всех }h\in H\right\} \tag{1.5}$$

— класс всех линейных выметаний [8]–[12] сужения $\mathfrak m_d$ на $\overline{B}_o(r)$ относительно H, имеет место при любом выборе замкнутого шара $\overline{B}_o(r)\subset D$.

Следствие 1.1. *В условиях теоремы 1.1 равносильны следующие три утверждения:*
1) *существует функция $h\in H$, для которой $-\infty\neq h\leqslant^{\text{п.в.}}f$ на D;*
2) *для каждого замкнутого шара $\overline{B}_o(r)\subset D$ справедливо утверждение*
   (i) *точная нижняя грань* inf *из* (1.4) *по всем мерам $\mu\in\mathsf J_o^r(D;H)$ не равна $-\infty$;*
3) *существует замкнутый шар $\overline{B}_o(r)\subset D$, для которого выполнено утверждение* (i).

Примерами конусов H, удовлетворяющих условиям теоремы 1.1, являются выпуклые конусы $\mathsf{sbh}(D)$ при $D\subset\mathbb R^d$ и $\mathsf{psbh}(D)\subset\mathsf{sbh}(D)$ при $D\subset\mathbb C^d$. Наиболее важна в теореме 1.1 широкая возможность выбора f из $H-H+C(D)$. Случай $f\in C(D)$ ранее был полностью разобран в [10, следствие 8.1], [11, следствие 3.2.1], [9, теорема 7.2]. При $H:=\mathsf{psbh}(D)$ *в равенствах вида* (1.4) в [1]–[3] от f всегда требовалась локальная ограниченность сверху на D. Но при крайне актуальном для дальнейших применений варианте $f\in H-H$ локальная ограниченность сверху скорее не выполняется, поскольку функции из $-H$ могут быть не ограничены сверху даже на любом непустом открытом подмножестве из D. Приведём ещё одно следствие для конуса $\mathsf{psbh}(D)$, которое, вообще говоря, не может быть получено из основных результатов работ [1]–[3] и др. В случае выпуклого конуса $H=\mathsf{sbh}(D)$ *всех* субгармонических функций на области $D\subset\mathbb R^d$ аналогичное утверждение — это основной результат нашей недавней статьи [13, теорема 1]. В частности, в случае размерности $d=2$ при отождествлении комплексной плоскости $\mathbb C$ с $\mathbb R^2$ приведённое ниже следствие 1.2 и результат [13, теорема 1] практически совпадают.

Следствие 1.2. *Для плюрисубгармонических функций $v\neq-\infty$ и $M\neq-\infty$ на области $D\subset\mathbb C^d$ и непрерывной функции $m\colon D\to\mathbb R$ равносильны следующие три утверждения:*
1) *существует плюрисубгармоническая на D функция $h\neq-\infty$, для которой*

$$v(z)+h(z)\leqslant M(z)+m(z)\quad\text{в каждой точке } z\in D; \tag{1.6}$$

2) *для каждого замкнутого шара $\overline{B}_o(r)\subset D$ найдётся такое число $C\in\mathbb R$, что*

$$\int_D v\,d\mu\leqslant\int_D(M+m)\,d\mu+C\quad\text{при всех }\mu\in\mathsf J_o^r\bigl(D;\mathsf{psbh}(D)\bigr). \tag{1.7}$$

3) *существуют замкнутый шар* $\overline{B}_o(r) \subset D$ *и* $C \in \mathbb{R}$, *для которых имеет место* (1.7).

2. Огибающие в проективных пределах векторных решёток

Материал этого раздела будет использован как основа доказательства теоремы 1.1.

Упорядоченное векторное пространство $(X, \leqslant)$ над $\mathbb{R}$ с отношением порядка $\leqslant$ называется *векторной решёткой*, если для любого *конечного* $F \subset X$ существует *точная верхняя грань* в X, обозначаемая далее как $X\text{-}\sup F \in X$ [18], [19].

