

## ФИКТИВНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Л.А. КАЛЯКИН

**Аннотация.** Приведены примеры задач с малым параметром, которые имеют асимптотические решения, не соответствующие никакому точному решению.

**Ключевые слова:** Малый параметр, асимптотика.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной заметке приводятся примеры задач с малым параметром, в которых приближенное (асимптотическое) решение не приближает никакого точного решения. Под асимптотическим решением понимается функция, которая удовлетворяет всем уравнениям задачи с высокой степенью точности. В асимптотических конструкциях в качестве таких функций обычно берутся частичные суммы ряда, который является формальным решением по степеням малого параметра. Иногда весь ряд именуют асимптотическим решением. Коэффициенты ряда извлекаются из серии более простых (приближенных) уравнений, которые оказываются более доступными для анализа, чем исходные задачи. Такое упрощение, реализация которого зачастую выглядит как искусство [1], представляет основное достоинство асимптотического подхода. Однако, оно может обернуться конфузом, если не контролировать остаток асимптотики. Пример такой ситуации для конкретной задачи был детально проанализирован в работе [2]. В более широком плане этот вопрос обсуждался в докладе Д.В. Аносова на конференции в мае 2013, [3] и в его работе [4].

Между тем, многие специалисты, имеющие дело с асимптотиками, скептически относятся к необходимости контроля за величиной остатка. Широко распространено убеждение, что, если построено приближенное решение, дающее малую невязку в уравнениях, то существует точное решение, для которого приближенное решение близко к точному. Такая вера основана на опыте исследования задач, для которых удается получить оценку отклонения приближенного решения от точного. Для людей, воспитанных на традициях строгой математики, получение таких оценок, т.е. обоснование асимптотики, представляется необходимым этапом исследования. Однако, во многих ситуациях, особенно в тех, что связаны с приложениями, исходные математические модели выглядят настолько сложными, что проблематично не только получение оценок, но даже доказательство существования точного решения. Поэтому зачастую об оценках остатков не вспоминают и используют термин “асимптотическое решение”. Последователи строгой математики, естественно, рассматривают такой ход, как попытку “спрятать голову в песок”, завуалировав терминологией проблему обоснования. Впрочем, обоснованием асимптотики пренебрегают даже в более простых, точно поставленных математических задачах, считая это занятие мало привлекательным, часто тяжелым и не заслуживающим признания среди коллег. В оправдание такой позиции иногда приводятся соображения о физической осмысленности упрощенной модели, из которой извлекаются главные члены асимптотики. Понятно, что

---

L.A. KALYAKIN, PHANTOM ASYMPTOTIC SOLUTIONS.

© Калякин Л.А. 2014.

Работа поддержана РФФИ (проект 13-01-00199).

Поступила 24 сентября 2013 г.

это выводит обсуждение вопроса за рамки математики. Отметим в этом направлении занятую книгу [5], в которой на популярном уровне с разных сторон обсуждаются вопросы “асимптотологии”, однако проблема обоснования там почти не затрагивается.

Для разных задач, которые ставятся для дифференциальных уравнений, известны как частные, так и общие результаты по обоснованию асимптотик. Некоторые из них, особенно для нелинейных уравнений, выглядят весьма изоциренно [6]–[24]. Такие результаты внушают надежду на возможность обоснования и в других похожих задачах.

С другой стороны, известны примеры асимптотических решений, которые не соответствуют никакому точному решению. В справочной литературе подобные конструкции приводятся для обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости, например, [25], стр.68. При этом может создаться впечатление, что такие примеры лежат в стороне от тех задач, с которыми имеет дело теория возмущений. Однако пример, приведенный в [2] для модели игольчатого кристалла, показывает, что вопрос обоснования асимптотики может оказаться актуальным в самых неожиданных ситуациях, и его решение оказывается делом весьма нетривиальным.

Подобные проблемы были недавно обнаружены в спектральной теории. Как известно, асимптотики по малому параметру широко используются при исследовании спектра линейных операторов. Так, в квантовой механике популярен метод квазиклассического приближения [12]. Этот подход дает эффективное средство для приближенного решения задачи с самосопряженным оператором. Однако, в случае несамосопряженного оператора квазиклассика иногда оказывается несостоятельной. Для анализа таких задач с 90-х годов прошлого века активно разрабатывается теория псевдоспектра. Это направление исследований было инициировано примерами операторов с малым параметром, для которых асимптотическое (приближенное) решение спектральной задачи не приближает точное решение [27, 26, 28, 29]. В частности, вычисляемые в асимптотике числа, претендующие на аппроксимацию спектра, оказываются далеко от истинного спектра [30, 31]; в связи с этим появился термин “псевдоспектр”. Отметим, что эти исследования были инициированы более ранней работой о возмущении несамосопряженных операторов [32]. Затруднения с интерпретацией асимптотического решения при наличии спектрального параметра обнаруживались и раньше [33, 34].

Еще одной интересной задачей, относящейся к обсуждаемой тематике, является обоснование асимптотических переходов к интегрируемым уравнениям. В математической физике последних десятилетий активно развивается направление по отысканию уравнений, которые выделяются наличием тех или иных атрибутов интегрируемости. Впечатляющие успехи здесь достигнуты с использованием алгебраических методов. Симметричный подход позволил составить исчерпывающие списки интегрируемых уравнений разного типа [35, 36]. Однако, многие результаты в этом направлении выглядят хотя и общими, но оторванными от приложений, в противоположность более ранним подходам, когда упор делался на отыскание способов интегрирования уравнений, возникающих в приложениях. Поэтому не удивительно, что вопрос связи выделенных уравнений с задачами из смежных областей физики и механики привлекает постоянное внимание. Такая связь, как правило, устанавливается посредством асимптотик и требует обоснования. В этом направлении известны строгие результаты, см. обзор [37]. Классическим примером является обоснование перехода от системы уравнений поверхностных волн к уравнению Кортевега–де Фриза. Вместе с тем, среди огромного числа работ, в которых выполняются асимптотические переходы, встречаются и сомнительные утверждения. Некоторые из таких ситуаций анализировались в работах [38, 39, 40, 41]. Эти вопросы затрагивают интересную обширную тему и требуют отдельного обсуждения; здесь мы их не касаемся.

В данной заметке предлагается несколько примеров для обыкновенных дифференциальных уравнений на действительной оси и для уравнений в частных производных. Большая часть примеров относится к классу хорошо известных задач о погранслое. Речь в них идет

о степенных асимптотиках, когда формальные решения строятся в виде рядов по степеням малого параметра. Обсуждаемые задачи разбиваются на две серии:

- 1) Задачи, имеющие точное решение. Для них строятся асимптотические решения, не имеющие отношения к точному. Эти примеры, по-видимому, новые и для нелинейных уравнений не охватываются теорией псевдоспектра.
- 2) Задачи, по своей постановке не имеющие точного решения, для которых, тем не менее, удастся построить асимптотическое решение. В данном тексте воспроизведены известные примеры из [2, 3].

Рассматриваемые здесь проблемы, конечно, обсуждались, и специалисты о них знают. Однако, публикации на эту тему остаются немногочисленными и малоизвестными, по крайней мере, вне довольно узкого направления теории псевдоспектра. Цель данной работы – предостеречь исследователей, увлеченных формальными построениями, от слишком легкомысленного отношения к обоснованию асимптотик.

Анализируемые эффекты похожи на те, что случаются в некорректных или неустойчивых задачах, когда малые ошибки в исходных данных приводят к большим ошибкам в решении, либо к отсутствию решения. Эта схожесть наиболее отчетливо просматривается в теории псевдоспектра, в которой фактически рассматриваются спектрально неустойчивые задачи с экспоненциально растущей (по малому параметру) резольвентой [31]. Однако, постановки задач об асимптотике по малому параметру имеют мало общего с некорректными задачами. Предъявляемые асимптотические конструкции никак не связаны с приближенными методами решения неустойчивых задач [42, 43, 44]. Тем не менее, следует подчеркнуть, что именно наличие экспоненциальной неустойчивости влечет появление фиктивных асимптотик. Наиболее отчетливо это видно в первом, довольно банальном примере.

## 2. ПРИМЕР НЕФЕДОВА

Приводимый ниже пример в несколько иной форме был указан автору профессором Н.Н. Нефедовым. Фактически речь идет о поведении функции двух переменных  $\exp(x/\varepsilon)$  вблизи особой точки  $x = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ . Обсуждаемые эффекты связаны с различием асимптотики при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в разных областях по  $x$ . Этот пример был бы более уместен для иллюстрации неустойчивого равновесия. Здесь он приводится с тем, чтобы в простейшей ситуации показать, что появление фиктивных асимптотик обязано неустойчивости.

Рассматривается дифференциальное уравнение с малым параметром

$$\varepsilon \frac{du}{dt} = u, \quad t > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{2.1}$$

и с однородным начальным условием

$$u|_{t=0} = 0.$$

Тождественный нуль  $u(t; \varepsilon) \equiv 0$  является единственным точным решением задачи.

