ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 3 (2024). С. 58-68.

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП

А.С. КРИВОШЕЕВ, О.А. КРИВОШЕЕВА

Аннотация. В работе изучаются пространства функций, аналитических в выпуклых областях комплексной плоскости. Рассматриваются подпространства таких пространств инвариантные относительно оператора дифференцирования. Исследуется проблема фундаментального принципа для инвариантного подпространства, т.е. проблема представления всех его элементов при помощи ряда из собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в этом подпространстве — экспонент и экспоненциальных мономов. Приводится полное описание пространства последовательностей коэффициентов рядов, посредством которых представляются функции из инвариантного подпространства. Исследуется также задача кратной интерполяции в пространствах целых функций экспоненциального типа. Рассматривается двойственность проблем интерполяции и фундаментального принципа. Задача указанной двойственности полностью решена. Установлена двойственность проблем фундаментального принципа и интерполяции для произвольной выпуклой области без каких-либо ограничений.

Ключевые слова: экспоненциальный моном, выпуклая область, фундаментальный принцип, интерполяция, двойственность.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область и $H(D)$ — пространство функций аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактах из D. Отметим, что $H(D)$ является пространством Фреше–Шварца ([1, гл. I, теорема 4.6]). Символом $W(\Lambda, D)$ обозначим замыкание в пространстве $H(D)$ линейной оболочки системы

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}.$$

Если система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$, то $W(\Lambda, D)$ является нетривиальным ($\neq H(D)$, $\{0\}$) замкнутым подпространством в $H(D)$. Из определения $W(\Lambda, D)$ вытекает, что оно инвариантно относительно оператора дифференцирования. При этом система $\mathcal{E}(\Lambda)$ — это набор собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в $W(\Lambda, D)$, а Λ — его кратный спектр.

Пусть $W \subset H(D)$ — нетривиальное замкнутое подпространство инвариантное относительно оператора дифференцирования, и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — его кратный спектр. Он является не более чем счетным множеством с единственной предельной точкой ∞ ([2, гл. II, §7]). В случае, когда спектр W конечен, оно совпадает с пространством решений однородного

A.S. Krivosheev, O.A. Krivosheeva, Interpolation and fundamental principle.

Поступила 7 января 2024 г.

линейного дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами. Более общим примером инвариантного подпространства служит множество решений уравнения свертки $\mu(g(z+w)) \equiv 0$ (или системы таких уравнений), где $\mu \in H^*(D)$ и $H^*(D)$ — пространство линейных непрерывных функционалов на пространстве $H(D)$. Частными случаями уравнения свертки являются линейные дифференциальные, разностные, дифференциально–разностные уравнения с постоянными коэффициентами конечного и бесконечного порядков, а также некоторые виды интегральных уравнений.

Основная задача в теории инвариантных подпространств — представление всех его функций посредством собственных и присоединенных функций $z^n e^{\lambda_k z}$ оператора дифференцирования. Если W — пространство решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами конечного порядка, то оно совпадает с линейной оболочкой системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Этот результат известен как фундаментальный принцип Л. Эйлера. В этой связи задача представления функций $g \in W$ посредством рядов по элементам системы $\mathcal{E}(\Lambda)$, т.е. рядов

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \tag{1.1}$$

(которые сходятся в топологии пространства $H(D)$) называется проблемой фундаментального принципа для инвариантного подпространства. Первым шагом на пути к представлению (1.1) является решение проблемы спектрального синтеза, т.е. выяснение условий, при которых система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в подпространстве W (другими словами, когда $W = W(\Lambda, D)$). Проблему фундаментального принципа, естественно, имеет смысл рассматривать лишь для инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, т.е. для подпространств вида $W(\Lambda, D)$.

К концу 40–х годов прошлого столетия была замечена тесная связь между проблемой фундаментального принципа и проблемой интерполяции в пространствах целых функций экспоненциального типа. Оказалось, что они двойственные. Первый, кто использовал разрешимость интерполяционной задачи для разложения решений уравнения свертки в ряды экспонент, был, по-видимому, А.Ф. Леонтьев. Вслед за ним указанная связь использовалась уже систематически. Проблема интерполяции в пространствах целых функций сама по себе представляет значительный интерес и имеет богатую историю. Исследования указанных двойственных задач, проводившиеся вначале независимо друг от друга, имеют богатую историю. Основные ее этапы отражены в работах [3] и [4]. В последней работе получен наиболее общий на данный момент результат о двойственности проблем фундаментального принципа и интерполяции для произвольной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ при одном ограничении на относительную кратность $\Lambda : n_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}| \to 0$ для любой последовательности $\{\lambda_{k(p)}\}$ такой, что $\lambda_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}| \to e^{-i\varphi}$ и $H(\varphi, D) < +\infty$, где

$$H(\varphi, D) = \sup_{z\in D} \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi})$$

— опорная функция области D.