Множество всех функций $f\colon X \to Y$, определённых на всём X значениями из Y, обозначаем далее через Y^X. Для пары векторных решёток X и Y через $\mathsf{lin}^+ Y^X$ обозначаем выпуклый конус с вершиной в нуле *линейных положительных функций* $l\colon X \to Y$.

Пусть $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ — последовательность *векторных решёток* X_n с отношениями порядка соответственно $\leqslant_n$, т.е. последовательность пар $(X_n, \leqslant_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. По этой последовательности $(X_n, \leqslant_n)$ можно построить произведение

$$\prod X_n := \prod_{n=0}^{\infty} X_n \tag{2.1}$$

для которого при $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \prod X_n$ полагаем $\mathsf{pr}_n x = x_n \in X_n$ — *проекция* вектора $x \in \prod X_n$ на пространство X_n. На произведении (2.1) можно ввести отношение порядка $\leqslant$, для которого по определению $x \leqslant x'$ в $\prod X_n$, если $\mathsf{pr}_n x \leqslant_n \mathsf{pr}_n x'$ для каждого $n \in \mathbb{N}_0$.

Пусть $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ — последовательность линейных положительных функций $p_n \in \mathsf{lin}^+ X_n^{X_{n+1}}$ из X_{n+1} в X_n, $n \in \mathbb{N}_0$, для которой предполагаем *сохранение точной верхней грани для конечных подмножеств*, а именно:

$$X_n\text{-}\sup p_n(F_{n+1}) = p_n\bigl(X_{n+1}\text{-}\sup F_{n+1}\bigr) \quad \text{для каждого конечного } F_{n+1} \subset X_{n+1}.$$

Тогда следующее подпространство в произведении (2.1), обозначаемое как

$$X := \operatorname{proj}\lim X_n p_n := \Bigl\{x \in \prod X_n \Bigm| \mathsf{pr}_n x = p_n(\mathsf{pr}_{n+1} x) \text{ при всех } n \in \mathbb{N}_0\Bigr\},$$

с тем же отношением порядка $\leqslant$, что и на $\prod X_n$, — векторная решётка, называемая *проективным пределом последовательности* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *векторных решёток по* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Не умаляя общности, можно считать [10, предложение 3.1], [11, предложение 2.1.1], что

$$\mathsf{pr}_n X := \bigl\{\mathsf{pr}_n x \bigm| x \in X\bigr\} = X_n \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}_0,$$

т.е. проекции pr_n из проективного предела $X = \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ на X_n *сюръективны*.

Подмножество $B \subset X$ *ограничено снизу (сверху)* в X, если существует вектор x в X, для которого $x \leqslant b$ (соответственно $b \leqslant x$) для всех $b \in B$. Подмножество $B \subset X$ *ограничено в* X, если B ограничено и снизу, и сверху в X.

Теорема 2.1 ([10, теорема 2, следствия 6.1, 3.1], [11, теорема 2.4.1, следствия 2.4.1, 2.1.1]). *Пусть* $H_* \subset X := \operatorname{proj}\lim X_n p_n$ *— выпуклый конус с вершиной в нуле, а для любой ограниченной в* X *последовательности* $\bigl(h^{(k)}\bigr)_{k\in\mathbb{N}}$ *векторов* $h^{(k)} \in H_*$ *существует принадлежащий конусу* H_* *верхний предел*

$$\limsup_{k\to\infty} h^{(k)} := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} h^{(k)} \in H_*. \tag{2.2}$$

Пусть $S \subset X$ *— векторное подпространство, содержащее конус* H_*, *и при каждом* $n \in \mathbb{N}_0$ *для любого* $s_n \in \mathsf{pr}_n S$ *найдётся такой вектор* $h_n \in \mathsf{pr}_n H_*$, *что* $h_n \leqslant_n s_n$.

