ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 2 (2014). С. 36-44.

УДК 517.574

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С ТОНКИМИ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ОЦЕНКАМИ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

К.П. ИСАЕВ, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ, А.А. ЮНУСОВ

Аннотация. В статье предлагается конструкция целой функции, логарифм модуля которой асимптотически аппроксимирует данную субгармоническую функцию вида $\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ z)$, где $\widetilde{h}$ — сопряженная по Юнгу к выпуклой функции $h(t)$ на интервале $(-1;1)$. Такие функции находят применение в вопросах представления рядами экспонент в интегрально-весовых пространствах функций на интервале $(1;1)$ с весом $\exp h(t)$. При этом чем больше точность аппроксимации, тем в более тонких топологиях можно рассматривать представление рядами экспонент. Для функций h, удовлетворяющих условию $(1-|t|)^n = O(\exp(h(t)))$, $n \in \mathbb{N}$, соответствующие целые функции были построены ранее. В данной статье рассматриваются функции, удовлетворяющие условию $\exp(h(t)) = o((1-|t|)^n)$, $n \in \mathbb{N}$. В предлагаемой конструкции учтены необходимые условия на распределение показателей безусловных базисов из экспонент, полученные в предыдущих работах. Поэтому основной результат статьи (теорема 1) следует рассматривать не как инструмент, пригодный для конструкции безусловных базисов из экспонент, а как аргумент в пользу гипотезы об отсутствии таковых.

Ключевые слова: целые функции, субгармонические функции, мера Рисса, гильбертовы пространства, базисы Рисса.

Mathematics Subject Classification: 30D20

1. Введение

Задача об аппроксимации субгармонических функций логарифмом модуля аналитической функции возникла в теории целых функций. Первый общий результат по этой задаче был доказан в работе [1]. В работе [2] доказано существенное уточнение теоремы В.С. Азарина.

Теорема А. *Для любой субгармонической на плоскости функции и конечного порядка существует целая функция f, удовлетворяющая условию*

$$|u(z) - \ln|f(z)|| = O(\ln|z|),\ z \notin E,\ |z| \longrightarrow \infty.$$

Исключительное множество мало, например, имеет конечную лебегову меру.

Эта теорема в общем случае неулучшаема и оптимальна в смысле оценки разности и размеров исключительного множества. Однако, в применениях подобных результатов в смежных вопросах комплексного анализа потребовались более тонкие оценки разности. За счет дополнительных условий на функцию u и за счет увеличения исключительного множества E более тонкие оценки разности удалось получить, например, в работах [3]–[5].

K.P. Isaev, R.S. Yulmukhametov, A.A. Yunusov, Entire functions with fine asymptotic estimates for convex functions.

Поступила 22 февраля 2014 г.

В последней работе рассматриваются функции вида $\widetilde{h}(z) = \widetilde{h}(\operatorname{Re} z)$, являющиеся преобразованием Юнга выпуклой функции $h(t)$ на интервале $(-1; 1)$ вещественной оси. Приближение таких функций имеет применения в вопросах представления рядами экспонент функций из интегрально - весовых гильбертовых пространств на интервалах. В работе [5] удалось построить целые функции достаточно хорошо аппроксимирующие выпуклые функции указанного вида, если $e^{h(t)}(1-|t|)^n \longrightarrow \infty$ для любого n при $|t| \longrightarrow 1$.

Данная статья посвящена построению целой функции, асимптотически аппроксимирующей функции вида $\widetilde{h}$, когда $e^{h(t)}(1-|t|)^n = o(1)$ для любого n при $|t| \longrightarrow 1$.