В данной работе задача указанной двойственности полностью решена. Установлена двойственность проблем фундаментального принципа и интерполяции для произвольной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ без каких-либо ограничений.

2. Фундаментальный принцип

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D — выпуклая область и $W(\Lambda, D)$ — нетривиальное подпространство в пространстве $H(D)$. По теореме Хана–Банаха последнее равносильно существованию ненулевого функционала $\mu \in H^*(D)$, который обращается в ноль на $W(\Lambda, D)$.

Пусть $\widehat{\mu}$ обозначает преобразование Лапласа функционала $\mu \in H^*(D)$: $\widehat{\mu}(\lambda) = \mu(e^{\lambda z})$. Функция $\widehat{\mu}$ является целой и имеет экспоненциальный тип, т.е. для некоторых $A, B > 0$ верно неравенство $|\widehat{\mu}(\lambda)| \leqslant A\exp(B|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Известно ([1, гл. III, §12, теорема 12.3]), что преобразование Лапласа устанавливает алгебраический и топологический изоморфизм между пространствами $H^*(D)$ и P_D, где P_D — индуктивный предел банаховых пространств

$$P_s = \{f \in H(\mathbb{C}) : ||f||_s = \sup_{re^{i\varphi}\in\mathbb{C}} |f(re^{i\varphi})| \exp(-rH(-\varphi, K_s)) < \infty\},$$

$\mathcal{K}(D) = \{K_s\}_{s=1}^{\infty}$ — последовательность выпуклых компактов, исчерпывающая область D, т.е. $K_s \subset \mathrm{int} K_{s+1}$, $s \geq 1$, (int обозначает внутренность множества), и $D = \cup_{s=1}^{\infty} K_s$. Из определения $\mathcal{K}(D)$ следует, что найдутся числа $\alpha_s > 0$, $s \geq 1$, такие, что

$$H(\varphi, K_s) + \alpha_s \leqslant H(\varphi, K_{s+1}), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{2.1}$$

Отметим, что

$$P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_s \subset \tag{2.2}$$

и множество P_D состоит из объединения множеств P_s, $s \geq 1$. Пространство P_D есть так называемое LN^* пространство, т.е. представляет собой объединение последовательности банаховых пространств, для которых верно (2.2) и вложения вполне непрерывны (это следует из оценки (2.1)). Следовательно, P_D является отделимым и полным ([1, гл. I, §2, теорема 2.4]).

Поскольку $W(\Lambda, D)$ нетривиально, то существует ненулевой функционал $\mu \in H^*(D)$, который обращается в ноль на всех функциях системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Тогда его преобразование Лапласа $\widehat{\mu} = f \in P_D$ обращается в ноль в точках λ_k с кратностью не меньшей чем n_k.

Пусть K — сопряженная диаграмма функции f ([2, гл. I, §5]). По теореме Полиа ([2, гл. I, §5, теорема 5.4]) верно равенство

$$h_f(\varphi) = H(-\varphi, K), \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

где h_f — (верхний) индикатор функции f:

$$h_f(\varphi) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r}.$$

Включение $f \in P_D$ означает, что

$$H(-\varphi, K) = h_f(\varphi) \leqslant H(-\varphi, K_s) < H(-\varphi, D), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \tag{2.3}$$

для некоторого номера $s \geq 1$. Отсюда следует вложение $K \subset D$.

Наличие функции f с указанными свойствами влечет за собой ([5, гл. IV, §1, п. 2]) существование биортогональной к $\mathcal{E}(\Lambda)$ системы функционалов

$$\Xi(\Lambda, D) = \{\mu_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} \subset H^*(D) : \mu_{k,n}(z^l e^{\lambda_j z}) = 1,$$

если $j = k$, $l = n$, и $\mu_{k,n}(z^l e^{\lambda_j z}) = 0$ в противном случае. Она строится при помощи функции f. Так как функций f с указанными свойствами бесконечно много, то система $\Xi(\Lambda, D)$ определяется не единственным образом.