Пусть $q_0 \in \mathsf{lin}^+ \mathbb{R}^{X_0}$ *— линейная положительная функция на* X_0, *и для суперпозиции*

$$q := q_0 \circ \mathsf{pr}_0 \in \mathsf{lin}^+ \mathbb{R}^X \tag{2.3}$$

для любой убывающей в X последовательности $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ векторов $h^{(k)}\in H_*$ при условии конечности точной нижней грани

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \overset{(2.3)}{=} \inf_{k\in\mathbb{N}} q_0\bigl(\mathsf{pr}_0 h^{(k)}\bigr)\in\mathbb{R} \tag{2.4}$$

эта последовательность $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена снизу в X и

$$q\bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\bigr)\geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}). \tag{2.5}$$

Тогда для каждого вектора $s\in S$ величина

$$\sup\bigl\{q(h)\bigm| H_*\ni h\leqslant s\bigr\}\in\overline{\mathbb{R}} \tag{2.6}$$

равна величине

$$\inf\Bigl\{(l_n\circ\mathsf{pr}_n)(s)\Bigm| n\in\mathbb{N}_0, l_n\in\mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{\mathsf{pr}_nS}, q(h)\leqslant(l_n\circ\mathsf{pr}_n)(h)\ \textit{при всех}\ h\in H_*\Bigr\}\in\overline{\mathbb{R}}. \tag{2.7}$$

3. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1.1. Для области $D\subset\mathbb{R}^d$ выберем исчерпание последовательностью $(D_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ областей $D_n\subset\mathbb{R}^d$, для которого $\overline{B}_o(r)\subset D_0$, *замыкание* $\mathsf{clos}\,D_n$ области D_n содержится в области D_{n+1} при каждом $n\in\mathbb{N}_0$ и $D=\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}D_n$. Для $n\in\mathbb{N}_0$ рассмотрим пространство $X_n:=L^1(\mathsf{clos}\,D_n)$ суммируемых на $\mathsf{clos}\,D_n$ функций с отношением поточечного предпорядка $\leqslant_n^{\text{п.в.}}$, факторизацию которого по отношению $\overset{\text{п.в.}}{=}$ обозначим через X_n, где $\leqslant_n^{\text{п.в.}}$ уже отношение порядка. В качестве линейных положительных функций $p_n\in\mathsf{lin}^+X_n^{X_{n+1}}$ выберем *сужения «функций» из X_{n+1} на* $\mathsf{clos}\,D_{n+1}$, которые становятся уже векторами из X_n. Проективный предел $\operatorname{proj}\lim X_np_n$ в этом случае — это факторизованное по отношению $\overset{\text{п.в.}}{=}$ пространство локально суммируемых на D функций, с отношением порядка $\leqslant^{\text{п.в.}}$, которое обозначаем через $L^1_{\text{loc}}(D)$. Удаляя из выпуклого конуса $H\subset\mathsf{sbh}(D)$ функцию, тождественно равную $-\infty$, положим

$$H_*:=H\setminus\{-\infty\}\overset{(1.2)}{\subset}\mathsf{sbh}_*(D)\overset{(1.2)}{:=}\mathsf{sbh}(D)\setminus\{-\infty\}\subset L^1_{\text{loc}}(D).$$

Полунепрерывная сверху регуляризация верхнего предела последовательности субгармонических функций на области, — если этот верхний предел не равен $-\infty$, — с одной стороны даёт субгармоническую функцию, а с другой отличается от верхнего предела разве что на множестве нулевой $\mathfrak{m}_d$–меры, и даже меньшем, полярном. Поэтому для этого конуса H_* выполнено условие, завершающееся соотношением (2.2).