Конструкция целой функции. Пусть $u(x)$ — неотрицательная дважды дифференцируемая выпуклая функция на $\mathbb{R}$, $u(0) = 0$, $|x|u''(x)$ убывает при возрастании $|x|$ и

$$u''(x) = o(1/|x|^2),\ |x| \longrightarrow \infty. \tag{A}$$

Определим две возрастающие последовательности T_n и $x_n \in (T_n, T_{n+1}),\ n \in \mathbb{Z}$, по соотношениям

$$T_0 = 0,\ (T_{n+1} - T_n) \int_{T_n}^{T_{n+1}} du'(x) = 1,\ n \in \mathbb{Z}, n \neq 0,$$

$$\int_{T_n}^{T_{n+1}} (x - x_n) du'(x) = 0.$$

Положим $p_n = T_{n+1} - T_n$. Квадраты

$$P_{k,m} = \{z = x + iy:\ T_k < x < T_{k+1},\ |y - p_k(m + \frac{1}{2})| < \frac{p_k}{2}\}$$

попарно не пересекаются и точки $w_{k,m} = x_k + i(m + \frac{1}{2})$, $k, m \in \mathbb{Z}$, являются центрами масс этих квадратов по мере $du'(x)dy$. Для $q \in (0; 1)$ положим

$$P^q_{k,n} = w_{k,n} + q(P_{k,n} - w_{k,n}).$$

Теорема 1. *Существует целая функция $f(z)$ с простыми нулями $w_{k,m} = x_k + ip_k(m + \frac{1}{2})$, $k, m \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющая следующим условиям*

1. Для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется оценка

$$\ln|f(z)| \leq u(\operatorname{Re} z) + O(N(2|z|)),\ |z| \longrightarrow \infty,$$

где $N(r)$ — считающая функция последовательности $|x_k|$:

$$N(r) = \sum_{|x_k| \leq r} 1.$$

2. Для $z \notin \bigcup_{k,n} P^q_{k,n}$ выполняется оценка

$$\ln|f(z)| \geq u(\operatorname{Re} z) - 2\ln|z| + O(N(2|z|)),\ |z| > 1,\ |z| \longrightarrow \infty,$$

1. Доказательство теоремы 1.

Можно считать, что $u(0) = u'(0) = 0$. Докажем одну предварительную лемму.

Лемма 1. *Кусочно-линейная выпуклая функция $v(x)$ на $\mathbb{R}$, определенная из условия: ее производная — кусочно постоянная функция с точками разрыва $\{x_n\}$ и с величиной скачка в точке x_n, равной p_n, и $v(0) = v'(0) = 0$, удовлетворяет условию*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |v(x) - u(x)| < 1.$$

Кроме того, из условий на функцию u следует, что последовательность p_n возрастает при $|n| \longrightarrow \infty$ и

$$\underline{\lim}_{n \longrightarrow \infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \infty,\ \underline{\lim}_{n \longrightarrow -\infty} \frac{T_n}{T_{n+1}} = \infty, \tag{1}$$

$$0 \le T_n < x_n \le \frac{T_{n+1}+T_n}{2},\ n \ge 0, \quad 0 > T_{n+1} > x_n > \frac{T_{n+1}+T_n}{2},\ n < 0.$$

Доказательство. Методом математической индукции по n доказывается, что для всех n верно $u(T_n) = v(T_n)$, $u'(T_n) = v'(T_n)$. Следовательно, функция $v(x)$ есть верхняя огибающая касательных функций к $u(x)$ в точках T_n и

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x) - v(x)| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} (u(x_n) - v(x_n)).$$

Оценка последнего супремума проводится элементарными методами.

□

По этой лемме мы можем доказывать теорему, считая, что u — кусочно-линейная функция. Через μ обозначим меру, ассоциированную с субгармонической функцией $u(z) = u(\operatorname{Re} z)$. Отметим сразу, что мера μ сосредоточена на вертикалях $\operatorname{Re} z = x_k$ и на каждой из вертикалей распределена линейно с плотностью $\frac{1}{p_k}$. При этом μ – мера каждого квадрата $P_{k,n}$ равна 1, и точки $w_{k,n}$ являются центрами масс по мере μ квадрата $P_{k,n}$. Через ν обозначим дискретную меру с единичными массами в точках $w_{k,n}$. В работе [2] доказано, что при этих условиях вне достаточно малого исключительного множества E выполняется соотношение

$$\int \ln \left|1 - \frac{z}{w}\right| d(\nu(w) - \mu(w)) = O(\ln(|z|)),\ |z| \longrightarrow \infty.$$