Предположим, что ряд (1.1) сходится равномерно на компактных подмножествах области D к функции g. Тогда, пользуясь непрерывностью и линейностью функционалов $\mu_{k,n}$, получаем $d_{k,n} = \mu_{k,n}(g)$, $k \geq 1$, $n = \overline{0, n_k - 1}$. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D — выпуклая область и $W(\Lambda, D)$ — нетривиальное подпространство в пространстве $H(D)$. Если функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется* *рядом (1.1), сходящимся в топологии $H(D)$, то представление единственное, а его коэффициенты можно вычислить по формуле $d_{k,n} = \mu_{k,n}(g)$, где $\Xi(\Lambda, D) = \{\mu_{k,n}\}$ — произвольная биортогональная последовательность к системе $\mathcal{E}(\Lambda)$.*

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}$, $k \geq 1$, и D — выпуклая область. Опишем пространство последовательностей коэффициентов $\{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$, при которых в области D сходится ряд (1.1). Для каждого $s \geq 1$ введем банахово пространство

$$Q_s(\Lambda) = \{d = \{d_{k,n}\} : ||d||_s = \sup_{k,n} |d_{k,n}| s^n \exp(r_k H(-\varphi_k, K_s)) < \infty\}.$$

В силу (2.1) выполнены неравенства

$$||d||_1 \leqslant ||d||_2 \leqslant \cdots \leqslant ||d||_s \leqslant \cdots, \quad d \in Q(D, \Lambda). \tag{2.4}$$

Следовательно, имеет место цепочка вложений

$$Q_1(\Lambda) \supset Q_2(\Lambda) \supset \cdots \supset Q_s(\Lambda) \supset \cdots \tag{2.5}$$

Положим

$$Q(D, \Lambda) = \bigcap_{s=1}^{\infty} Q_s(\Lambda).$$

В пространстве $Q(D, \Lambda)$ определим метрику

$$\rho(d, b) = \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s} \frac{||d-b||_s}{1 + ||d-b||_s}.$$

С этой метрикой $Q(D, \Lambda)$ становится пространством Фреше. Нетрудно заметить, что для выпуклой области $D_1 \supset D$ верно вложение $Q(D_1, \Lambda) \subset Q(D, \Lambda)$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Положим

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_k|}, \quad n(\Lambda) = \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{j}{|\xi_j|}, \quad \sigma(\Lambda) = \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\ln j}{|\xi_j|},$$

где $\{\xi_j\}$ — неубывающая по модулю последовательность, составленная из точек λ_k, причем каждая λ_k встречается в ней ровно n_k раз.

Лемма 2.2. *Пусть D — выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Тогда для каждого $s \geq 1$ найдутся $C_s > 0$ и номер $m(s)$ такие, что*

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \sup_{z\in K_s} |z^n e^{z\lambda_k}| \leqslant C_s ||d||_{m(s)}, \quad d = \{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda). \tag{2.6}$$

Доказательство. По условию система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Следовательно, существует целая функция, которая обращается в ноль в точках λ_k с кратностью не меньшей чем n_k. Тогда по теореме Линделефа ([6, гл. I, теорема 15]) имеем: $n(\Lambda) < \infty$. Отсюда следует, что $\sigma(\Lambda) = 0$. Таким образом, выполнены все условия леммы 2.6 в работе [7]. Поэтому верно и ее утверждение, которое совпадает с утверждением данной леммы. Лемма доказана. □

Покажем, что при некоторых естественных условиях пространство $Q(D, \Lambda)$ совпадает с пространством коэффициентов сходящихся в области D рядов вида (1.1).

Пусть $\overline{\lambda}$ — число комплексно сопряженное с λ. Символом $\Theta(\Lambda)$ обозначим множество пределов всех сходящихся последовательностей вида $\{\overline{\lambda}_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}_{j=1}^{\infty}$. Очевидно, что $\Theta(\Lambda)$ — замкнутое подмножество окружности $S(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Положим

$$m(\Lambda, \mu) = \sup \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{n_{k_j}}{\lambda_{k_j}},$$

где супремум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k_j}\}$ таким, что $\overline{\lambda}_{k_j}/|\lambda_{k_j}| \to \mu$. Если $\mu \notin \Theta(\Lambda)$, то, очевидно, верно равенство $m(\Lambda, \mu) = 0$.

Пусть D — выпуклая область. Положим

$$J(D) = \{e^{i\varphi} \in S(0,1) : H(\varphi, D) = +\infty\}.$$

Символом $\overline{J(D)}$ обозначим замыкание множества $J(D)$.

Лемма 2.3. *Пусть D — выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$ и*

$$m(\Lambda, \mu) = 0, \quad \mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(D)}. \tag{2.7}$$

Тогда эквивалентны утверждения:

1) Ряд (1.1) сходится в области D.

2) Имеет место включение $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda)$.