Между тем, отличная от нуля функция

$$U(t; \varepsilon) = \exp((t - 1)/\varepsilon)$$

точно удовлетворяет дифференциальному уравнению и асимптотически удовлетворяет (с любой степенью точности) начальному условию, поскольку

$$\exp(-1/\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^n), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \forall n.$$

Это асимптотическое решение задачи оказывается существенно отличным от нуля при  $t \geq 1$ :

$$U(t; \varepsilon) = \exp((t - 1)/\varepsilon) \geq 1, \quad \forall t \geq 1, \quad \varepsilon > 0.$$

Следовательно, на далеких временах  $t \geq 1$  асимптотическое решение не имеет отношения к точному решению. Конечно, вблизи начального момента (локально) асимптотическое

решение  $U(t; \varepsilon)$  соответствует точному  $u(t; \varepsilon)$ , и имеет место тривиальное асимптотическое равенство

$$\forall T < 1, n > 0 : u(t; \varepsilon) = U(t; \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^n), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \forall t \in [0, T].$$

Непригодность асимптотического решения на далеких временах – не новость в задачах с данными Коши. Например, в теории колебаний при использовании простейшего варианта асимптотической конструкции (в виде прямого ряда теории возмущений) ограничения по времени обнаруживаются из-за так называемых секулярных слагаемых [7]. Неравномерность по времени такой (простейшей) асимптотики служит основанием для введения более сложных многомасштабных разложений. Однако, приведенный пример – не тот случай. Здесь в асимптотическом решении нет никаких секулярностей. Ограничение по времени в виде:  $t < 1$  возникает при сравнении с точным решением и не обнаруживается в формальных конструкциях. Подобная ситуация имеет место в самых разных задачах. Теоремы об обосновании асимптотики по малому параметру, приведенные в [11], гарантируют подходящую оценку остатка на конечном, не слишком большом промежутке времени. В соответствующем медленном масштабе этот промежуток не зависит от малого параметра<sup>1</sup>. Для задачи Коши иногда удается построить асимптотику на следующих масштабах времени, подобрав подходящим образом дополнительную независимую переменную. Однако существенное расширение промежутка пригодности асимптотики возможно не всегда, [13, 24]. По-видимому, экспоненциальная неустойчивость является одной из причин нарушения связи между асимптотическим и точным решением и в общем случае.

Если иметь в виду теорему о непрерывной зависимости решения от параметра, то можно понять, что вблизи начального момента (локально, в подходящем масштабе времени) асимптотическое решение задачи Коши всегда соответствует точному решению. Далекие времена в такой задаче представляют собой дополнительное требование, из-за которого асимптотики могут оказаться фиктивными. Иная ситуация складывается для краевых задач. Здесь далекая от границы часть области входит в основную постановку задачи, а не в дополнительное условие. В таких задачах далекая область не может быть исключена при попытке локализации решения вблизи краев.

### 3. ЗАДАЧА О ПСЕВДОСПЕКТРЕ

В случае переменных коэффициентов неустойчивость может носить локальный характер. Например, функция  $U(t; \varepsilon) = \exp(-(t-1)^2/2\varepsilon)$  экспоненциально мала при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в начальный момент  $U(t; \varepsilon)|_{t=0} = \exp(-1/\varepsilon)$  и точно удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon \frac{du}{dt} + (t-1)u = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Поэтому для задачи Коши с начальным условием  $u|_{t=0} = 0$  эта функция представляет асимптотическое решение при всех  $t \geq 0$ . Однако вблизи  $t = 1$  она не дает асимптотику точного (нулевого) решения  $u(t; \varepsilon) \equiv 0$  задачи, поскольку  $U(t; \varepsilon)|_{t=1} = 1$ . Между тем, на далеких временах  $t \gg 1 + \varepsilon$  эта функция снова близка к нулевому решению. Это свойство используется в следующем, несколько необычном примере, который воспроизводится из работы [28].

Рассматривается дифференциальное уравнение первого порядка на отрезке

$$\varepsilon \frac{du}{dx} + xu = \lambda u, \quad -1 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (3.1)$$

с двумя краевыми условиями

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (3.2)$$

<sup>1</sup>Отметим, что форма уравнения (2.1) соответствует записи в медленном масштабе времени; быстрой переменной здесь является  $t/\varepsilon$ .

Очевидно при любом  $\lambda = \text{const}$  тождественный нуль  $u(x) \equiv 0$  является единственным решением. Между тем, функция  $U(x; \varepsilon, \lambda) = \exp(-(x - \lambda)^2/2\varepsilon)$  точно удовлетворяет уравнению, а при  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq \pm 1$  асимптотически удовлетворяет краевым условиям

$$\exp(-(x - \lambda)^2/2\varepsilon)|_{x=\pm 1} = \exp(-(\lambda \mp 1)^2/2\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^n), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \forall n.$$

Если  $-1 < \lambda < 1$ , то рассматриваемая функция, являясь асимптотическим решением задачи (3.1),(3.2), будет не мала во внутренних точках промежутка, поскольку имеет всплеск порядка единицы

$$U(x; \varepsilon, \lambda)|_{x=\lambda} = 1.$$

Таким образом, асимптотическое решение  $U(x; \varepsilon, \lambda)$  похоже на асимптотику собственной функции. Но настоящей собственной функции не существует вовсе. Числа  $\lambda \in \mathbb{C}$ , при которых существует такого типа асимптотическое решение, называются псевдособственными и принадлежат множеству, называемому “псевдоспектр”. В рассматриваемой задаче псевдоспектр состоит из полосы  $-1 < \text{Re } \lambda < 1$ .

Приведенный пример выглядит искусственным и производит впечатление жульничества из-за постановки двух краевых условий для уравнения первого порядка. Однако, он хорошо иллюстрирует идею псевдоспектра.

Известен ряд других, более естественных постановок, в которых обнаруживается наличие псевдоспектра<sup>1</sup>. Например, для оператора адвекции-диффузии на оси

$$A_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \varepsilon \frac{du}{dx} + \left(\frac{1}{4} - x^2\right)u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

спектр состоит из собственных значений  $\lambda_n = -(2n + 1)\varepsilon$ . Псевдоспектр занимает гораздо более широкую область, ограниченную параболой:  $\text{Re } \lambda < 1/4 - (\text{Im } \lambda)^2$ , [28]. Появление столь широкой области псевдоспектра связывается с экспоненциальным ростом по малому параметру  $\varepsilon$  резольвентной нормы в точках, далеких от спектра. Последнее свойство обязано несамосопряженности оператора.

Этот и другие примеры [28] показывают, что фиктивные асимптотики – далеко не редкость в спектральных задачах.

#### 4. ЗАДАЧИ ИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассматриваемый ниже пример послужил толчком к написанию данной заметки.

На конечном промежутке рассматривается линейное однородное уравнение

$$\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} = 0, \quad -1 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{4.1}$$

с краевыми условиями

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{4.2}$$

Пара функций

$$u_1(x) \equiv 1, \quad u_2(x) = \int_{-1}^x \exp(\eta^2/2\varepsilon) d\eta$$

образует фундаментальную систему решений уравнения (4.1). Из вида общего решения

$$u(x) = c_1 + c_2 \int_{-1}^x \exp(\eta^2/2\varepsilon) d\eta, \quad \forall c_1, c_2 = \text{const}$$

легко усмотреть, что однородная краевая задача (4.1),(4.2) не имеет никаких решений кроме нулевого  $u(x) \equiv 0$ .

<sup>1</sup>Его точное определение дается в терминах резольвенты, см. [27, 28].

С другой стороны, методом погранслоя [6] строится асимптотическое решение, отличное от нуля:

$$U(x; \varepsilon) = 1 - [\exp(-\xi_-) + \exp(-\xi_+)] + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k [V_k^-(\xi_-) + V_k^+(\xi_+)], \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

Функции  $V_k^\pm(\xi_\pm)$  зависят от погранслоевых (быстрых) переменных  $\xi_\pm = (1 \mp x)/\varepsilon$ . Они однозначно определяются из рекуррентной системы уравнений

$$V_0'' + V_0' = 0, \quad \xi > 0; \quad V_0(0) = -1; \quad (4.4)$$

$$V_k'' + V_k' = \xi V_{k-1}', \quad \xi > 0; \quad V_k(0) = 0, \quad k \geq 1$$

с условиями  $V_k(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , ( $k \geq 0$ ). Каждая из этих функций представляет собой произведение полинома на убывающую экспоненту

$$V_k^\pm(\xi) = P_{2k}(\xi) \exp(-\xi), \quad \xi \geq 0.$$

Отрезок длины  $n$  представленного выше ряда удовлетворяет уравнению и краевым условиям (4.1) с точностью  $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$ , для  $\forall n$ . Во внутренних точках отрезка  $\forall x \in (-1, 1)$  этот ряд асимптотически совпадает с единицей  $U(x; \varepsilon) = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^N)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\forall N$  и поэтому не имеет отношения к единственному точному (нулевому) решению. Более того, ввиду однородности задачи (4.1) асимптотическое решение определяется неоднозначно, с точностью до постоянного множителя  $C$ . Его можно называть псевдособственной функцией, если следовать терминологии [26, 28].