Тем самым, нам достаточно доказать соотношения

$$\int \ln \left|1 - \frac{z}{w}\right| d(\nu(w) - \mu(w)) \le O(N(|z|)),\ |z| \longrightarrow \infty,$$

и вне множества $\bigcup_{k,n} P^q_{k,n}$

$$\int \ln \left|1 - \frac{z}{w}\right| (d\nu(w) - \mu(w)) \ge -2\ln|z| + O(N(|z|)),\ |z| \longrightarrow \infty.$$

Если $[x]$ — целая часть x, то для любого $p > 0$

$$\left|\frac{x}{p} - \left[\frac{x}{p} + \frac{1}{2}\right]\right| \le \frac{1}{2},\ x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\left|\int_0^x \left(\frac{t}{p} - \left[\frac{t}{p} + \frac{1}{2}\right]\right) dt\right| \le \frac{p}{8},\ x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Сужение μ_k меры μ на критическую прямую $\operatorname{Re} w = x_k + it$ порождается функцией $\frac{t}{p_k} + C$, сужение точечной меры ν порождается функцией $[\frac{t}{p_k} + \frac{1}{2}] + C$. Положим

$$\eta_k(t) = \left[\frac{t}{p_k} + \frac{1}{2}\right] - \frac{t}{p_k},$$

$$L(z,w) = \ln\left|1 - \frac{z}{w}\right| = \operatorname{Re}\ln\left(1 - \frac{z}{w}\right).$$

Через η обозначим заряд, сужение которого на вертикаль $\operatorname{Re} w = x_k$ равно $\eta_k(t)dt$. При этих обозначениях нам нужно оценить интеграл

$$\int \ln\left|1 - \frac{z}{w}\right| d(\nu(w) - \mu(w)) = \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} L(z, x_k + it)\, d\eta_k(t) =$$

$$= -\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} L'(z, x_k + it)\eta_k(t)dt = -\int L'(z,w)d\eta(w).$$

Будем пользоваться следующим представлением ($w = s + it$)

$$L'_t(z,w) = \operatorname{Re}\left(\frac{i}{w-z} - \frac{i}{w}\right) = -\operatorname{Im}\frac{z}{(w-z)w} = \operatorname{Im}\frac{1}{w} - \operatorname{Im}\frac{1}{w-z}. \tag{4}$$

Зафиксируем точку $z = (x + iy) \in P_{n,j}$, будем считать, что $x, y \geq 0$, это значит, что $P_{n,j}$ лежит в первом квадранте. Возьмем достаточное малое $\delta > 0$ и введем в рассмотрение квадраты: $Q(0)$ — квадрат с центром в точке 0, со стороной δr, $r = |z|$, и со сторонами, параллельными осям координат, $Q(z) = Q(0) + z$. Квадраты $Q(0)$ и $Q(z)$ при достаточно малых δ не пересекаются. В самом деле, эти квадраты лежат в кругах с теми же центрами и радиуса $\sqrt{2}\delta r$. Следовательно, если $\delta < 1/\sqrt{8}$, то не пересекаются указанные круги. Будем считать, что $2\delta < 1/\sqrt{8}$. В этом случае расстояние между квадратами

$$\text{dist } (Q(0), Q(z)) > \delta |z|. \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть E — внешность двух вертикальных полос с основаниями $[-\delta r; \delta r]$ (содержит квадрат $Q(0)$) и $[x - \delta r; x + \delta r]$ (содержит квадрат $Q(z)$). Тогда ($w = s + it$)*

$$\left| \int_E L_t'(z, w) d\eta(w) \right| = O(1), |z| \longrightarrow \infty.$$

Доказательство. Пусть $x_k \notin [-\delta r; \delta r] \bigcup [x - \delta r; x + \delta r]$. Воспользуемся (2), (4) и неравенством Коши-Буняковского:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \eta_k(t) L'(z, x_k + it) dt \right| \leq \frac{|z|}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x_k + it||x_k + it - z|} dt \leq$$

$$\leq \frac{|z|}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|x_k + it|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|x_k + it - z|^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi |z|}{2\sqrt{|x_k(x - x_k)|}}.$$