Положим $S:=C(D)+H_*-H_*\subset L^1_{\text{loc}}(D)$. Очевидно, $H_*\subset S$. Пусть $s_n\in S$, т.е. $s_n=g_n+h_n-h_n'$, где $g_n\in C(\mathsf{clos}\,D_n)$, а $h_n\in\mathsf{pr}_nH_*$ и $h_n'\in\mathsf{pr}_nH_*$ — сужения на $\mathsf{clos}\,D_n$ функций из H_*. Тогда существуют *положительные числа* c и c', для которых $g_n\geqslant -c$ на $\mathsf{clos}\,D_n$ и $h_n'\leqslant_n c'$ на $\mathsf{clos}\,D_n$. Следовательно, $h_n-c-c'\leqslant_n s_n$, где $h_n\in\mathsf{pr}_nH_*$, а также отрицательная постоянная $-c-c'=(c+c')(-1)$ принадлежит pr_nH_*, поскольку по условию $-1\in H_*$. Таким образом, выполнены условия теоремы, касающееся подпространства S.

В качестве q_0 в теореме 2.1 рассмотрим сужение меры $\mathfrak{m}_d$ на $\overline{B}_o(r)$ в том смысле, что

$$q_0(f_0):=\int_{\overline{B}_o(r)} f_0\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d\in\mathbb{R}\quad\text{для всех } f_0\in X_0=\mathsf{pr}_0L^1_{\text{loc}}(D). \tag{3.1}$$

Функция $u\colon D\to\overline{\mathbb{R}}$ *почти субгармоническая* на D, если она п.в. совпадает с субгармонической функцией [20]. Для *произвольной убывающей п.в. последовательности* $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ почти субгармонических на D функций $h^{(k)}$ условие $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)})\in\mathbb{R}$ означает, что

$$\inf_{k\in\mathbb{N}}\int_{\overline{B}_o(r)} h^{(k)}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d>-\infty. \tag{3.2}$$

Отсюда предел этой последовательности даёт почти субгармоническую функцию на D. Тем более это верно для убывающей последовательности $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ из конуса H_*, содержащегося в $\subset \mathsf{sbh}(D)\setminus\{-\infty\}$. Верхний предел (2.2) убывающей последовательности — это точная нижняя грань этой последовательности. Поэтому по условию теоремы 1.1 для последовательностей $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ при условии (3.2) получаем $-\infty\neq\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\in H$. В частности, при (3.2) убывающая последовательность $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ из H_*, очевидно, ограниченная сверху функцией $h^{(1)}$, ограничена и снизу функцией $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\in H_*$. При этом можем считать все функции $h^{(k)}$ полунепрерывными сверху. Для убывающей последовательности таких функций $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}}$ можно внести под знак интеграла:

$$\inf_{k\in\mathbb{N}}\int_{\overline{B}_o(r)} h^{(k)}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d=\int_{\overline{B}_o(r)}\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d.$$

Это означает, что выполнено требуемое в (2.4)–(2.5) неравенство

$$q\bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\bigr)\geqslant\inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)})\quad\text{для } q:=q_0\circ\mathsf{pr}_0.$$

В итоге из условий теоремы 1.1 следуют все условия теоремы 2.1. Легко видеть, что

$$\sup\bigl\{q(h)\bigm| H_*\ni h\leqslant s\bigr\}\in\overline{\mathbb{R}}$$

— это в точности левая часть равенства (1.4).

Убедимся теперь, что (2.7) в рассматриваемой ситуации — это правая часть в (1.4).

Пусть, как в (2.7), $l_n\in\mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{\mathsf{pr}_n S}$, где $S=C(D)+H_*-H_*$. Тогда

$$l_n\in\mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{\mathsf{pr}_n C(D)}=\mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{C(\mathsf{clos}\,D_n)},$$