Похожая задача с неоднородными краевыми условиями вида

$$u(-1) = \alpha, \quad u(1) = \beta$$

анализировалась в [45], стр. 349. Формальное асимптотическое решение имеет такую же структуру (4.3) с неопределенной константой  $C$  в качестве главного члена. Поэтому существует много фиктивных асимптотических решений, отличающихся этой константой. Между тем, точное решение существует одно. Для него асимптотика получается при подходящем выборе константы  $C$ , которую можно вычислить из формулы для точного решения:  $C = (\alpha + \beta)/2 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Надо отметить, что в [45] приведен другой способ вычисления этой константы из интегрального тождества, но в таком случае результат остается условным, поскольку формулируется так: *если асимптотика решения имеет вид (4.3), то  $C = (\alpha + \beta)/2 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ .*

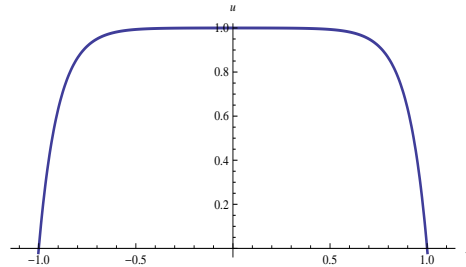


РИС. 1. Асимптотическое решение задачи (4.1),(4.2), которое не соответствует точному (нулевому) решению.

Аналогичное построение выполняется в чуть более сложной задаче

$$\varepsilon \left[ \frac{d^2 u}{dx^2} + b(x) \frac{du}{dx} \right] + a(x) \frac{du}{dx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (4.5)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

При условиях гладкости коэффициентов  $a(x), b(x) \in C^\infty[0, 1]$  и знакоопределенности на краях:  $a(0) > 0$ ,  $a(1) < 0$  строится ненулевое асимптотическое решение

$$U(x; \varepsilon) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [V_k^-(\xi_-) + V_k^+(\xi_+)], \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

Здесь  $\xi_- = x/\varepsilon$ ,  $\xi_+ = (1-x)/\varepsilon$ . При этом нулевое точное решение  $u(x) \equiv 0$  будет единственным, как это следует из явной формулы для общего решения

$$u(x) = c_1 + c_2 \int_0^x \exp\left(-\varepsilon^{-1} \int_0^\eta [a(\zeta) + \varepsilon b(\zeta)] d\zeta\right) d\eta, \quad \forall c_1, c_2 = \text{const.}$$

Похожая асимптотическая конструкция возможна в многомерной задаче способом, указанным, например, в [6]:

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathcal{L}_2 u + \mathbf{a}(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{x}} u &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ u(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь  $\mathcal{L}_2$  – эллиптический дифференциальный оператор второго порядка в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , содержащий лишь производные. Помимо гладкости коэффициентов и границы основное условие накладывается на вектор-функцию  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ . Требуется, чтобы погранслоем существовал на всей границе. Формальное условие состоит в том, что на границе  $\partial\Omega$  вектор  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  направлен во внутрь области, так что скалярное произведение с вектором внутренней нормали  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  было положительно:  $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) > 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$ . Это условие обеспечивает для погранслойных функций экспоненциальное стремление к нулю на бесконечности по быстрой переменной (в направлении внутренней нормали). Ненулевое асимптотическое решение имеет структуру типа (4.6) с заменой  $x$  на  $\mathbf{x}$ . Быстрая переменная вводится растяжением в направлении внутренней нормали. Погранслойные функции содержат дополнительную зависимость от "медленной" переменной  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$ , которая параметризует точки на границе области. При этом нулевое точное решение  $u(\mathbf{x}) \equiv 0$  остается единственным, если задача не на спектре. Таким образом, снова строится *асимптотическое решение, которое не имеет отношения к точному решению*.

Причину описанного эффекта – появления фиктивного асимптотического решения можно объяснять по-разному. На уровне асимптотических конструкций обычно ссылаются на структуру предельного (невозмущенного, при  $\varepsilon = 0$ ) оператора первого порядка, все характеристики которого входят в область, что гарантирует существование погранслоя на всей границе. Деформация области  $\Omega$  может кардинально изменить ситуацию. Например, для уравнения (4.1) на отрезке  $1/2 < x < 1$  приведенная выше конструкция фиктивного асимптотического решения становится невозможной. В этом случае погранслоем отсутствует вблизи левого края, внешнее разложение обязано удовлетворять краевому условию и поэтому оказывается нулем. Такая ситуация соответствует регулярному вырождению [6].

Другое объяснение состоит в том, что задача типа (4.1) в определенном смысле неустойчива относительно возмущения уравнения. Так, решение неоднородного уравнения с нулевыми условиями на краях

$$\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} = 1, \quad -1 < x < 1; \quad u(-1) = 0, \quad u(1) = 0$$

экспоненциально растет при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В данном примере такое свойство усматривается из явной формулы для решения, которое в силу симметрии  $u(x) = u(-x)$  достаточно выписать для  $x \geq 0$ :

$$u(x; \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_x^1 \int_x^y \exp((z^2 - y^2)/2\varepsilon) dz dy - C(\varepsilon) \int_x^1 \exp(z^2/2\varepsilon) dz, \quad x \geq 0.$$

Экспоненциальный рост здесь содержится во втором слагаемом, которое представляет собой решение однородного уравнения с константой

$$C(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^1 \exp(-y^2/2\varepsilon) dy = \mathcal{O}(1/\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Подобный факт для более общей многомерной задачи хорошо известен в теории стохастических возмущений [46], см. также [45], стр. 197. Такие задачи многократно обсуждались [47, 48, 49], точные результаты по определению главного члена асимптотики имеются в [50].

При наличии экспоненциального роста в точном решении построение асимптотики (на формальном уровне) позволяет выделить и затем обосновать экспоненциальные асимптотики, но не степенные<sup>1</sup>. Это означает, что степенная асимптотика остается неконтролируемой. Такая неконтролируемость может служить объяснением для появления фиктивного степенного асимптотического решения в однородной задаче.

Отметим, что экспоненциальный рост (по малому параметру) резольвенты несамосопряженного оператора связывается с появлением псевдоспектра [29] и с тем, что мы называем фиктивной асимптотикой. Известно много линейных задач подобного типа [28]. В рассмотренном примере резольвента не рассматривалась, и наличие псевдоспектра (помимо точки  $\lambda = 0$ ) не анализировалось. Здесь указано лишь на экспоненциальный рост обратного оператора для конкретной задачи.

Впрочем, все эти объяснения представляют собой не более, чем попытку выделения определенного класса задач, в которых наблюдается подобный эффект – появление фиктивного асимптотического решения. Следующие примеры выделяют класс нелинейных задач с тем же эффектом.

## 5. ВСПЛЕСКИ

Рассматривается краевая задача для простейшего нелинейного уравнения с малым параметром при производной

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = 4u - 6u^2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon^2 \ll 1, \quad (5.1)$$

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta.$$

Конструкция и обоснование асимптотики решения для подобного типа задач хорошо известны [9]. Мы покажем, что в этих задачах возможно построение асимптотических решений, которые не соответствуют никакому точному решению.

Ввиду простоты уравнения задачу можно проинтегрировать. Точное решение краевой задачи выписывается через эллиптические функции, параметры которых связаны с крайевыми значениями  $\alpha, \beta$ . Однако, в более сложных ситуациях, например, для уравнений с переменными коэффициентами явные представления для точного решения отсутствуют. Между тем, асимптотику решения всегда можно выписать через элементарные функции. В данном простом примере используются точные частные решения уравнения

$$u_s(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x/\varepsilon)}, \quad u_c(x) = \frac{1}{\cosh^2(x/\varepsilon)},$$

которые соответствуют двум типам сепаратрисных траекторий на фазовой плоскости.

Отметим, что в быстрой переменной  $\xi = x/\varepsilon$  уравнение не содержит параметра:

$$u_{\xi\xi}'' = 4u - 6u^2.$$

<sup>1</sup>Подобная ситуация возникает при конструировании степенных асимптотик, когда неконтролируемыми остаются экспоненциально малые величины; характерный пример приведен в [2].



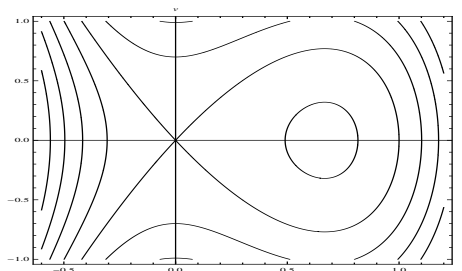


Рис. 2. Фазовый портрет уравнения с одной неустойчивой точкой равновесия

На фазовой плоскости (рис. 2) задача состоит в поиске траектории, которая соединяет точки на прямых  $u = \alpha$  и  $u = \beta$  за “большое время”  $0 \leq \xi \leq \varepsilon^{-1}$ . Как известно, время движения по траектории неограниченно увеличивается при приближении траектории к неустойчивой неподвижной точке. Поэтому при  $0 < \varepsilon \ll 1$  искомая траектория должна проходить вблизи сепаратрис мимо неподвижной точки. Для крайних значений  $\alpha, \beta < 0$  на фазовом портрете можно усмотреть две такие траектории. Одна из них остается левее неподвижной точки:  $x < 0$ , другая обходит сепаратрисную петлю. Эти траектории соответствуют двум точным решениям краевой задачи.