Из леммы 1 (соотношение (1)) следует, что при некоторых постоянных $q < 1,\ C > 0$ для всех $n, m \in \mathbb{Z}$, $nm > 0$, $|m| \leq |n|$ выполняется оценка

$$\frac{T_m}{T_n} \leq C q^{|n| - |m|},$$

значит,

$$\left| \frac{x_m}{x_k} \right| \leq C q^{|k| - |m| - 2}.$$

Рассмотрим индексы k, для которых $x_k \geq x + \delta r$, пусть $m > 0$ наименьший из них. Тогда

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_k(t) L'(z, x_k + it) dt \right| \leq \frac{\pi |z|}{2\sqrt{|x_m(x - x_m)|}} \sum_{m}^{\infty} \sqrt{\left| \frac{x_m(x - x_m)}{x_k(x - x_k)} \right|} \leq \frac{\pi \sqrt{C}(3 - \sqrt{q})}{4(1 - \sqrt{q})\delta} \prec 1.$$

Аналогичным образом оценивается сумма интегралов по тем индексам k, для которых $x_k \leq -\delta r$. А также сумма интегралов по тем индексам k, для которых $\delta r < x_k \leq x - \delta r$, если такие индексы есть.

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть $F = \mathbb{C} \setminus (E \bigcup Q(0) \bigcup Q(z))$. Тогда ($w = s + it$)*

$$\left| \int_F L_t'(z, w) d\eta(w) \right| = O(N(2|z|)), |z| \longrightarrow \infty.$$

Доказательство. Носитель заряда $\eta = \nu - \mu$ на множестве F представляет собой объединение интервалов вида $x_k + i(\delta r; +\infty),\ x_k + i(-\infty; -\delta r;),\ x_k \in (-\delta r; \delta r)$, $x_k + i(y + \delta r; +\infty),\ x_k + (-\infty; y - \delta r),\ |x - x_k| \leq \delta r$, и, возможно, ограниченных интервалов вида $x_k + i(\delta r; y - \delta r),\ x_k \in (x - \delta r; \delta r)$.

Рассмотрим ограниченный интервал вида $(\delta r; y - \delta r)$. По представлению (4) и оценке (2) имеем ($w = x_k + it$)

$$\left| \int_{\delta r}^{y - \delta r} \eta_k(t) L'(z, x_k + it) dt \right| \leq \frac{|z|}{2} \left| \int_{\delta r}^{y - \delta r} \frac{dt}{|w - z||w|} \right| \leq \frac{1}{2\delta^2}.$$

Рассмотрим интервал вида $x_k + i(\delta r; +\infty)$. Если $w = x_k + it$ и $x_k \le x - \delta|z|$, то $|w - z| \ge x - x_k \ge \delta|z|$, поэтому $|w| \le |w - z| + |z| \le \frac{1+\delta}{\delta}|w - z|$. Таким образом,

$$|w - z| \ge \frac{\delta}{1+\delta}|w|.$$

Отсюда получаем для $w = x_k + it,\ t \in (\delta r; +\infty)$, оценку

$$|L_t'(z, x_k + it)| \prec \frac{|z|}{|w|^2},$$

поэтому

$$\left|\int_{\delta r}^{+\infty} \eta_k(t) L'(z, x_k + it) dt\right| \prec \frac{|z|}{2}\int_{\delta r}^{+\infty} \frac{dt}{x_k^2 + t^2} \le \frac{1}{2\delta}.$$

Аналогично доказывается, что интегралы по неограниченным интервалам остальных видов тоже ограничены. Если вертикаль $\operatorname{Re} w = x_k$ пересекается с множеством $Q(0)\bigcup Q(z)$, то $x_k \in (-\delta r; (1+\delta)r)$, значит количество таких вертикалей не больше $N(2r)$. Таким образом, лемма 3 доказана. $\square$