Доказательство. Как и в лемме 2.2 верно неравенство $n(\Lambda) < \infty$. Отсюда следует, что $m(\Lambda) < \infty$ и $\sigma(\Lambda) = 0$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.1 в работе [7]. Поэтому верно и ее утверждение, которое совпадает с утверждением данной леммы. Лемма доказана. □

Замечание 2.1. *Согласно леммам 2.2 и 2.3 при выполнении условий леммы 2.3 поточечная сходимость ряда (1.1) в области D эквивалентна его абсолютной и равномерной сходимости на компактах этой области.*

Условие (2.7) является естественным ограничением на последовательность Λ. В теореме 4.2 работы [8] доказывается, что это условие является необходимым для наличия фундаментального принципа в инвариантном подпространстве $W(\Lambda, D)$. Сформулируем этот результат в удобной для нас форме.

Лемма 2.4. *Пусть D — выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Предположим, что каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ раскладывается в ряд (1.1), сходящийся равномерно на компактах из области D. Тогда верно (2.7).*

Пусть $\mathbb{E}$ — оператор, который элементу $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda)$ ставит в соответствие сумму ряда (1.1).

Лемма 2.5. *Пусть D — выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Тогда оператор $\mathbb{E}$ определен на всем пространстве $Q(D, \Lambda)$, $\mathbb{E}(Q(D, \Lambda)) \subseteq W(\Lambda, D)$, оператор $\mathbb{E}$ инъективен и непрерывен. Если дополнительно оператор $\mathbb{E}$ сюръективен, то он осуществляет изоморфизм линейных топологических пространств $Q(D, \Lambda)$ и $W(\Lambda, D)$.*

Доказательство. В силу (2.6) для любого элемента $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda)$ ряд (1.1) сходится равномерно на компактах в области D. Следовательно, оператор $\mathbb{E}$ определен на всем пространстве $Q(D, \Lambda)$ и $\mathbb{E}(d) = g \in H(D)$. Более того, так как функция g представляется рядом (1.1), то $g \in W(\Lambda, D)$. Также в силу (2.6) для каждого $s \geq 1$ имеем:

$$\sup_{z \in K_s} |\mathbb{E}(d)| \leqslant C_s ||d||_{m(s)}, \quad d \in Q(D, \Lambda).$$

Это означает, что $\mathbb{E} : Q(D, \Lambda) \to W(\Lambda, D)$ — непрерывный оператор. Согласно лемме 2.1 оператор $\mathbb{E}$ инъективен. Предположим дополнительно, что $\mathbb{E}$ сюръективен. Тогда по теореме об открытом отображении для пространств Фреше ([9, гл. VI, п. 3, теорема 8]) оператор $\mathbb{E}$ осуществляет изоморфизм линейных топологических пространств $Q(D, \Lambda)$ и $W(\Lambda, D)$. Лемма доказана. □

Теорема 2.1. *Пусть D — выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) В пространстве $W(\Lambda, D)$ имеет место фундаментальный принцип;

2) Оператор $\mathbb{E} : Q(D, \Lambda) \to W(\Lambda, D)$ — изоморфизм.

Доказательство. Пусть верно 1), т.е. каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ раскладывается в ряд (1.1), сходящийся равномерно на компактах из области D. Тогда по лемме 2.4 верно (2.7). Поэтому согласно лемме 2.3 каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ раскладывается в ряд (1.1) с коэффициентами $\{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda)$. Это означает, что $\mathbb{E}$ сюръективен. Следовательно, по лемме 2.5 верно 2).

Пусть теперь верно 2). Тогда $\mathbb{E}$ сюръективен, т.е. каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ раскладывается в ряд (1.1) с коэффициентами $\{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda)$. В силу (2.6) этот ряд сходится равномерно на компактах из области D. Тогда верно 1). Теорема доказана. □

3. Интерполяция

При помощи преобразования Лапласа проблема фундаментального принципа сводится к задаче кратной интерполяции в пространстве целых функций экспоненциального типа. Исследуем эту задачу.

Пусть $f \in P_D$. Тогда существует номер s такой, что для индикатора h_f выполнено неравенство (2.3). Отметим еще одно свойство индикатора ([6, гл. I, §18, теорема 28]): для каждого $\varepsilon > 0$ существует $R(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\ln |f(re^{i\varphi})| \leqslant (h_f(\varphi) + \varepsilon)r, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad r \geq R(\varepsilon). \tag{3.1}$$

Отсюда и (2.1) следует, что неравенство (2.3) влечет за собой включение $f \in P_D$. Таким образом, функция $f \in P_D$ тогда и только тогда, когда выполнено (2.3). Другими словами функция $f \in P_D$ тогда и только тогда, когда ее сопряженная диаграмма K лежит в области D.