Впрочем, в формальных построениях можно обойтись без этой интерпретации. Асимптотика одного из решений задачи (5.1) представляет собой сумму функций погранслоного типа

$$u_0(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x/\varepsilon + \xi_0)} - \frac{1}{\sinh^2((1-x)/\varepsilon + \xi_1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^n), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \forall n.$$

Фазовые сдвиги  $\xi_0, \xi_1$  определяются через начальные данные из соотношений

$$-\frac{1}{\sinh^2(\xi_0)} = \alpha, \quad -\frac{1}{\sinh^2(\xi_1)} = \beta$$

при дополнительном условии  $\alpha, \beta < 0$ . Столь простая структура асимптотики (без рядов) обязана простоте исходного уравнения. При наличии переменных коэффициентов, например,  $\varepsilon^2 u'' = a(x)u[b(x) - u]$  структура асимптотики усложняется, и неизбежно появление рядов по степеням  $\varepsilon$ , см. [9].

Заметим, что сумма частных точных решений

$$U_0(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x/\varepsilon + \xi_0)} - \frac{1}{\sinh^2((1-x)/\varepsilon + \xi_1)}$$

удовлетворяет уравнению и крайним условиям асимптотически при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ввиду экспоненциального убывания функции  $\sinh^{-2}(\xi) = \mathcal{O}(\exp(-2\xi))$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ .

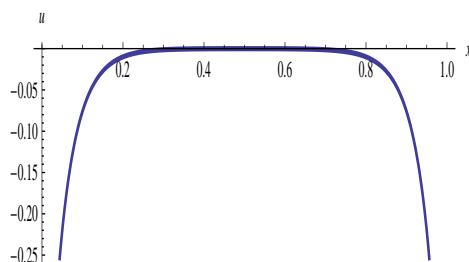


Рис. 3. Асимптотическое решение с погранслоем, которому соответствует точное решение задачи (5.1)

Если использовать второе частное решение уравнения, то можно составить сумму

$$U_1(x; x_1) = -\frac{1}{\sinh^2(x/\varepsilon + \xi_0)} - \frac{1}{\sinh^2((1-x)/\varepsilon) + \xi_1} + \frac{1}{\cosh^2((x-x_1)/\varepsilon)}.$$

При любом фиксированном значении  $x_1 \in (0, 1)$  такая функция также удовлетворяет уравнениям (5.1) асимптотически с экспоненциально малой точностью. Эта функция дает асимптотику точного решения

$$u_1(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x/\varepsilon + \xi_0)} - \frac{1}{\sinh^2((1-x)/\varepsilon) + \xi_1} + \frac{1}{\cosh^2((x-x_1)/\varepsilon)} + \mathcal{O}(\varepsilon^n), \forall n.$$

только при одном значении  $x_1 = x^*$ ; например,  $x^* = 1/2$  при  $\alpha = \beta < 0$ . Решение такого типа иногда называется решением (или функцией) со “всплеском”. Оно соответствует траектории с обходом сепаратрисной петли.

Итак, краевая задача (5.1) при условии  $\alpha, \beta < 0$  имеет лишь два точных решения  $u_0(x), u_1(x)$ , как видно из фазового портрета. Между тем, из приведенной конструкции следует, что для разных  $x_1$  строится *семейство асимптотических решений со всплеском*  $U_1(x; x_1)$ , которые не связаны ни с каким точным решением краевой задачи.

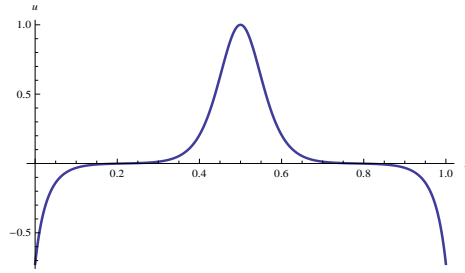


Рис. 4. Только одному из таких асимптотических решений с погранслоем и всплеском соответствует точное решение задачи (5.1) при  $\alpha, \beta < 0$

Более того, существует многопараметрическое семейство асимптотических решений

$$U_m(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x/\varepsilon + \xi_0)} - \frac{1}{\sinh^2((1-x)/\varepsilon) + \xi_1} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{\cosh^2((x-x_k)/\varepsilon)},$$

которые представляют функцию с  $m$  всплесками; здесь  $x_k$ —различные точки вне краев:  $0 < x_1 < \dots < x_m < 1$ .

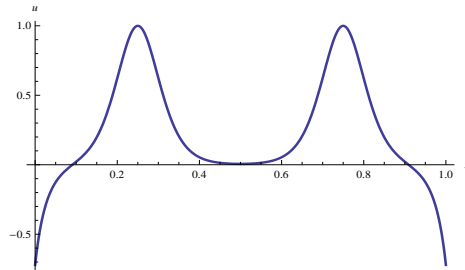


Рис. 5. Асимптотическое решение с погранслоем и всплесками, которому не соответствует никакое точное решение задачи (5.1) при  $\alpha, \beta < 0$

Такие функции удовлетворяют как уравнению, так и краевым условиям (5.1) асимптотически при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Они имеют  $m$  максимумов в разных точках  $x_k$ . Однако, эти функции не могут быть асимптотикой решения дифференциального уравнения (5.1) с краевыми значениями  $\alpha, \beta < 0$ . Этот факт легко усматривается из фазового портрета, из которого видно, что решение может иметь лишь один максимум.

Отметим, что точные решения со многими всплесками возможны при  $0 < \alpha, \beta < 1$ . Их траектории проходят по замкнутым кривым фазового портрета [51].

Для рассмотренной задачи при интерпретации результатов возникает соблазн связать наличие фиктивных асимптотических решений с неединственностью точного решения. В частности, при  $\alpha, \beta = 0$  имеется два точных решения: одно соответствует неподвижной точке  $u_0(x) \equiv 0$ , другое представляет собой всплеск и соответствует траектории вблизи сепаратрисной петли  $u_1(x) = \cosh^{-2}((x - 1/2)/\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^n)$ ,  $\forall n$ . Однако, следующий пример показывает, что фиктивные асимптотики остаются и в случае единственности точного решения. Критическим условием является наличие ячейки, образованной сепаратрисами, в конечной части фазовой плоскости/

### 6. КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ

Краевая задача для уравнения с двумя неустойчивыми точками равновесия

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + 2u[1 - u^2] = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon^2 \ll 1, \tag{6.1}$$

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta.$$

Два точных решения уравнения

$$u_{cot}(x) = \frac{\cosh(x/\varepsilon)}{\sinh(x/\varepsilon)} = \coth(x/\varepsilon), \quad u_{tan}(x) = \frac{\sinh(x/\varepsilon)}{\cosh(x/\varepsilon)} = \tanh(x/\varepsilon)$$

составляют основу для асимптотических конструкций. На фазовом портрете эти решения соответствуют сепаратрисам, которые либо уходят на бесконечность, либо остаются в конечной части плоскости соответственно.

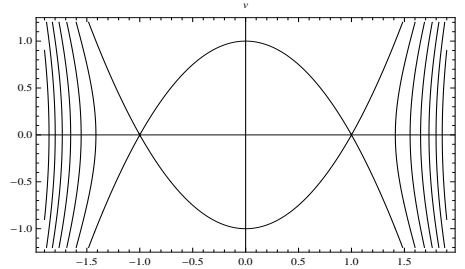


Рис. 6. Фазовый портрет уравнения с двумя неустойчивыми точками равновесия

Из фазового портрета видно, что краевая задача имеет единственное решение, если хотя бы одно из краевых значений  $\alpha, \beta$  не попадает на промежуток  $|u| < 1$ . При малом  $\varepsilon$  решение соответствует траектории, проходящей вблизи неустойчивых неподвижных точек. В частности, при  $\alpha, \beta < -1$  траектория остается левее положения равновесия  $u = -1$ . Асимптотика такого решения описывается функциями типа погранслоя:

$$u_0(x) = 1 - \coth(x/\varepsilon + \xi_0) - \coth((1 - x)/\varepsilon + \xi_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^n), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \forall n.$$

Константы  $\xi_0, \xi_1$  определяются через краевые значения:

$$\coth(\xi_0) = -\alpha, \quad \coth(\xi_1) = -\beta.$$

Главный член этой асимптотики

$$U_0(x) = 1 - \coth(x/\varepsilon + \xi_0) - \coth((1 - x)/\varepsilon + \xi_1),$$

составленный из частных решений нелинейного уравнения, не является точным решением задачи. Однако, ввиду свойства быстрой стабилизации  $\coth(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\exp(-\xi))$ ,  $\xi \rightarrow \infty$  эта

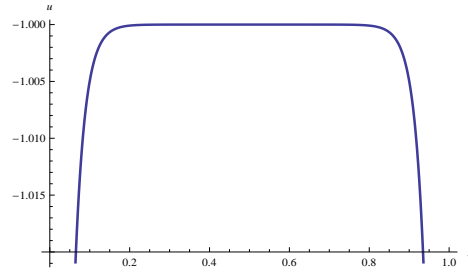


Рис. 7. Асимптотическое решение с погранслоем, которому соответствует единственное точное решение

сумма удовлетворяет уравнению и краевым условиям с экспоненциально малой невязкой при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Помимо такого асимптотического решения существует другая функция, которая описывает движение по сепаратрисам через другую неустойчивую точку. Здесь используется второе точное решение уравнения:

$$U_1(x) = 1 - \coth(x/\varepsilon + \xi_0) - \coth((1-x)/\varepsilon + \xi_1) + \tanh((x-x_0)/\varepsilon) - \tanh((x-y_0)/\varepsilon)$$

с фиксированными значениями  $0 < x_0 < y_0 < 1$ . Ввиду свойств стабилизации эта функция удовлетворяет уравнению и краевым условиям асимптотически при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Однако, из фазового портрета видно, что дифференциальное уравнение не имеет никаких решений с такой асимптотикой.