откуда по теореме Рисса линейная положительная функция l_n на $C(\mathsf{clos}\,D_n)$ реализуется как некоторая положительная конечная мера Бореля μ на D с компактным носителем в $\mathsf{clos}\,D_n$, которая однозначно продолжается на все полунепрерывные сверху функции на $\mathsf{clos}\,D_n$ с возможными значениями в $\overline{\mathbb{R}}$. В частности, мера μ однозначно распространяется и на субгармонические функции из H_* в силу их полунепрерывности сверху. Таким образом, требование из (2.7) вида $q(h)\leqslant(l_n\circ\mathsf{pr}_n)(h)$ при всех $h\in H_*$ для $q=q_0\circ\mathsf{pr}_0$ согласно (3.1) в терминах меры μ можно записать как

$$\int_D h\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d\leqslant\int_D h\,\mathrm{d}\mu\quad\text{при всех } h\in H_*.$$

Последнее влечёт за собой конечность интегралов

$$\int_D h\,\mathrm{d}\mu\in\mathbb{R}\quad\text{для всех } h\in H_*.$$

Следовательно, полученные таким образом меры $\mu\in\mathsf{Meas}_0^+(D)$ корректно определены на $S=C(D)+H_*-H_*$ и пробегают в точности $J_o^r(D;H_*)=J_o^r(D;H_*)$ из (1.5), поскольку удаление постоянной $-\infty$ из H в (1.4)–(1.5) ничего не меняет. Таким образом, равенство (1.4) установлено, что завершает доказательство теоремы 1.1. $\square$

Доказательство следствия 1.1. Утверждение 1) равносильно тому, что левая часть (1.4) не равна $-\infty$ как для любого, так и для какого-нибудь шара $\overline{B}_o(r)\subset D$. В силу равенства (1.4) теоремы 1.1 это эквивалентно тому, что правая часть равенства (1.4) не равна $-\infty$ для таких вариантов выбора шара $\overline{B}_o(r)\subset D$. Последнее влечёт за собой равносильность трёх утверждений 1–3 следствия 1.1, что завершает её доказательство. $\square$

Доказательство следствия 1.2. Для выпуклого конуса $H := \mathsf{psbh}(D)$ с вершиной в нуле, как уже отмечалось, выполнены условия теоремы 1.1, а значит, и следствия 1.1. При выборе

$$f \overset{(1.2)}{:=} m + M - v \in C(D) + \mathsf{psbh}_*(D) - \mathsf{psbh}_*(D) \tag{3.3}$$

из следствия 1.1 получаем эквивалентность трёх утверждений 1–3 следствия 1.1. Согласно выбору (3.3) функции f это можно записать в виде эквивалентности трёх утверждений

a) существует функция $h \in H$, для которой $-\infty \neq h \overset{\text{п.в.}}{\leqslant} m + M - v$ на D;

b) для каждого замкнутого шара $\overline{B}_o(r) \subset D$ справедливо соотношение

$$\inf_{\mu \in J_o^r(D;\mathsf{psbh}(D))} \int_D (m + M - v)\,\mathrm{d}\mu > -\infty; \tag{3.4}$$

c) существует замкнутый шар $\overline{B}_o(r) \subset D$, для которого выполнено (3.4).

Здесь (3.4) в точности то же самое, что и (1.7). Поэтому для завершения доказательства следствия 1.2 достаточно установить, что неравенство $v+h \overset{\text{п.в.}}{\leqslant} m+M$ на D из приведённого выше утверждения a) влёчет за собой более сильное, вообще говоря, неравенство (1.6) из утверждения 1) следствия 1.2. Для этого обозначим через

$$v^{\bullet r}(z) := \frac{1}{\mathfrak{m}_{2d}(\overline{B}_z(r))} \int_{\overline{B}_z(r)} v\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_{2d}$$

интегральные средние функции v по шарам $\overline{B}_z(r) \subset D$. В силу субгармоничности плюрисубгармонических функций из неравенства $v + h \overset{\text{п.в.}}{\leqslant} m + M$ на D получаем

$$v(z) + h(z) \leqslant v^{\bullet r}(z) + h^{\bullet r}(z) \leqslant m^{\bullet r}(z) + M^{\bullet r}(z) \quad \text{при каждом } z \in D$$