Введем еще пространства комплексных последовательностей

$$\mathcal{R}_s(\Lambda) = \{b = \{b_{k,n}\} : ||b||^s = \sup_{k,n} |b_{k,n}| s^{-n} \exp(-r_k H(-\varphi_k, K_s)) < \infty\}, \quad s \geq 1,$$

где $r_k e^{i\varphi_k} = \lambda_k$ и $\{K_s\} = \mathcal{K}(D)$. Пусть $\mathcal{R}(D, \Lambda)$ — индуктивный предел банаховых пространств $\mathcal{R}_s(\Lambda)$. Тогда имеет место равенство множеств

$$\mathcal{R}(D, \Lambda) = \bigcup_{s=1}^{\infty} \mathcal{R}_s(\Lambda).$$

Пространство $\mathcal{R}(D, \Lambda)$ является LN^* пространством.

Рассмотрим кратную интерполяционную задачу:

$$f^{(n)}(\lambda_k) = b_{k,n}, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geq 1. \tag{3.2}$$

Найдем, прежде всего, естественные оценки на комплексную последовательность $\{b_{k,n}\}$ при условии, что функция $f \in P_D$.

На пространстве P_D определим линейный оператор Σ так, что каждой функции f он ставит в соответствие последовательность $b = \{b_{k,n}\} = \{f^{(n)}(\lambda_k)\}$.

Лемма 3.1. *Пусть D — выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Тогда для каждой функции $f \in P_D$ последовательность $b = \Sigma(f)$ принадлежит пространству $\mathcal{R}(D, \Lambda)$. Оператор $\Sigma : P_D \to R(D, \Lambda)$ непрерывен.*

Доказательство. Пусть $f \in P_s \subset P_D$. Из определения индикатора h_f и пространства P_s следует, что верно (2.3). Это означает, что сопряженная диаграмма K функции f лежит на компакте K_s. Тогда контур ∂K_{s+1}, охватывая (в силу (2.1)) компакт K_s, будет охватывать также и сопряженную диаграмму K. Поэтому имеет место интегральное представление целой функции экспоненциального типа ([2, гл. I, §5, теорема 5.2])

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_{s+1}} e^{z\lambda}\gamma(z)dz,$$

где γ — ассоциированная по Борелю функция к функции f. Напомним, что сопряженная диаграмма является выпуклой оболочкой множества особых точек функции γ. Отсюда, дифференцируя под знаком интеграла, для любых $k \geq 1$ и $n = \overline{0, n_k - 1}$ имеем:

$$|f^{(n)}(\lambda_k)| \leqslant \frac{1}{2\pi i} \sup_{z \in K_{s+1}} |z^n e^{z\lambda_k}| \sup_{z \in K_{s+1}} |\gamma(z)| l_{s+1}, \tag{3.3}$$

где l_{s+1} — длина контура ∂K_{s+1}. Выберем номер $m(s) \geq s+1$ такой, что

$$\max_{z \in K_{s+1}} |z| \leqslant m(s). \tag{3.4}$$

Тогда из (3.3) следует включение $\Sigma(f) \in \mathcal{R}_{m(s)}(\Lambda) \subset \mathcal{R}(D, \Lambda)$. Докажем непрерывность Σ. Для этого нам нужно оценить γ во всех точках контура ∂K_{s+1}. Пусть $z_0 \in \partial K_{s+1}$. Через каждую граничную точку выпуклого компакта K_{s+1} проходит хотя бы одна опорная прямая. Другими словами, найдется $\varphi \in [0, 2\pi]$ такое, что $H(\varphi, K_{s+1}) = \mathrm{Re}(z_0 e^{-i\varphi})$. В полуплоскости

$$\{z : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) > H(\varphi, K)\}$$

имеет место интегральное представление функции γ ([2, гл. I, §5, теорема 5.3]):

$$\gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} \mu f(t\mu) e^{-zt\mu} dt, \quad \mu = e^{-i\varphi}.$$

Так как в силу (2.1) и (2.3)

$$\mathrm{Re}(z_0 e^{-i\varphi}) = H(\varphi, K_{s+1}) > H(\varphi, K_s) \geq H(\varphi, K) = h_f(-\varphi),$$

то оно выполнено в точке z_0. Поэтому с учетом включения $f \in P_s$, выбора φ и (2.1) имеем:

$$|\gamma(z_0)| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} |f(t\mu)| e^{-\mathrm{Re}(z_0 t\mu)} dt \leqslant ||f||_s \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(tH(\varphi, K_s) - tH(\varphi, K_{s+1})\right) dt$$

$$\leqslant ||f||_s \int\limits_0^{+\infty} \exp(-t\alpha_s) dt = \frac{||f||_s}{\alpha_s}.$$