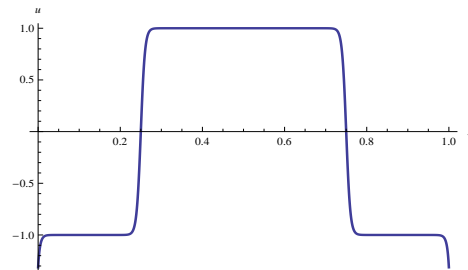


Рис. 8. Асимптотическое решение с контрастной структурой, которому не соответствует никакое точное решение

Ясно, что на основе серии пар точек  $x_k < y_k$  можно построить фиктивные асимптотические решения с конечным числом такого типа всплесков. Функции со всплесками, которые локализованы на конечном промежутке, принято называть контрастными структурами.

Все описанные выше асимптотические решения краевых задач для нелинейных уравнений описываются функциями, которые на фазовой плоскости соответствуют неподвижным точкам и быстрому движению по сепаратрисам. Экспоненциальная близость точных решений к сепаратрисным траекториям позволяет строить фиктивные асимптотические решения, переходя с одних траекторий на другие с экспоненциальной точностью.

Наиболее отчетливо это видно, когда краевые значения соответствуют неподвижным точкам  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1$ . В этом случае существует единственное точное решение задачи (6.1). Его асимптотика описывается траекторией, которая соединяет неподвижные точки по верхней сепаратрисе:

$$u_1(x) = \tanh((x - 1/2)/\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^n), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \forall n.$$

График этой функции выглядит как контрастная структура с одним внутренним переходным слоем.

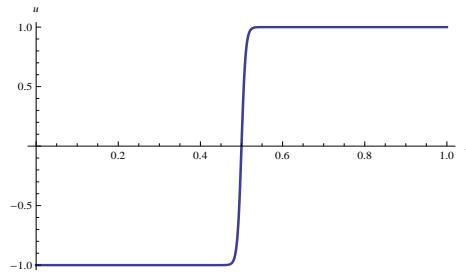


Рис. 9. Асимптотическое решение с контрастной структурой, которому соответствует единственное точное решение

Вместе с тем существует фиктивное асимптотическое решение, которое получается из предыдущего добавлением движения по нижней сепаратрсе и еще одного движения по верхней сепаратрсе:

$$U_1(x) = \tanh(x/\varepsilon) - \tanh((x - x_1)/\varepsilon) + \tanh((x - x_2)/\varepsilon), \quad 0 < x_1 < x_2 < 1.$$

График этой функции содержит три внутренних переходных слоя.

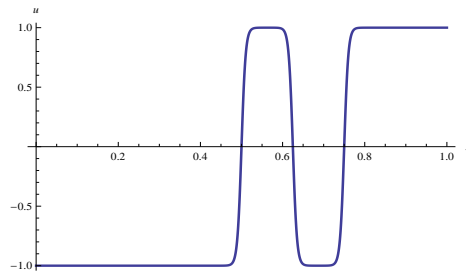


Рис. 10. Асимптотическое решение с контрастной структурой, которому не соответствует никакое точное решение

Из фазового портрета видно, что *точных решений с такой асимптотикой не существует.*

Класс рассмотренных примеров можно расширять в разных направлениях, например, на уравнения с общей нелинейностью  $\varepsilon^2 u'' = F(u)$ . Существенным условием является наличие неподвижных точек – решений предельного уравнения  $F(u) = 0$  и ячеек, образованных сепаратрисами. Как раз ячейки позволяют строить фиктивные контрастные структуры.

Отметим, что контрастные структуры строятся и в случае, если корни предельного уравнения  $F(u, x) = 0$  зависят от  $x$ , т.е. не являются неподвижными точками [10]. Для таких задач фиктивные асимптотические решения построить не удастся. Замечательно, что зависимость от  $x$  оказывается существенной при обосновании асимптотики, и результаты [10] не применимы для обоснования в приведенных выше примерах с неподвижными точками.

## 7. МНОГОМЕРНЫЕ КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ

Приведенные выше конструкции фиктивных асимптотик легко переносятся на уравнения с первой производной в возмущении

$$\varepsilon^2 [u'' + a(u', x)] = F(u).$$

На этом пути появляется возможность построения фиктивных контрастных структур для уравнений в частных производных. Один из простейших примеров получается для уравнения с двумя независимыми переменными

$$\varepsilon^2 \Delta u + 2u[1 - u^2] = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Если задачу рассматривать в кольце с соответствующими краевыми условиями, то ситуация оказывается близкой к примеру для обыкновенного дифференциального уравнения (6.1). В полярных координатах  $r, \varphi$  уравнение и краевые условия имеют вид

$$\varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) + 2u[1 - u^2] = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 < \varepsilon^2 \ll 1, \quad (7.1)$$

$$u(r, \varphi)|_{r=1} = \alpha(\varphi), \quad u(r, \varphi)|_{r=2} = \beta(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

От краевых функций требуется, чтобы хотя бы одна из них не принимала значения из промежутка  $(-1, 1)$ , например, при условии  $|\alpha(\varphi)|, |\beta(\varphi)| > 1, \forall \varphi$ . В модели, независимой от  $\varphi$ , это позволяет избежать движения по траекториям, близким к замкнутым, и проблем с единственностью точного решения.

При малых  $\varepsilon$  влияние краевых условий, а, следовательно, угловой переменной  $\varphi$  в случае кольца существенно лишь в узкой полосе вблизи границ. Асимптотика вне погранслоев не зависит от  $\varphi$ . Задача по сути дела сводится к построению асимптотического решения для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varepsilon^2 \left( \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right) + 2u[1 - u^2] = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 < \varepsilon^2 \ll 1. \quad (7.2)$$

Наличие первой производной с малым множителем не играет принципиальной роли, хотя конструкция усложняется.

Контрастная структура определяется асимптотическим решением в узком переходном слое вблизи точки  $r_j \in (1, 2)$ . Решение должно быстро стабилизироваться по растянутой переменной  $\rho = (r - r_j)/\varepsilon$ . В этой переменной уравнение для  $u = v(\rho; \varepsilon)$  приобретает вид

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} + \varepsilon \frac{1}{r_j + \varepsilon \rho} \frac{dv}{d\rho} + 2v[1 - v^2] = 0, \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon^2 \ll 1.$$

Асимптотическое решение строится в виде ряда

$$V(\rho; r_j) = v_0(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(\rho).$$

Главный член  $v_0(\rho) = \tanh \rho$  является решением нелинейного уравнения при  $\varepsilon = 0$ . Поправки  $v_n(\rho)$  определяются из линеаризованного уравнения

$$\frac{d^2 v_n}{d\rho^2} + 2v_n[1 - 3v_0^2] = f_n(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}$$

с дополнительным условием  $v_n(\rho) \rightarrow 0$   $\rho \rightarrow \pm\infty$ . Правые части вычисляются через предыдущие  $v_k(\rho)$ ,  $k < n$ .

На первом шаге  $f_1 = -v'_0/r_j$ . Поскольку быстроубывающая функция

$$v'_0(\rho) = \frac{1}{\cosh^2(\rho)}$$

является решением однородного линеаризованного уравнения, то решение для первой поправки выписывается в виде

$$v_1(\rho) = -\rho v'_0/2r_j + c v'_0$$

и содержит произвольную константу  $c$ . Этот произвол ликвидируется на следующем шаге, когда в решении для  $v_2(\rho)$  исключаются растущие на бесконечности слагаемые. Такая процедура повторяется на каждом шаге. В итоге все коэффициенты определяются однозначно и представляют собой быстро убывающие функции  $v_n(\rho) = \mathcal{O}(\rho^n \exp(\mp 2\rho))$ ,  $\rho \rightarrow \pm\infty$   $n \geq 1$ .

Таким способом строится ряд  $V(\rho; r_j)$  – асимптотический аналог сепаратрисного решения<sup>1</sup>, которое описывает движение от неподвижной точки  $-1$  к точке  $+1$ . Ввиду симметрии уравнения относительно смены знака асимптотическим решением будет также  $-V(\rho; r_j)$ . Из таких рядов можно комбинировать контрастные структуры с переходными слоями в разных точках  $r_j \in (1, 2)$ . Например, комбинация

$$-1 + V(\rho_-; r_-) - V(\rho_+; r_+), \quad \rho_{\pm} = (r - r_{\pm})/\varepsilon, \quad r_- < r_+$$

описывает движение от точки  $-1$  к точке  $+1$  и обратно.

Эту конструкцию легко приспособить к решению задачи для уравнения в частных производных (7.1), добавив ряды из погранслойных функций

$$U^-(\xi_-, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} u_n^-(\xi_-, \varphi), \quad U^+(\xi_+, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} + u_n^+(\xi_+, \varphi).$$

Погранслойные переменные определяются по формулам  $\xi_- = (r - 1)/\varepsilon$ ,  $\xi_+ = (2 - r)/\varepsilon$ , а коэффициенты быстро убывают по этим переменным  $u_n^{\pm}(\xi) = \mathcal{O}(\xi^{2n} \exp(-\xi))$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ .

В итоге получается асимптотическое решение в виде контрастной структуры с погранслоями, которое может иметь произвольное число переходных слоев на окружностях произвольного радиуса  $r_j \in (1, 2)$ .

Описанная конструкция контрастных структур в виде концентрических колец с произвольными центрами и радиусами может быть выполнена в любой области (не обязательно кольцо). Чтобы конструкция погранслойных функций не выглядела слишком сложно, можно ограничиться случаем, когда лучи, выходящие из центра взятых окружностей, не касаются границы области [6].

Таким образом, для краевой задачи с малым параметром (7.1) при наличии неподвижных точек возможно построение бесконечного числа асимптотических решений, большая часть которых не имеет отношения к точному решению.

Тот факт, что построенная контрастная структура не имеет отношения к точному решению, надо доказывать. Наиболее просто доказательство получается для задачи в кольце, когда краевое условие не зависит от угла, и дело сводится к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения.

**Утверждение 7.1.** *Краевая задача для уравнения (7.2) допускает фиктивные асимптотические решения, если краевые значения  $\alpha, \beta \notin [-1, 1]$ .*

Доказательство. Поскольку уравнение (7.2) не автономное, то фазового портрета на плоскости не изобразить, и информацию о точном решении приходится извлекать другим способом – при помощи априорных оценок. Можно заметить, что неавтономное слагаемое с первой производной играет роль диссипации (сопротивления). Это позволяет оценить положение фазовой траектории, выписав для уравнение (7.2) аналог закона сохранения:

$$[(\varepsilon u')^2 + 2u^2 - u^4]_{r_0}^r = -\varepsilon^2 \int_{r_0}^r \frac{1}{r} (u'(\varrho))^2 d\varrho < 0.$$

из этого неравенства следует, что величина  $I(u, u') = (\varepsilon u')^2 + 2u^2 - u^4$ , линии уровня которой изображены на фазовом портрете рис.6, будет убывать вдоль траекторий уравнения (7.2). Поэтому траектория, попадающая внутрь сепаратрисной ячейки рис.6 при  $r = \hat{r}$ , должна там остаться при всех  $r > \hat{r}$ . Следовательно для решения уравнения (7.2) с краевыми значениями за границами ячейки:  $\alpha, \beta \notin [-1, 1]$  траектория не попадает внутрь ячейки. В частности экстремумы такого решения не попадают в промежуток  $[-1, 1]$ , поскольку при  $u'(r) = 0$  обязано выполняться  $|u(r)| > 1$ .

С другой стороны, из уравнения (7.2) следует, что в точке максимума  $u(r)[1 - u^2(r)] \geq 0$ . Поэтому положительный максимум может принимать значение лишь на промежутке  $[0, 1]$ .

<sup>1</sup>Надо понимать, что уравнение (7.2) не имеет точных решений, траектории которых соединяют седла. Наличие первой производной приводит к расщеплению сепаратрис.

Однако, в задаче с краевыми значениями  $\alpha, \beta < -1$  такого максимума быть не может, и поэтому решение остается левее точки равновесия  $u(r) < -1$ . Аналогично проводятся рассуждения в общем случае, когда  $\alpha, \beta \notin [-1, 1]$ . Если значения  $\alpha, \beta$  разных знаков, то решение краевой задачи монотонно:  $u'(r) \neq 0$ .

Построенное выше асимптотическое решение в виде контрастной структуры с пограничностями:

$$-1 + V(\rho_-; r_-) - V(\rho_+; r_+) + U_-(\xi_-) + U_+(\xi_+), \quad (r_- < r_+)$$

не монотонно, принимает значения близкие как к  $+1$  так и к  $-1$ . Поэтому оно не представляет асимптотику никакого точного решения краевой задачи с  $\alpha, \beta \notin [-1, 1]$ , т.е. является фиктивным. Утверждение доказано.

## 8. МОДЕЛЬ ИГОЛЬЧАТОГО КРИСТАЛЛА

Рассматривается уравнение третьего порядка с малым параметром при производных

$$\varepsilon^5 \frac{d^3 u}{dx^3} + \varepsilon \frac{du}{dx} = \cos u, \quad -1 < x < 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (8.1)$$

и с краевыми условиями, которые соответствуют неподвижным точкам.

$$u(-1) = -\pi/2, \quad u(1) = \pi/2. \quad (8.2)$$

В такой постановке задача похожа на те, что рассмотрены в предыдущих разделах. Краевых условий, вообще говоря, не достаточно для корректной постановки. Дополнительное условие

$$u(0) = 0, \quad (8.3)$$

возможно, делает задачу корректной. Это условие фиксирует момент прохождения заданной точки (здесь  $u = 0$ ) траекторией автономной системы.

Если перейти к быстрой переменной  $s = x/\varepsilon$ , то уравнение приобретает стандартную форму, принятую в геометрической теории игольчатого кристалла

$$\varepsilon^2 \frac{d^3 u}{ds^3} + \frac{du}{ds} = \cos u, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (8.4)$$

При этом вместо большого промежутка  $-1/\varepsilon < s < 1/\varepsilon$  в работе [2] рассматривается неограниченный промежуток  $-\infty < s < \infty$  и условия на бесконечности

$$u(s) \rightarrow \mp \pi/2, \quad s \rightarrow \mp \infty. \quad (8.5)$$

Поскольку асимптотическое решение строится в классе экспоненциально стабилизирующихся функций, то такая замена области не принципиальна.

В работе [2] речь идет о попытке выделить решение типа сепаратрисы, траектория которого монотонно идет от одной неподвижной точки к другой. Основным результатом состоит в том, что такого решения с условиями (8.5), (8.3) не существует.

Поучительность этого примера заключается в том, что асимптотическое решение такой задачи (8.4), (8.5), (8.3) строится с любой степенью точности:

$$U(s, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n(s), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Главный член определяется из предельного нелинейного уравнения  $U_0' = \cos U_0$  и представляет собой гладкую ступеньку:  $U_0(s) = \arcsin \tanh(s)$ , см. рис. 11. Решение линеаризованного уравнения  $v' + \sin U_0 \cdot v = 0$  быстро убывает на бесконечности  $v = U_0'(s) = 1/\cosh s$ . Все поправки однозначно определяются из неоднородных линеаризованных уравнений с условием  $U_n(0) = 0$  и являются гладкими нечетными функциями. На бесконечности они быстро стремятся к нулю:  $U_n(s) = \mathcal{O}(s^n \exp(\mp s))$ ,  $s \rightarrow \pm \infty$ .



Более того, на каждой полуоси (либо  $s \geq 0$ , либо  $s \leq 0$ ) формальное решение  $U(s, \varepsilon)$  представляет асимптотику единственного точного решения, [2]. Однако, эти два точные решения (на разных полуосях) не представляют решение на всей оси из-за несовпадения вторых производных в точке  $s = 0$ . Несовпадение экспоненциально мало при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и не проявляется в формальных конструкциях.

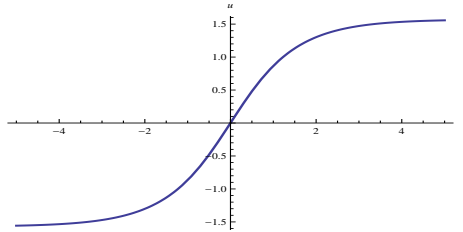


Рис. 11. Графики асимптотического и численного решения уравнения (8.4) при  $\varepsilon = 0.1$  практически совпадают

Отметим, что в численных экспериментах обнаруживается приближенное решение, график которого практически совпадает с графиком асимптотического решения уже при  $\varepsilon = 0.1$ , рис.11. Этот факт должен насторожить любителей обосновывать асимптотику посредством численного счета, поскольку в рассматриваемой задаче точного решения заведомо не существует.

### 9. ПРИМЕР АНОСОВА

Здесь воспроизводится в простейшей форме пример из доклада Д.В. Аносова [3].