для всех достаточно малых $r > 0$. Каждая точка области D — точка Лебега для функций m и M, поэтому, устремляя r к нулю в правой части, получаем требуемое (1.6) всюду на области D. Это завершает доказательство следствия 1.2. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Bu, W. Schachermayer. *Approximation of Jensen measures by image measures under holomorphic functions and applications* // Trans. Am. Math. Soc. **331**:2, 585–608 (1992).
2. E.A. Poletsky. *Disk envelopes of functions. II* // J. Funct. Anal. **163**:1, 111–132 (1999).
3. B.J. Cole, T.J. Ransford. *Subharmonicity without upper semicontinuity* // J. Funct. Anal. **147**:2, 420–442 (1997).
4. Б.Н. Хабибуллин. *Наименьшая плюрисупергармоническая мажоранта и мультипликаторы целых функций.* I // Сиб. мат. ж. **33**:1, 173–178 (1992).
5. Б.Н. Хабибуллин. *Наименьшая плюрисупергармоническая мажоранта и мультипликаторы целых функций.* II. *Алгебры функций конечного λ-типа* // Сиб. мат. ж. **33**:3, 186–191 (1992).
6. Б.Н. Хабибуллин. *Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения.* I. *Целые и мероморфные функции* // Изв. РАН. Сер. мат. **57**:1, 129–146 (1993).
7. Б.Н. Хабибуллин. *Теорема о наименьшей мажоранте и ее применения. II. Целые и мероморфные функции конечного порядка* // Изв. РАН. Сер. мат. **57**:3, 70–91 (1993).
8. Б.Н. Хабибуллин. *Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I* // Изв. РАН. Сер. мат. **65**:4, 205–224 (2001).
9. Б.Н. Хабибуллин. *Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II* // Изв. РАН. Сер. мат. **65**:5, 167–190 (2001).
10. Б.Н. Хабибуллин, А.П. Розит, Э.Б. Хабибуллина. *Порядковые версии теоремы Хана–Банаха и огибающие. II. Применения в теории функций* // Комплексный анализ. Математическая физика. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. М.: ВИНИТИ РАН. **162**, 93–135 (2019).

11. Б.Н. Хабибуллин. *Огибающие в теории функций.* Уфа: РИЦ БашГУ (2021).
12. B.N. Khabibullin, E.B. Menshikova. *Preorders on Subharmonic Functions and Measures with Applications to the Distribution of Zeros of Holomorphic Functions* // Lobachevskii J. Math. **43**:3, 587–611 (2022).
13. Б.Н. Хабибуллин. *Субгармонические огибающие для функций на области* // Вестн. Самар. Унив. Естественнонаучн. сер. **29**:3, 64–71 (2023).
14. У. Хейман, П. Кеннеди. *Субгармонические функции.* М.: Мир (1980).
15. L. Hörmander. *Notions of Convexity.* Birkhäser, Boston (1994).
16. Л.К. Эванс, К.Ф. Гариепи. *Теория меры и тонкие свойства функции.* Новосибирск: Научная книга (ИДМИ) (2002).
17. J.L. Doob. *Classical potential theory and its probabilistic counterpart.* Springer-Verlag, New York (1984).
18. С.С. Кутателадзе, А.М. Рубинов. *Двойственность Минковского и ее приложения.* Новосибирск: Наука (1976).
19. Г.П. Акилов, С.С. Кутателадзе. *Упорядоченные векторные пространства.* Новосибирск: Наука (1978).
20. M.G. Arsove. *Functions representable as differences of subharmonic functions* // Trans. Am. Math. Soc. **75**, 327–365 (1953).

Елена Геннадьевна Кудашева,
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3-а,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: lena_kudasheva@mail.ru

Энже Булатовна Меньшикова,
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: enzha@list.ru

Булат Нурмиевич Хабибуллин,
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3-а,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: khabib-bulat@mail.ru