Утверждение 1

Пусть $\zeta = a + ib \in \mathbb{C}$, $\sigma \in (0; 1)$. Тогда

1. Для любого числа d

$$\left|\operatorname{Im}\int_{b-\sigma p_k}^{b+\sigma p_k} \frac{\left(\frac{t}{p_k} - d\right)}{(x_k + it) - \zeta} dt\right| \le 2\sigma.$$

2. Если $\sigma p_k \le \delta r$, то

$$\left|\operatorname{Im}\int_{b\pm\sigma p_k}^{b\pm\delta r} \frac{\eta_k(t)dt}{(x_k + it) - \zeta}\right| \le \frac{1}{2\sigma}.$$

Доказательство. 1. Поскольку

$$\operatorname{Im}\int_{b-\sigma p_k}^{b+\sigma p_k} \frac{\left(\frac{t}{p_k} - d\right)}{(x_k - a) + i(t - b)} dt = \frac{1}{p_k}\operatorname{Im}\int_{-\sigma p_k}^{\sigma p_k} \frac{(\tau + b - dp_k)d\tau}{(x_k - a) + i\tau} =$$
$$= \frac{1}{p_k}\operatorname{Im}\int_{-\sigma p_k}^{\sigma p_k} \frac{\tau d\tau}{(x_k - a) + i\tau} + \frac{b - dp_k}{p_k}\operatorname{Im}\int_{-\sigma p_k}^{\sigma p_k} \frac{d\tau}{(x_k - a) + i\tau}$$

и

$$\operatorname{Im}\int_{-\sigma p_k}^{\sigma p_k} \frac{d\tau}{(x_k - a) + i\tau} = \int_{-\sigma p_k}^{\sigma p_k} \frac{-\tau d\tau}{(x_k - a)^2 + \tau^2} = 0,$$

то

$$\left|\operatorname{Im}\int_{b-\sigma p_k}^{b+\sigma p_k} \frac{\eta_k(t)dt}{(x_k - a) + i(t - b)}\right| = \frac{1}{p_k}\left|\operatorname{Im}\int_{-\sigma p_k}^{\sigma p_k} \frac{\tau d\tau}{(x_k - a) + i\tau}\right| = \frac{1}{p_k}\int_{-\sigma p_k}^{\sigma p_k} \frac{\tau^2 d\tau}{|x_k - a|^2 + \tau^2} \le 2\sigma.$$

2. Интегрируя по частям получим

$$\int_{b+\sigma p_k}^{b+\delta r} \frac{\eta_k(t)dt}{x_k + it - \zeta} = \left(\int_{b+\sigma p_k}^{b+\delta r} \eta_k(\tau)d\tau\right)\frac{1}{x_k + i\delta r - a} + \int_{b+\sigma p_k}^{b+\delta r}\left(\int_{b+\sigma p_k}^{t} \eta_k(\tau)d\tau\right)\frac{idt}{(x_k + it - \zeta)^2}.$$

Следовательно, в силу оценки (3)

$$\left|\operatorname{Im}\int_{b+\sigma p_k}^{b+\delta r} \frac{\eta_k(t)dt}{x_k + it - \zeta}\right| \le \frac{p_k}{4\delta r} + \frac{p_k}{4}\int_{b+\sigma p_k}^{\infty} \frac{dt}{(x_k - a)^2 + (t - b)^2} \le$$
$$\le \frac{1}{4\sigma} + \frac{p_k}{4\sigma p_k} \le \frac{1}{2\sigma}.$$

Утверждение 1 доказано. $\square$

Лемма 4. *Выполняется соотношение* ($w = s + it$)

$$\left|\int_{Q(0)} L_t'(z,w)d\eta(w)\right| = O(N(|z|)), |z| \longrightarrow \infty.$$

Доказательство. Из представления (4) и из оценки (5) видим, что для $w \in Q(0)$ $|w-z| \geq \delta|z|$, поэтому

$$\left|\int_{-\delta r}^{\delta r} \frac{\eta_k(t)dt}{(x_k+it)-z}\right| \leq \frac{1}{\delta r}\cdot(2\delta r) = 2.$$

Количество $x_k \in (-\delta r; \delta r)$ равно $N(\delta r)$, значит

$$\left|\int_{Q(0)} \frac{1}{w-z} d\eta(w)\right| = O(N(\delta|z|)), |z| \longrightarrow \infty. \tag{6}$$