Отсюда с учетом (3.3) и (3.4) получаем:

$$\left|f^{(n)}(\lambda_k)\right| \leqslant \frac{l_{s+1}||f||_s}{2\pi\alpha_s} (m(s))^n \exp\left(r_k H(-\varphi_k, K_{s+1})\right), \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geq 1.$$

Так как $m(s) \geq s+1$, то в силу (2.1)

$$H(-\varphi_k, K_{s+1}) \leqslant H(-\varphi_k, K_{m(s)}), \quad k \geq 1.$$

Поэтому согласно предыдущему неравенству имеем:

$$||\Sigma(f)||^{m(s)} \leqslant \frac{l_{s+1}||f||_s}{2\pi\alpha_s}.$$

Оператор Σ непрерывен на индуктивном пределе P_D, если его сужение на любое P_s непрерывно ([9, гл. V, §2, предложение 5]). Так как Σ переводит пространство P_s в $\mathcal{R}_{m(s)}(\Lambda)$, то непрерывность $\Sigma : P_D \to \mathcal{R}(D,\Lambda)$ следует из непрерывности отображения $\Sigma : P_s \to \mathcal{R}_{m(s)}(\Lambda)$, которая имеет место в силу последнего неравенства. Лемма доказана. $\square$

Пусть D — выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$ и $I(\Lambda, D)$ — ядро оператора $\Sigma : P_D \to \mathcal{R}(D,\Lambda)$. Это замкнутое подпространство в P_D. Так как $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$, то оно нетривиально. Подпространство $I(\Lambda, D) \subset P_D$ состоит из тех и только тех функций, которые обращаются в нуль (по крайней мере) в точках λ_k с кратностью не меньшей чем n_k.

Фактор–пространство $P_D/I(\Lambda, D)$ как и P_D является LN^* пространством и представляет из себя объединение возрастающей последовательности банаховых пространств $P_{s,0}$. Элемент $[f] \in P_D/I(\Lambda, D)$ принадлежит $P_{s,0}$ тогда и только тогда, когда некоторый представитель $g \in P_D$ класса эквивалентности $[f]$ принадлежит P_s. При этом норма $||[f]||_s$ равна инфимуму норм $||g||_s$ по всем представителям $g \in P_s$ класса $[f]$. Оператор Σ обычным образом порождает оператор Σ_0, действующий из $P_D/I(\Lambda, D)$ в $\mathcal{R}(D,\Lambda)$. Отображение

$$\Sigma_0 : P_D/I(\Lambda, D) \to \mathcal{R}(D,\Lambda) \tag{3.5}$$

является уже инъективным, а также непрерывным в силу леммы 3.1 и определения фактор–топологии. Таким образом, верно следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Пусть D — выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Оператор (3.5) непрерывен и инъективен.*

Лемма 3.3. *Пусть D — выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Предположим, что оператор (3.5) сюръективен. Тогда Σ_0 осуществляет изоморфизм линейных топологических пространств $P_D/I(\Lambda, D)$ и $\mathcal{R}(D,\Lambda)$.*

Доказательство. По лемме 3.2 оператор (3.5) непрерывен и инъективен. Если он еще и сюръективен, то по теореме об открытом отображении ([9, приложение 1, теорема 2]) для отделимых пространств, покрываемых счетным семейством своих подпространств Фреше (каковыми, очевидно, являются LN^* пространства), оператор Σ_0 есть изоморфизм линейных топологических пространств. Лемма доказана. $\square$

Замечание 3.1. *Сюръективность оператора Σ_0 (или, что эквивалентно, оператора Σ) означает, что интерполяционная задача (3.2) разрешима в пространстве P_D для любой правой части $b = \{b_{k,n}\} \in \mathcal{R}(D,\Lambda)$.*

Замечание 3.2. *Пусть $ortW(\Lambda, D)$ — совокупность функционалов $\upsilon \in H^*(D)$, аннулирующих подпространство $W(\Lambda, D)$. Так как система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в $W(\Lambda, D)$, то $\upsilon \in ortW(\Lambda, D)$ тогда и только тогда, когда*

$$\upsilon(z^n e^{\lambda_k z}) = 0, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geq 1.$$

Таким образом, с учетом определения преобразования Лапласа находим, что подпространство $I(\Lambda, D)$ есть совокупность преобразований Лапласа функционалов $\upsilon \in \mathrm{ort}W(\Lambda, D)$.

4. Двойственность

Теорема 4.1. *Пусть D — выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) В подпространстве $W(\Lambda, D)$ имеет место фундаментальный принцип;

2) Интерполяционная задача (3.2) разрешима в пространстве P_D для любой правой части $b = \{b_{k,n}\} \in \mathcal{R}(D, \Lambda)$.