Для линейного уравнения с периодической правой частью и с малым параметром

$$\varepsilon \frac{d^2 u}{dt^2} + u = f(t), \quad t > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{9.1}$$

рассматривается задача о поиске периодического решения. Пусть правая часть – типичная  $2\pi$ -периодическая функция, так что разлагается в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \exp(ikt)$$

и не является тригонометрическим полиномом; таким образом, существует последовательность номеров  $k_j \rightarrow \infty$ , для которых  $f_{k_j} \neq 0$ . Считается, что эта функция бесконечно дифференцируема; например, сходятся все ряды:

$$\forall n > 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^n |f_k| < \infty.$$

При этих условиях легко строится *асимптотическое решение с  $2\pi$ -периодическими коэффициентами*:

$$U(t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad u_n(t) = (-1)^n f^{(2n)}(t). \tag{9.2}$$

Однако, гипотеза о том, что этот ряд при  $\varepsilon \rightarrow 0$  представляет собой асимптотику периодического решения, не верна. Для точного решения имеет место

**Утверждение 9.1.** *Если  $f(t)$  – типичная периодическая функция, то существует последовательность значений параметра  $\varepsilon_j \rightarrow 0$ , при которых уравнение (9.1) не имеет периодических решений.*

Для доказательства надо взять ряд Фурье для периодического решения (если таковое существует)

$$u(t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\varepsilon) \exp(ikt),$$

и в силу уравнения выписать соотношения для коэффициентов  $(1 - \varepsilon k^2)a_k = f_k$ . Если  $f_{k_j} \neq 0$ , то при  $\varepsilon_j = 1/k_j^2$  получаем противоречие.

Таким образом, из существования асимптотического при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решения с периодическими коэффициентами нельзя сделать вывод о существовании точного периодического решения при всех достаточно малых  $\varepsilon$ . На этом фоне вопрос об оценке остатка представляется бессмысленным.

Однако, отсюда не следует, что асимптотическое решение не имеет отношения к какому-либо точному решению. У непериодической функции может быть чрезвычайно малый сдвиг фазы, так что она хорошо приближается периодической, как это видно из примера

$$\sin(t + \exp(-(t^2 + 1)/\varepsilon)) = \sin t + \mathcal{O}(\exp(-1/\varepsilon)), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Для рассмотренной задачи имеет место похожая ситуация: существует точное решение уравнения, для которого построенный формальный ряд представляет асимптотику при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $t$  на большом промежутке времени. Более того, таких решений много.

Рассмотрим для уравнения (9.1) задачу Коши с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(\varepsilon), \quad u'|_{t=0} = \psi(\varepsilon). \quad (9.3)$$

Решение можно выписать в виде:

$$u(t; \varepsilon) = \varepsilon^{-1/2} \int_0^t \sin((t - \eta)/\sqrt{\varepsilon}) f(\eta) d\eta + \varphi(\varepsilon) \cos(t/\sqrt{\varepsilon}) + \sqrt{\varepsilon} \psi(\varepsilon) \sin(t/\sqrt{\varepsilon}). \quad (9.4)$$

**Утверждение 9.2.** *Существует множество пар гладких функций  $\varphi(\varepsilon), \psi(\varepsilon)$ , с одинаковой степенной асимптотикой при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , при которых решение задачи (9.1), (9.3) имеет асимптотику в виде построенного выше ряда (9.2) с периодическими коэффициентами равномерно по  $t$  на промежутке  $|t| \leq \varepsilon^{-p}$  при любом фиксированном  $p < \infty$ .*

Доказательство состоит в том, что подходящим образом подбираются коэффициенты в асимптотических рядах

$$\varphi(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_n, \quad \psi(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Для этого вычисляется асимптотика точного решения путем взятия по частям интеграла в формуле (9.4). Нетрудно видеть, что при многократном повторении такой операции внеинтегральные слагаемые в верхнем пределе  $\eta = t$  дают коэффициенты ряда (9.2), а в нижнем пределе  $\eta = 0$  получаются асимптотические ряды при  $\cos(t/\sqrt{\varepsilon})$  и при  $\sin(t/\sqrt{\varepsilon})$ . Асимптотические суммы (см. [52, 53]) этих рядов дают желаемые функции<sup>1</sup> с обратным знаком:  $-\varphi(\varepsilon), -\psi(\varepsilon)$ .

Таким образом получается разложение точного решения в виде ряда (9.2). На этом пути извлекается оценка остатка асимптотического разложения следующим образом. Если процедуру взятия по частям остановить на шаге  $2N$ , то получается представление решения в виде частичной суммы ряда и оставшегося интеграла

$$u(t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n u_n(t) + (-1)^N \varepsilon^{N-1/2} \int_0^t \sin((t - \eta)/\sqrt{\varepsilon}) f^{(2N)}(\eta) d\eta + \Phi(\varepsilon).$$

<sup>1</sup>как известно, таких функций много.

Здесь  $\Phi(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$  – остатки от начальных функций; это слагаемое и интеграл с малым множителем представляют собой остаток асимптотического разложения. Интеграл грубо оценивается через длину промежутка, так что

$$\left| u(t; \varepsilon) - \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n u_n(t) \right| < M(N) \varepsilon^{N-p-1/2}, \quad M(N) = \text{const} < \infty, \quad \forall |t| < \varepsilon^{-p}.$$

Ввиду произвольности числа  $N$  эта оценка доказывает утверждение.

Заметим, что на конечном промежутке  $0 \leq t < 2\pi$  формальное  $2\pi$ -периодическое решение (9.2) представляет собой асимптотику точного решения (9.4) с любой степенью точности  $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\forall n$ . Другое дело, что это точное решение не является  $2\pi$ -периодическим.

На большом промежутке, который содержит значения  $t \gg 1$ , оценка остатка асимптотического разложения ухудшается с увеличением длины промежутка<sup>1</sup>. Это обычная ситуация в задачах теории колебаний, с которыми имеют дело известные методы возмущений. Разложения, пригодные равномерно на бесконечном промежутке, являются скорее исключением, чем правилом. Такие исключения, в частности, дают задачи о построении периодических решений вблизи равновесия [7, 54]. Приведенный выше пример (9.1) таким исключением не является.

Отметим, что этот и другие примеры, приведенные в [4], выходят за рамки задач, которые обычно рассматриваются в теории колебаний, из-за постановки вопроса о периодичности решения по медленной переменной. Чаще рассматриваются задачи о сохранении свойства периодичности решений по быстрой переменной при слабом возмущении уравнения, т.е. без повышения порядка производных [54], стр.115. В приведенном примере возмущение второй производной (сильное) приводит к появлению быстрого масштаба времени  $t/\sqrt{\varepsilon}$ , и исходный масштаб  $t$  становится медленным. Фактически речь идет об уравнении

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = f(\varepsilon t), \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

с постановкой периодического условия по переменной  $\tau = \varepsilon t$ . Подобные задачи о медленных периодических возмущениях анализировались в [17].

## 10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для разных классов задач с малым параметром построены формальные асимптотические решения, которые не представляют асимптотику точного решения. Все примеры, для которых строятся фиктивные асимптотические решения (за исключением примеров Нефедова и Аносова), обладают двумя специфическими чертами:

- 1) наличие неподвижной точки у дифференциального уравнения;
- 2) краевые условия на границе.

Среди множества представленных конструкций встречаются такие, которые в частных случаях соответствуют точным решениям (всплески, контрастные структуры). Однако на уровне формальных построений они не отличаются от фиктивных решений. Обоснование асимптотики в таких частных случаях может оказаться непростой задачей; результаты из [10] заведомо не годятся.

Пример Аносова идейно близок к примеру Kruskal–Segur. В том и другом случае рассматривается задача, которая не имеет точного решения, но для которой строится асимптотическое решение. В общей ситуации отсутствие точного решения и доказательство фиктивности формального решения может оказаться далеко нетривиальной проблемой, как продемонстрировано в [2].

<sup>1</sup>Для типичных правых частей  $f(t)$  из-за наличия резонансных слагаемых в правой части эта оценка не улучшаема по порядку малой величины  $\varepsilon$ .

По-видимому, во всех примерах разрешение противоречия между точным и асимптотическим решениями лежит за пределами степенных асимптотик. Чтобы отсеять фиктивные асимптотики, необходимо учитывать экспоненциально малые слагаемые. Для обыкновенных дифференциальных уравнений существует такой способ с выходом в комплексную плоскость, см. [2, 55, 56]. Для уравнений в частных производных вопрос остается открытым.

Еще одно замечание относится к использованию численных методов. Из-за трудности вопроса об остатках и нежелания заниматься обоснованием иногда в качестве подтверждения пригодности асимптотических формул демонстрируются результаты численных экспериментов с возмущенной задачей. Близость численного и асимптотического решений интерпретируется как обоснование асимптотики. Однако, если не проявлять должную осторожность, то такое "подтверждение" при желании можно получить во всех приведенных выше примерах. То есть численные решения также могут оказаться фиктивными. Здесь проблемы возникают, во-первых, из-за использования конечномерной аппроксимации. В связи с задачами о псевдоспектре этот вопрос исследовался в [57], где было указано, что спектр конечномерных аппроксимаций может не аппроксимировать спектр исходного оператора. Другая причина неэффективности численных методов так же как и асимптотических формул кроется в трудности контроля за экспоненциально малыми величинами, которые со временем приводят к большим ошибкам. Впрочем, для задач с малым параметром при старшей производной даже в случае, когда вырождение регулярное в смысле [6], и фиктивные асимптотики отсутствуют, для аккуратного численного счета требуются специальные методы. Это давно известная проблема [58], и на эту тему имеется большое число публикаций. Задачи с фиктивными асимптотиками в этом направлении не затрагивались.

Автор выражает признательность своим коллегам в Институте математики с ВЦ РАН Киселеву О.М., Сулейманову Б.И. и Султанову О.А., а также Доброхотову С.Ю. и Нефедову Н.Н. за дискуссии, которые подтолкнули к написанию данной заметки.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00078)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабич В.М., Булдырев В.С. *Искусство асимптотики* // Вестник ЛГУ. №13. 1977. С. 5–12.
2. M.D. Kruskal and H. Segur *Asymptotics beyond all orders in a model of crystal growth* // Stud.Appl.Math V.85, №2. 1991. P. 129–181.
3. Аносов Д.В. *О понятии асимптотического решения* // Международная конференция "Современные проблемы математики, механики и математической физики", посвященная 150-летию со дня рождения В.А. Стеклова, 14 мая 2013 г. [http : //www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option\\_lang=rus&presentid=6787](http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=6787)
4. D.V. Anosov *Some examples of singular perturbations* // J. Dynam. Control Systems V.2 №2. 1996. P. 289–298.
5. Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И. *Асимптотическая математика и синергетика* // М.: УРСС, 2004.
6. Вишик М.И., Люстерник Л.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // Успехи матем. наук. Т. 12, вып. 5. 1957. С. 3–122.
7. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* // М.: Наука. 1974.
8. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач* // М: Наука. 1989.
9. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*. М. Высшая школа. 1990.
10. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. *Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах* // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 4, №3. 1998. С. 799–851.

11. Митропольский Ю.А., Хома Г.П. *Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики* // Наукова думка, Киев, 1983.
12. Маслов В.П., Федорюк М.В. *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики* // М.: Наука, 1976.
13. Ларичева В.В. *О расширении интервала применимости осреднения* // Докл. АН СССР. Т. 220, №4. 1975. С. 775–778.
14. Ажоткин В.Д., Бабич В.М. *О применении метода двухмасштабных разложений к одночастотной задаче теории нелинейных колебаний* // Прикладная математика и механика Т. 49, №3. 1985. С. 377–383.
15. Кузнецов А.Н. *Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений* // Функц. анализ и его прилож. Т. 6, вып. 2. 1972. С. 41–51.
16. Кузнецов А.Н. *О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением* // Функц. анализ и его прилож. Т. 23, вып. 4. 1989. С. 63–74.
17. Арнольд В.И. *О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона* // Докл. АН СССР. Т. 142, №4. 1962. С. 758–761.
18. Нехорошев Н.Н. *Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым* // Успехи матем. наук. Т. 32, вып. 6. 1976. С. 5–66.
19. Нейштадт А.И. *О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой* // Прикладная математика и механика. Т. 48, №2. 1984. С. 197–204.
20. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. *Математические аспекты классической и небесной механики* // М.: ВИНТИ, 1985.
21. Козлов В.В., Фурта С.Д. *Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений*. Изд-во Москов. ун-та. М. 1996.
22. Брюно А.Д. *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях*. М.:Наука. 1998.
23. L.A. Kalyakin *Justification of asymptotic expansion at infinity* // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. V. 15. S3. 2008. P. 210–216.
24. Ильин А.М., Меленцов М.А. *Асимптотика решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при больших значениях времени* // Труды ИММ УрО РАН. Т. 11. 2005. С. 97–110.
25. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // М.: Наука. 1983.
26. E.V. Davies *Pseudospectra of differential operators* // Operator Theory. V. 43. 2000. P. 243–262.
27. L.N. Trefethen *Pseudospectra of linear operators* // SIAM Review. V. 39. 1997. P. 383–406.
28. L.N. Trefethen *Wave packet pseudomodes of variable coefficient differential operators* // Proc. R. Soc. A 461. 2005. P. 3099–3122.
29. L.N. Trefethen and M. Embree *Spectra and Pseudospectra* // Princeton University Press, Princeton, N.J., 2005.
30. Гальцев С.В., Шафаревич А.И. *Спектр и псевдоспектр несамосопряженного оператора Шрёдингера с периодическими коэффициентами* // Математические заметки. Т.80, вып. 3. 2006. С. 356–366.
31. Nils Dencker *Spectral Instability of Semiclassical Operators* // The Erwin Schrödinger International Boltzmannsgasse 9. Institute for Mathematical Physics A-1090 Wien, Austria Vienna, Preprint ESI 2187. 2009. October 20, 2009.
32. Лидский В.Б. *К теории возмущений несамосопряженных операторов* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. Т. 6, №1. 1966. С. 52–60.
33. F. Calogero *Singular Potentials and Regularization* // Phys. Rev. V. 139. 1965. B602-B606.
34. F. Calogero *Simple Examples in Singular Perturbation Theory: Eigenvalues That Do Not Tend to Be Unperturbed Values as the Perturbation Is Switched Off* // Lett. Nuovo Cim. V. 25.1979. P. 533.
35. Михайлов А.В., Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Симметричный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем* // Успехи матем. наук. Т. 42, вып. 4. 1987. С. 3–53.

36. A.V. Mikhailov, A.B. Shabat, V.V. Sokolov *The symmetry approach to classification of integrable equations* // What is integrability?. Springer Berlin Heidelberg. 1991. P. 115–184.
37. Калякин Л.А. *Длинноволновые асимптотики* // Успехи матем. наук. Т.63, вып. 5 (2008). С. 3–72.
38. G. Schneider *Validity and limitation of the Newell-Whitehead equation* // Math. Nachr. **176**. 1995. P. 249–263.
39. G. Schneider *The validity of generalized Ginzburg-Landau equations* // Math. Methods Appl. Sci. **19** (1996), 717–736.
40. R. Bhatt and A.V. Mikhailov *On the inconsistency of the Camassa-Holm model with the shallow water theory* // arXiv:1010.1932v1 [nlin.SI] 10 Oct 2010
41. G.I. Burde *On the asymptotic solutions of the KdV equation with higher-order corrections* // Nonlinearity **18**. 2005. P. 1443–1461.
42. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач* // М.: Наука. 1979.
43. Иванов В.В., Васин В.В., Танана В.П. *Теория некорректных задач и ее приложения* // М.: Наука. 1978.
44. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. *Теория операторов и некорректные задачи* // Новосибирск: Изд-во ИМ, 1999.
45. Z. Schuss *Theory and applications of stochastic processes* // Applied Mathematical Sciences. Springer. V.170. 2010.
46. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений* // М.: Наука. 1979.
47. S. Kamin *On elliptic perturbation of a first order operator with a singular point of attracting type* // Indiana Univ. Math. J. V. 27 (6). 1978. P. 935–951.
48. Z. Schuss and B.J. Matkowsky *The exit problem: A new approach to diffusion across potential barriers* // SIAM J. Appl. Math. V. 35 (3). 1979. P. 604–623.
49. M.V. Day *Mathematical Approaches to the Problem of Noise-Induced Exit* // Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications A Volume in Honor of W.H. Fleming Series: Systems & Control: Foundations & Applications 1999. P. 269–287. McEneaney, William M.; Yin, G. George; Zhang, Qing (Eds.) 1998, XXXII, 637 p. A product of Birkhauser Basel
50. B. Perthame *Perturbed dynamical system with an attracting singularity and weak viscosity limits in Hamilton-Jacobi equations* // Transactions of the AMS, V. 317, 2. 1990. P. 723–748.
51. Васильева А.Б., Тугчиев В.А. *О периодических решениях систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производной, близких к разрывным* // Докл. АН СССР. Т. 178, № 4. 1968. С. 767–770.
52. F.W.J. Olver *Introduction to asymptotics and special functions* // Academic Press. New York and London, 1974.
53. Федорюк М.В. *Метод перевала* // М.: Наука. 1977.
54. Моисеев Н.Н. *Асимптотические методы в нелинейной механике* // М.: Наука. 1981.
55. Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. *Метод перевала и ресургентный анализ* // Матем. заметки. Т. 61, вып. 2. 1997. С. 278–296.
56. O. Costin and M.D. Kruskal *Optimal Uniform Estimates and Rigorous Asymptotics Beyond all Orders for a Class of Ordinary Differential Equations* // arXiv:math/0608412v1 [math.CA] 16 Aug 2006.
57. E.V. Davies and M. Plum *Spectral pollution* // IMA J. Numer. Anal. V. 24. 2004. P. 417–438.
58. Ильин А.М. *Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной* // Матем. заметки. Т. 6, вып. 2. 1969. С. 237–248.

Леонид Анатольевич Калякин,  
 Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,  
 ул. Чернышевского, 112,  
 450008, г. Уфа, Россия  
 E-mail: klenru@mail.ru