Положим $\sigma = \frac{1}{2}$, если $\frac{p_k}{2} < \delta r$ и $\sigma = \frac{\delta r}{p_k}$, если $\frac{p_k}{2} \geq \delta r$. Применим утверждение 1 при $\zeta = 0$, $d = 0$. В первом случае получим

$$\left|\operatorname{Im}\int_{-\delta r}^{\delta r}\frac{\eta_k(t)dt}{x_k+it}\right| \leq \left|\operatorname{Im}\int_{-\frac{p_k}{2}}^{\frac{p_k}{2}}\frac{\frac{t}{p_k}dt}{x_k+it}\right| + \left|\int_{\frac{p_k}{2}\leq|t|<\delta r}\operatorname{Im}\frac{\eta_k(t)dt}{x_k+it}\right| \leq 3,$$

а во втором случае

$$\left|\operatorname{Im}\int_{-\delta r}^{\delta r}\frac{\eta_k(t)dt}{x_k+it}\right| \leq 1.$$

Таким образом, во всех случаях имеем ($w = x_k + it$)

$$\left|\operatorname{Im}\int_{-\delta r}^{\delta r}\frac{\eta_k(t)dt}{w}\right| \leq 3.$$

Отсюда с учетом соотношения (6) получаем утверждение леммы.

Лемма 4 доказана.

□

Лемма 5. *Выполняется оценка сверху* ($w = s + it$)

$$-\operatorname{Im}\int_{Q(z)} L_t'(z,w)d\eta(w) = O(N(|z|)), |z| \longrightarrow \infty.$$

Доказательство. Снова воспользуемся представлением (4). Поскольку для $w \in Q(z)$ $|w| \geq |z| - |w-z| \geq (1-\delta)|z|$, то

$$\left|\operatorname{Im}\int_{y-\delta r}^{y+\delta r}\frac{\eta_k(t)dt}{x_k+it}\right| \leq \frac{1}{(1-\delta)r}\cdot(2\delta r) = \frac{2\delta}{1-\delta}.$$

Количество $x_k \in (x-\delta r; x+\delta r)$ не превосходит $N((1+\delta)r)$, значит

$$\left|\operatorname{Im}\int_{Q(z)}\frac{1}{w}d\eta(w)\right| = O(N(2|z|)), |z| \longrightarrow \infty. \tag{7}$$

Зафиксируем некоторое число $\sigma_0 \in (0; \frac{1}{4})$ и множество индексов k, таких, что $x_k \in (x-\delta r; x+\delta r)$ разобъем на две части:

J — это те индексы, для которых в отрезке $[(y-\sigma_0 p_k); (y+\sigma_0 p_k)]$ найдется точка вида $p_k(m+\frac{1}{2})$, где m — некоторое целое число;

J_1 — все остальные индексы.

1. Для $k \in J_1$ применим утверждение 1, взяв в качестве $\sigma = \sigma_0$, если $\sigma_0 p_k < \delta r$ и $\sigma = \frac{\delta r}{p_k}$, если $\sigma_0 p_k \geq \delta r$. Во втором случае получим

$$\left|\operatorname{Im}\int_{y-\delta r}^{y+\delta r}\frac{\eta_k(t)dt}{x_k+it-z}\right| \leq 2\sigma_0,$$

а в первом случае

$$\left|\mathrm{Im}\int_{y-\delta r}^{y+\delta r}\frac{\eta_k(t)dt}{x_k+it-z}\right| \le \left|\mathrm{Im}\int_{y-\sigma_0 p_k}^{y+\sigma_0 p_k}\frac{\left(m-\frac{t}{p_k}\right)dt}{x_k+it-z}\right| + \left|\int_{\sigma_0 p_k\le|y-t|<\delta r}\mathrm{Im}\,\frac{\eta_k(t)dt}{x_k+it-z}\right| \le 2\sigma_0+\frac{1}{\sigma_0}.$$

Имея в виду оценку (7), получим

$$\left|\sum_{k\in J_1}\int_{y-\delta r}^{y+\delta r}L'_t(x_k+it,z)\eta_k(t)dt\right| = O(N(2|z|)),\ \ |z|\longrightarrow\infty.$$

Таким образом,

$$\int \ln\left|1-\frac{z}{w}\right| d(\nu(w)-\mu(w)) = \sum_{k\in J}\mathrm{Im}\int_{y-\delta r}^{y+\delta r}\frac{\eta_k(t)dt}{x_k+it-z}+O(N(2|z|)),\ \ |z|\longrightarrow\infty. \tag{8}$$

2. Для каждого индекса $k \in J$ найдется целое число $m = m(k)$, такое, что $|y-p_k(m+\frac{1}{2})|\le\sigma_0 p_k$. Введем обозначение $y_k^* := p_k(m(k)+\frac{1}{2})$. По второму пункту утверждения 1 при $|z|\longrightarrow\infty$

$$\sum_{k\in J}\mathrm{Im}\int_{y-\delta r}^{y+\delta r}\frac{\eta_k(t)dt}{x_k+it-z} = \sum_{k\in J}\mathrm{Im}\int_{y-\sigma_0 p_k}^{y+\sigma_0 p_k}\frac{\eta_k(t)dt}{x_k+it-z}+O(N(2|z|)).$$

Заметим, что если $k_1=\min\{k\in J\},\ k_2=\max\{k\in J\}$, то

$$\sum_{k=k_1}^{k_2-1}p_k = \sum_{k=k_1}^{k_2-1}(T_{k+1}-T_k) = T_{k_2}-T_{k_1} \le (x+\delta r)-(x-\delta r) = 2\delta r,$$

поэтому

$$p_k\le 2\delta r,\ \ k\in J.$$

Положим $I_k := (y-\frac{p_k}{2}; y+\frac{p_k}{2})$, если $p_k\le 2\delta r$ и $I_k := (y-\delta r; y+\delta r)$ в противном случае. В силу оценки на p_k последний вариант может случиться только для $k=k_1,k_2$, если эти индексы входят в J. Таким образом, при $|z|\longrightarrow\infty$

$$\int \ln\left|1-\frac{z}{w}\right| d(\nu(w)-\mu(w)) = \sum_{k\in J}\mathrm{Im}\int_{I_k}\frac{\eta_k(t)dt}{x_k+it-z}+O(N(2|z|)). \tag{9}$$

Нам остается оценить интегралы по отрезкам $I_k,\ k\in J$.

3. Пусть $k\in J$, $I_k=(a_k;b_k)$ и для некоторого целого m

$$\eta_k(t) = \begin{cases} m-\frac{t}{p_k}, & a_k<t\le y_k^*,\\ m+1-\frac{t}{p_k}, & y_k^*<t\le b_k.\end{cases}$$

Тогда

$$\mathrm{Im}\int_{I_k}\frac{\eta_k(t)dt}{x_k+it-z} = \mathrm{Im}\int_{a_k}^{y_k^*}\frac{\left(m-\frac{t}{p_k}\right)dt}{x_k+it-z}+\mathrm{Im}\int_{y_k^*}^{b_k}\frac{\left(m+1-\frac{t}{p_k}\right)dt}{x_k+it-z} =$$

$$= \mathrm{Im}\int_{a_k}^{b_k}\frac{\left(m-\frac{t}{p_k}\right)dt}{x_k+it-z}+\int_{y_k^*}^{b_k}\frac{(y-t)dt}{(x_k-x)^2+(y-t)^2}dt.$$

Первый интеграл оценивается по утверждению 1

$$\left|\mathrm{Im}\int_{a_k}^{b_k}\frac{\left(m-\frac{t}{p_k}\right)dt}{x_k+it-z}\le 4\right|. \tag{10}$$

Второй интеграл вычисляется

$$\int_{y_k^*}^{b_k} \frac{(y-t)dt}{(x_k-x)^2+(y-t)^2}dt = -\ln\sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}}.$$