Доказательство. Пусть верно утверждение 1) и $b = \{b_{k,n}\} \in \mathcal{R}(D, \Lambda)$. Выберем номер $s \geq 1$ такой, что $b \in \mathcal{R}_s(\Lambda)$. Тогда

$$|b_{k,n}| \leqslant ||b||^s s^n \exp(r_k H(-\varphi_k, K_s)), \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geq 1. \tag{4.1}$$

По теореме 2.6 и лемме 2.1 каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1.1), где $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda)$. В частности, $d \in Q_{s+1}(\Lambda)$, т.е.

$$|d_{k,n}| \leqslant ||d||_{s+1}(s+1)^{-n} \exp\left(-r_k H(-\varphi_k, K_{s+1})\right), \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geq 1.$$

Отсюда с учетом (4.1) и (2.1) получаем:

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty, n_k-1} |d_{k,n}||b_{k,n}| \leqslant ||d||_{s+1}||b||^s \sum_{k=1}^{\infty} n_k \exp\left(r_k(H(-\varphi_k, K_s) - H(-\varphi_k, K_{s+1}))\right)$$
$$\leqslant ||d||_{s+1}||b||^s \sum_{k=1,n=0}^{\infty, n_k-1} n_k e^{-r_k \alpha_s}.$$

Как и в лемме 2.3 верно равенство $\sigma(\Lambda) = 0$. Поэтому в силу леммы 2.1 в работе [10] последний ряд сходится. Следовательно,

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty, n_k-1} |d_{k,n}||b_{k,n}| \leqslant C_s ||d||_{s+1}||b||^s, \quad b \in \mathcal{R}_s(\Lambda), \quad d \in Q(D, \Lambda).$$

Таким образом, с учетом теоремы 2.6 на подпространстве $W(\Lambda, D)$ определен линейный непрерывный функционал

$$\upsilon(g) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty, n_k-1} d_{k,n} b_{k,n}.$$

По теореме Хана–Банаха его можно продолжить на все пространство $H(D)$ как линейный и непрерывный функционал. Пусть $f \in P_D$ — преобразование Лапласа функционала $\upsilon \in H^*(D)$. Из определения преобразования Лапласа и функционала υ следует, что

$$f^{(n)}(\lambda_k) = \upsilon(z^n e^{\lambda_k z}) = b_{k,n}, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geq 1.$$

Это означает, что утверждение 2) верно.

Пусть теперь верно 2). Так как $H(D)$ — пространство Фреше–Шварца, то с учетом замечания 3.2 к лемме 3.3 имеют место изоморфизмы [11]:

$$W(\Lambda, D) \cong (H^*(D)/\mathrm{ort}W(\Lambda, D))^* \cong (P_D/I(\Lambda, D))^*.$$

Пусть g — произвольная функция из подпространства $W(\Lambda, D)$ и функционалы $\theta \in (H^*(D)/\mathrm{ort}W(\Lambda, D))^*$ и $\omega \in (P_D/I(\Lambda, D))^*$ сопоставляются ей при указанных изоморфизмах. Фиксируем $z \in D$. Если δ_z — функционал Дирака, сосредоточенный в точке z, то

$$g(z) = \delta_z(g) = [\delta_z](g) = \theta([\delta_z]) = \omega([f_z]),$$

где f_z — преобразование Лапласа функционала δ_z и $[\delta_z]$, $[f_z]$ — классы эквивалентности соответственно из пространств $H^*(D)/\mathrm{ort}W(\Lambda, D)$, $P_D/I(\Lambda, D)$. Функция $f_z(\lambda)$, как легко видеть, совпадает с $e^{z\lambda}$. Таким образом, имеет место равенство

$$g(z) = \omega([e^{z\lambda}]).$$

Согласно утверждению 2), лемме 3.3 и замечанию 3.1, пространство $P_D/I(\Lambda, D)$ изоморфно $\mathcal{R}(D,\Lambda)$. Поэтому найдется функционал $h \in (\mathcal{R}(D,\Lambda))^*$ такой, что

$$g(z) = \omega([e^{z\lambda}]) = h(\Sigma(e^{z\lambda})) = h(\{z^n e^{\lambda_k z}\}). \tag{4.2}$$

Выберем номер s такой, что $b = \{b_{k,n}\} = \{z^n e^{\lambda_k z}\} \in \mathcal{R}_s(\Lambda)$. Функционал h непрерывен на $\mathcal{R}(D,\Lambda)$. Поэтому его сужение на банахово пространство $\mathcal{R}_{s+1}(\Lambda)$ (как и на любое другое $\mathcal{R}_m(\Lambda)$) будет непрерывным ([9, гл. V, §2, предложение 5]), т.е.