По условию для $k \in J$, $k \neq k_1, k_2$, имеем $|y_k^* - y| < \sigma_0 p_k < \frac{p_k}{4}$, поэтому $|b_k - y| \geq |b_k - y_k^*| - |y_k^* - y| \geq \frac{p_k}{2} - \frac{p_k}{4} = \frac{p_k}{4} > |y_k^* - y|$, тем самым

$$\ln\sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}} \geq 0.$$

Отсюда и из (9), (10) получим

$$\int \ln\left|1-\frac{z}{w}\right| d(\nu(w)-\mu(w)) \leq O(N(2|z|)),\ |z| \longrightarrow \infty.$$

Лемма 5 доказана. □

Для того чтобы закончить доказательство теоремы 1, нам остается получить нижнюю оценку вне множества $\bigcup_{k,m} P_{k,m}^q$ в предположении, что $z \in P_{n,j}$. В силу оценок (9), (10) нам достаточно доказать нижнюю оценку для суммы интегралов

$$\sum_{k\in J}\int_{y_k^*}^{b_k} \frac{(y-t)dt}{(x_k-x)^2+(y-t)^2}dt = -\sum_{k\in J}\ln\sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}}.$$

Разобъем множество индексов J на три части: $J_0 = \{k \in J,\ 0 \leq x_k < x\}$, $J_- = \{k \in J,\ x_k < 0\}$, $J_+ = \{k \in J,\ x < x_k\}$. Очевидно,

$$\ln\sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}} \leq \ln\sqrt{1+\frac{p_k^2}{4(x-x_k)^2}}.$$

Пусть $z \in P_{n,j}$, но $z \notin P_{n,j}^q$. Если $k \in J_0$ $k \neq n$, то $x - x_k \geq \frac{p_k}{2}$, поэтому

$$\ln\sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}} \leq \ln\sqrt{2}.$$

Если $n \in J_0$ и $k = n$, то в силу условия $z \notin P_{n,j}^q$ имеем $x - x_n \leq \frac{qp_k}{2}$, поэтому

$$\ln\sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}} \leq \ln\sqrt{1+\frac{1}{q^2}}.$$

Из последних двух оценок получаем

$$\sum_{k\in J_0}\operatorname{Im}\int_{I_k}\frac{\eta_k(t)dt}{x_k+it-z} = O(N(2|z|)),\ |z| \longrightarrow \infty. \tag{11}$$

Если $k \in J_+$, $k \neq n$, то $x - x_{k+1} \geq \frac{p_k}{2}$, поэтому, считая $|x - x_n| \geq 1$, имеем

$$\sum_{k\in J_+}\ln\sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}} \leq N(2r) + \ln\prod_{k\in J_+}\frac{p_k}{2(x_k-x)} = N(2r) + \ln\delta r.$$

Аналогичным образом получим

$$\sum_{k\in J_-}\ln\sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}} \leq N(2r) + \ln\prod_{k\in J_-}\frac{p_k}{2(x_k-x)} = 1 + \ln\delta r.$$

Из последних двух неравенств вместе с (11) имеем

$$\sum_{k\in J}\ln\sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}}\le 2\ln r+2N(2r).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азарин В.С. *О лучах вполне регулярного роста целой функции* // Матем. сб., 1969, Т.79(121), №4(8). С. 463–476 (Mi msb3599
2. Юлмухаметов Р.С. *Аппроксимация субгармонических функций* // Analysis Mathematica. 1985. 11:3. С. 257–282.
3. Любарский Ю.И., Содин М.Л. *Аналоги функций типа синуса для выпуклых областей.* Препринт №17 ФТИНТ, Украинская АН. Харьков. 1986.
4. Yu. Lyubarskii, E. Malinnikova *On approximation of subharmonic functions* // Journal D'Analyse MathematiQue. 2001. V. 83. P. 121–149.
5. Башмаков Р.А., Путинцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Целые функции типа синуса и их применение* // Алгебра и анализ. 2010. 22:5. С. 49–68.

Константин Петрович Исаев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `orbit81@list.ru`

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `Yulmukhametov@mail.ru`

Артур Айратович Юнусов,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: `mc.yunusov@gmail.com`