$$|h(\{a_{k,n}\})| \leqslant c_s||a||^{s+1}, \quad a = \{a_{k,n}\} \in \mathcal{R}_{s+1}(\Lambda). \tag{4.3}$$

Рассмотрим элементы $e^{k,n} = \{a^{k,n}_{l,j}\} \in \mathcal{R}_{s+1}(\Lambda)$, где $a^{k,n}_{l,j} = 1$, если $l = k$, $j = n$, и $a^{k,n}_{l,j} = 0$ в противном случае. Положим

$$d_{k,n} = h(e^{k,n}), \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geq 1, \tag{4.4}$$

$$b(m,p) = \sum_{k=1,n=0}^{m-1,n_k-1} b_{k,n}e^{k,n} + \sum_{n=1}^{p} b_{m,n}e^{m,n}, \quad p = \overline{0, n_m - 1}.$$

Тогда из (4.2) и (4.3) с учетом (2.1) получаем:

$$\begin{aligned}
&\left| g(z) - \sum_{k=1,n=0}^{m-1,n_k-1} d_{k,n}z^n e^{\lambda_k z} - \sum_{n=1}^{p} d_{m,n}z^n e^{\lambda_m z}\right| = |h(b - b(m,p))| \\
&\leqslant c \sup_{k\geq m, n=\overline{1,n_k}} |b_{k,n}|(s+1)^{-n} \exp\left(-r_k H(-\varphi_k, K_{s+1})\right) \\
&\leqslant c_s \sup_{k\geq m, n=\overline{1,n_k}} |b_{k,n}| s^{-n} \exp\left(-r_k H(-\varphi_k, K_s)\right) \exp\left(-r_k (H(-\varphi_k, K_{s+1}) - H(-\varphi_k, K_s))\right) \\
&\leqslant c_s ||b||^s \sup_{k\geq m, n=\overline{1,n_k}} e^{-r_k \alpha_s} \to 0, \quad m \to \infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, в любой точке $z \in D$ верно представление

$$g(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n}z^n e^{\lambda_k z}.$$

В силу (4.3) и (4.4) имеем:

$$|d_{k,n}| \leqslant c_s||e^{k,n}||^{s+1} = c_s(s+1)^{-n} \exp\left(-r_k H(-\varphi_k, K_{s+1})\right), \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geq 1.$$

Так как включение $e^{k,n} \in \mathcal{R}_{s+1}(\Lambda)$ и неравенство (4.3) верно для любых $s \geq 0$, то отсюда следует, что $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D,\Lambda)$. Тогда по лемме 2.2 последний ряд сходится равномерно на компактах из области D, т.е. верно утверждение 1). Теорема доказана. □

Из теорем 2.6, 4.1 и леммы 3.3 получаем следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть D — выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) В подпространстве $W(\Lambda, D)$ имеет место фундаментальный принцип;

2) Оператор $\mathbb{E} : Q(D,\Lambda) \to W(\Lambda, D)$ — изоморфизм;

3) Оператор $\Sigma_0 : P_D/I(\Lambda, D) \to \mathcal{R}(D,\Lambda)$ — изоморфизм;

4) Интерполяционная задача (3.2) разрешима в пространстве P_D для любой правой части $b = \{b_{k,n}\} \in \mathcal{R}(D,\Lambda)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.В. Напалков. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука (1982).
2. А.Ф. Леонтьев. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука (1983).
3. А.А. Гольдберг, Б.Я. Левин, И.В. Островский. *Целые и мероморфные функции* // Итоги науки техн., Сер. Соврем. пробл. мат., Фундам. направления **85**, 5–186 (1991).
4. А.С. Кривошеев. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Изв. Росс. акад. наук, сер. мат. **68**:2, 71–136 (2004).
5. А.Ф. Леонтьев. *Ряды экспонент.* М.: Наука (1976).
6. Б.Я. Левин. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат (1956).
7. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. *Сходимость рядов экспоненциальных мономов* // Уфим. мат. ж. **14**:4, 60–72 (2022).
8. О.А. Кривошеева, А.С. Кривошеев. *Представление функций из инвариантного подпространства с почти вещественным спектром* // Алгебра и анализ. **29**:4, 82–139 (2017).
9. А.П. Робертсон, В.Дж. Робертсон. *Топологические векторные пространства.* М.: Мир (1967).
10. О.А. Кривошеева. *Область сходимости рядов экспоненциальных мономов* // Уфим. мат. ж. **3**:2, 43–56 (2011).
11. А.О. Гротендик. *О пространствах (F) и (DF)* // Математика. **2**:3, 81–127 (1958).

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

Олеся Александровна Кривошеева,
ФГБОУ ВО "Уфимский университет науки и технологий",
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru