ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 3 (2024). С. 3-23.

УДК 517.956

РАВНОМЕРНАЯ АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С МАЛЫМ СДВИГОМ

Д.И. БОРИСОВ, Д.М. ПОЛЯКОВ

Аннотация. Рассматривается модельный оператор Шрёдингера с постоянным коэффициентом на единичном отрезке и краевыми условиями Дирихле и Неймана на разных концах с малым сдвигом в свободном члене. Величина сдвига — малый параметр, который может быть как положительным, так и отрицательным. Основной результат — спектральные асимптотики собственных значений и собственных функций с оценкой остаточного члена, равномерной по малому параметру. Для конечного числа начальных собственных значений и соответствующих собственных функций выписываются асимптотику по малому параметру. Доказывается, что каждое собственное значение простое, а система собственных функций образует базис в пространстве $L_2(0,1)$.

Ключевые слова: оператор Шрёдингера на отрезке, малый сдвиг, равномерная спектральная асимптотика.

Mathematics Subject Classification: 34B24, 34L20, 34E18

1. Введение

Дифференциально–разностные уравнения являются одним из важных примеров нелокальных операторов и в настоящее время активно изучаются. Интерес к исследованию таких уравнений связан с тем, что соответствующие им краевые и начально–краевые задачи обладают нестандартными свойствами, которых нет в классических постановках. Качественная теория эллиптических дифференциально–разностных и функционально–дифференциальных уравнений активно развивается, см. [1]–[5] и цитированную литературу, но тем не менее пока далека от завершения. Отметим также работы по качественной теории эволюционных дифференциально–разностных уравнений (см. [6], [7]). При этом нам известна лишь одна работа [3], в которой исследовались спектральные свойства соответствующих операторов.

Изучение асимптотики собственных значений по номеру для оператора Штурма–Лиувилля проводилось в огромном количестве книг и статей. Не претендуя на общность, мы упомянем здесь только две классические монографии [8], [9], см. также списки литературы в этих книгах. Известные классические работы дают спектральные асимптотики для многих классов эллиптических операторов. Вместе с тем, если рассматривать семейства операторов, зависящие от параметра, то вопрос о спектральных асимптотиках становится открытым. Причина в том, что в этом случае вся асимптотика, включая остаточный член, начинают зависеть от параметра, и такая зависимость может разрушать остаточный член. Классическая теория возмущений при этом оказывается непригодной, так как

D.I. Borisov, D.M. Polyakov, Uniform asymptotics for eigenvalues of model Schrödinger operator with small translation.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00009, https://rscf.ru/project/23-11-00009/.

Поступила 20 июня 2024 г.

утверждения о сходимости резольвент позволяют получить утверждения только о поведении спектра в компактах, то есть, для конечного числа собственных значений, а не для всего набора.

Спектральные асимптотики, равномерные по малому параметру, ранее были известны только для ряда частных моделей. В работах [10], [11] описывалось поведение собственных значений для спектральной задачи на интервале (a,b) вида

$$i\varepsilon u'' + qu = \lambda u, \qquad u(a) = u(b) = 0,$$

где q — заданная функция и $\varepsilon > 0$ — малый параметр. В упомянутых статьях рассматривались два случая функций: $q(x) = x$ и $q(x) = (x-a)^2$. Данная задача связана с известным в гидродинамике уравнением Орра–Зоммерфельда, а функция q выступает в качестве скорости стационарного профиля жидкости в канале $a \leqslant x \leqslant b$. В работе [10] показано, что собственные значения локализуются вдоль некоторого множества, который напоминает по форме галстук. Подобные результаты были получены и в [12]–[15]. Похожее множество получалось и во втором случае для $q(x) = (x-a)^2$. Для данных задач была установлена асимптотика собственных значений, в которой остаточный член равномерен и по малому параметру ε, и по номеру. В дальнейшем в статьях [16]–[18] эти результаты переносились на другие классы функции q. Ещё отметим, что вопросы резольвентной сходимости эллиптических операторов порядка $2m$ с малыми переменными сдвигами в младших членах рассматривались в работе [19].

В настоящей работе мы изучаем равномерные спектральные асимптотики для модельного оператора Шрёдингера с постоянным комплексным потенциалом, возмущённого оператором малого сдвига. Величина сдвига является малым параметром, который может быть как положительным, так и отрицательным. Область определения этого оператора задается краевыми условиями Дирихле и Неймана на разных концах. Наш основной результат — равномерная по малому параметру спектральная асимптотика для собственных значений. Вычислены первые четыре члена асимптотики, а также остаточный член в виде $O(n^{-3})$. Структура полученной равномерной спектральной асимптотики демонстрирует нетривиальный высокочастотный эффект в поведении больших собственных значений. В работе выписаны и асимптотики соответствующих собственных функций, равномерные по малому параметру. Для первых собственных значений и соответствующих собственных функций выписаны асимптотики по малому параметру. Показано, что все собственные значения простые, а соответствующие собственные функции образует базис в пространстве $L_2(0,1)$.

2. Постановка задачи и основные результаты

На интервале $(0,1)$ рассмотрим оператор с дифференциальным выражением

$$\hat{\mathcal{H}} := -\frac{d^2}{dx^2}$$

и краевыми условиями

$$u(0) = 0, \qquad u'(1) = 0. \tag{2.1}$$

Такой оператор с обозначим через $\mathcal{H}$ и будем рассматривать его как неограниченный в пространстве $L_2(0,1)$ на области определения

$$\mathfrak{D}(\mathcal{H}) := \big\{ u \in W_2^2(0,1) : \text{выполнены краевые условия (2.1)} \big\}. \tag{2.2}$$

Оператор $\mathcal{H}$ очевидно m–секториальный и имеет компактную резольвенту. Его спектр чисто дискретный и состоит из собственных значений

$$\lambda_n = \kappa_n^2, \qquad \kappa_n := \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.3}$$

Основной объект изучения настоящей работы — это возмущение оператора $\mathcal{H}$ оператором малого сдвига. А именно, пусть $\mathcal{L}$ — оператор продолжения нулем вне интервала $(0,1)$, который рассматриваем как действующий из $L_2(0,1)$ в $L_2(\mathbb{R})$, а $\mathcal{R}$ — оператор сужения на $(0,1)$, который действует из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(0,1)$. Эти операторы вводятся формулами

$$\mathcal{L}y = \begin{cases} y & \text{в} \quad (0,1), \\ 0 & \text{вне} \quad (0,1), \end{cases} \qquad \mathcal{R}y = y \quad \text{на} \quad (0,1).$$

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ определим пару операторов малого сдвига $\mathcal{T}^\varepsilon$, действующих по правилу $(\mathcal{T}^\varepsilon y)(x) = y(x+\varepsilon)$, $x \in (0,1)$, где ε — малый параметр, который может быть как положительным, так и отрицательным.

Возмущающий оператор $\mathcal{P}^\varepsilon$ в пространстве $L_2(0,1)$ зададим так:

$$\mathcal{P}^\varepsilon y = a\big(\mathcal{R}\mathcal{T}^\varepsilon\mathcal{L}y - y\big), \tag{2.4}$$

где $a \in \mathbb{C}$ — некоторая константа. Действие такого оператора описывается равенством

$$(\mathcal{P}^\varepsilon y)(x) = a\big(y(x+\varepsilon) - y(x)\big). \tag{2.5}$$

Здесь функцию y продолжаем нулем вне отрезка $[0,1]$, а результат действия сужаем на этот отрезок. Отметим ещё, что при $\varepsilon = 0$ оператор $\mathcal{P}^\varepsilon$ становится нулевым.

Возмущенный оператор задается равенством $\mathcal{H}^\varepsilon = \mathcal{H} + \mathcal{P}^\varepsilon$ в пространстве $L_2(0,1)$ на области определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}^\varepsilon) := \mathfrak{D}(\mathcal{H})$. В предположениях равенства (2.5) действие возмущенного оператора описывается формулой

$$(\mathcal{H}^\varepsilon y)(x) = -\frac{d^2y}{dx^2}(x) + a\big(y(x+\varepsilon) - y(x)\big), \qquad x \in (0,1).$$

Наш первый результат является вспомогательным и описывает базовые свойства оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$.

Теорема 2.1. *Оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ является m–секториальным и соответствующая ему замкнутая секториальная форма в пространстве $L_2(0,1)$ задается равенством*

$$\mathfrak{h}^\varepsilon(u,v) = (u',v')_{L_2(0,1)} + a(\mathcal{R}\mathcal{T}^\varepsilon\mathcal{L}u - u, v)_{L_2(0,1)} \tag{2.6}$$

на области определения

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{h}^\varepsilon) := \big\{u \in W_2^1(0,1) : \, u(0) = 0\big\}.$$

Существует число λ_0, не зависящее от ε, такое, что полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda_0$ попадает в резольвентное множество оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ для каждого $\varepsilon \neq 0$. Оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ имеет компактную резольвенту и его спектр состоит из счетного числа собственных значений с единственной точкой накопления в бесконечности. При $\varepsilon \to 0$ оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ сходится к $\mathcal{H}$ в смысле равномерной резольвентной сходимости, а именно, верна оценка

$$\|\mathcal{H}^\varepsilon - \mathcal{H}\|_{L_2(0,1)\to W_2^1(0,1)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \tag{2.7}$$

где $\|\cdot\|_{L_2(0,1)\to W_2^1(0,1)}$ — норма ограниченных операторов, действующих из $L_2(0,1)$ в $W_2^1(0,1)$, а C – некоторая константа, не зависящая от ε. Собственные значения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ сходятся к собственным значениям оператора $\mathcal{H}$.

Всюду далее упорядочим собственные значения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ в порядке неубывания модулей с учётом кратностей и обозначим их через λ_n^ε, $n \geqslant 0$.

Наш первый основной результат описывает асимптотику собственных значений λ_n^ε при $n \to +\infty$ равномерно по малому параметру ε.

Теорема 2.2. *Собственные значения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ простые. При $n\to+\infty$ асимптотика собственных значений λ_n^ε имеет вид*

$$\lambda_n^\varepsilon=\varkappa_n^2+\Lambda_{n,0}^\varepsilon+\frac{\Lambda_{n,1}^\varepsilon}{\pi n}+\frac{\Lambda_{n,2}^\varepsilon}{\pi^2 n^2}+O(n^{-3}), \tag{2.8}$$

где оценка остатка равномерна по ε и обозначено

$$\begin{aligned}
\Lambda_{n,0}^\varepsilon:=&a(1-|\varepsilon|)\cos\varkappa_n\varepsilon-a, \qquad \Lambda_{n,1}^\varepsilon:=\frac{a^2\varepsilon(1-\varepsilon^2)}{4}\sin 2\varkappa_n\varepsilon,\\
\Lambda_{n,2}^\varepsilon:=&-\frac{3a^3}{32}\varepsilon^2(1-|\varepsilon|)(1+\varepsilon)^2\cos 3\varkappa_n\varepsilon+\frac{a^2}{8}(1-2\varepsilon-\varepsilon^2)\cos 2\varkappa_n\varepsilon\\
&+\frac{a^3}{32}\varepsilon^2(3+|\varepsilon|)(1-\varepsilon)^2\cos\varkappa_n\varepsilon-\frac{\pi a^2}{16}\varepsilon(1-\varepsilon^2)\sin 2\varkappa_n\varepsilon\\
&-\frac{a^2}{8}(1+\varepsilon^2)-\frac{a^2}{4}(\varepsilon+|\varepsilon|).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Данная теорема дает описание собственных значений при достаточно больших n, а именно при $n\geqslant N$ для некоторого фиксированного и достаточно большого N, которое выбирается независимо от ε. Поведение конечного числа собственных значений с номерами $n<N$ описывает следующая теорема.

Теорема 2.3. *Для каждого фиксированного N при $n<N$ собственные значения λ_n^ε голоморфны по ε и первые члены их рядов Тейлора по ε имеют вид*

$$\lambda_n^\varepsilon=\varkappa_n^2+\varepsilon\Upsilon_{n,1}+\varepsilon^2\Upsilon_{n,2}+O(\varepsilon^3), \tag{2.10}$$

где оценка остатка вообще говоря неравномерна по ε и обозначено

$$\Upsilon_{n,1}:=-3a,\qquad \Upsilon_{n,2}:=\frac{a\varkappa_n^2}{2}+\frac{a^2}{4}-\frac{9a^2}{4\varkappa_n^2},\qquad \text{при}\qquad \varepsilon>0, \tag{2.11}$$

$$\Upsilon_{n,1}:=-a,\qquad \Upsilon_{n,2}:=\frac{a\varkappa_n^2}{2}+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4\varkappa_n^2},\qquad \text{при}\qquad \varepsilon<0. \tag{2.12}$$

Наш второй основной результат описывает поведение соответствующих собственных функций.

Теорема 2.4. *Собственные функции $\psi_n^\varepsilon=\psi_n^\varepsilon(x)$ оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$, соответствующие собственным значениям λ_n^ε, образуют базис в $L_2(0,1)$. При $n\to\infty$ для них верны асимптотики*

$$\psi_n^\varepsilon(x)=\sqrt{2}\sin\pi\varkappa_n x+\frac{\Psi_n^\varepsilon(x)}{\pi n}+O(n^{-2}) \tag{2.13}$$

в норме $C[0,1]$, где оценка остатка равномерна по ε и обозначено

$$\Psi_n^\varepsilon(x):=\frac{a}{\sqrt{2}}\begin{cases}-(1-\varepsilon)(1-x)\cos\varkappa_n x\cos\varkappa_n\varepsilon, & x\in(0,1-\varepsilon),\\ \frac{1}{2}\big(((1-\varepsilon)x-1+\varepsilon)\cos\varkappa_n(x-\varepsilon) & \\ \quad-(x(1+\varepsilon)-1+\varepsilon)\cos\varkappa_n(x+\varepsilon)\big), & x\in(1-\varepsilon,1),\end{cases} \tag{2.14}$$

при $\varepsilon>0$ и

$$\Psi_n^\varepsilon(x):=\frac{a}{\sqrt{2}}\begin{cases}(1+\varepsilon)x\cos\varkappa_n\varepsilon\cos\varkappa_n x, & x\in(0,|\varepsilon|),\\ -\frac{1}{2}\big((x(1-\varepsilon)+2\varepsilon)\cos\varkappa_n(x+\varepsilon) & \\ \quad-x(1+\varepsilon)\cos\varkappa_n(x-\varepsilon)\big), & x\in(|\varepsilon|,1),\end{cases} \tag{2.15}$$

при $\varepsilon < 0$. *Для каждого фиксированного* N *при* $n \leqslant N$ *для собственных функций* ψ_n^ε *в норме* $C[0,1]$ *верны асимптотики*

$$\psi_n^\varepsilon(x) = \Phi_{n,0}^\varepsilon(x) + \varepsilon\, \Phi_{n,1}^\varepsilon(x) + O(\varepsilon^2), \tag{2.16}$$

где оценка остатка, вообще говоря, неравномерна по n *и обозначено*

$$\begin{aligned}
\Phi_{n,0}^\varepsilon(x) :=& \sqrt{2}\sin\varkappa_n x, && x\in[0,1-\varepsilon],\\
\Phi_{n,0}^\varepsilon(x) :=& (-1)^n\sqrt{2}\cos\sqrt{\varkappa_n^2+a}(x-1), && x\in[1-\varepsilon,1],\\
\Phi_{n,1}^\varepsilon(x) :=& -\frac{ax}{2\sqrt{2}\varkappa_n}\big(\pi\sin\varkappa_n x + 6\cos\varkappa_n x\big), && x\in[0,1-\varepsilon],\\
\Phi_{n,1}^\varepsilon(x) :=& (-1)^n a\Bigg(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{\varkappa_n^2+a}(x-1)\\
&+\frac{3\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{\varkappa_n^2+a}}\sin\sqrt{\varkappa_n^2+a}(x-1)\Bigg), && x\in[1-\varepsilon,1],
\end{aligned}\tag{2.17}$$

при $\varepsilon > 0$ *и*

$$\begin{aligned}
\Phi_{n,0}^\varepsilon(x) :=& \frac{\sqrt{2}\varkappa_n}{\sqrt{\varkappa_n^2+a}}\sin\sqrt{\varkappa_n^2+a}\,x, && x\in[0,|\varepsilon|],\\
\Phi_{n,0}^\varepsilon(x) :=& \sqrt{2}\sin\varkappa_n x, && x\in[|\varepsilon|,1],\\
\Phi_{n,1}^\varepsilon(x) :=& \sqrt{2}a\Bigg(\bigg(\frac{\varkappa_n}{\sqrt{\varkappa_n^2+a}} - \frac{\mathrm{i}}{\varkappa_n} - \frac{3a}{(\varkappa_n^2+a)^{\frac{3}{2}}}\bigg)\sin\sqrt{\varkappa_n^2+a}\,x\\
&-\frac{3a\varkappa_n}{2(\varkappa_n^2+a)}x\cos\sqrt{\varkappa_n^2+a}\,x\Bigg), && x\in[0,|\varepsilon|],\\
\Phi_{n,1}^\varepsilon(x) :=& -\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{3x-2}{\varkappa_n}\cos\varkappa_n x + (x-1)\sin\varkappa_n x\right), && x\in[|\varepsilon|,1].
\end{aligned}\tag{2.18}$$

при $\varepsilon < 0$.

Кратко обсудим изучаемую модель и основные результаты. Главная особенность оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ — наличие малого сдвига в возмущении, что делает оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ нелокальным. Сдвиг описывается малым параметром ε, который может быть как положительным, так и отрицательным. При $\varepsilon > 0$ оператор $\mathcal{R}\mathcal{T}^\varepsilon\mathcal{L}$ описывает сдвиг вправо, а при $\varepsilon < 0$ — влево. Это приводит к тому, что функция $\mathcal{R}\mathcal{T}^\varepsilon\mathcal{L}y$ оказывается равной нулю на интервале $(0,\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$ и на интервале $(1-|\varepsilon|,1)$ при $\varepsilon < 0$. В случае $\varepsilon > 0$ такой малый интервал примыкает к точке $x = 0$ с условием Дирихле, а в случае $\varepsilon < 0$ — к точке $x = 1$ с условием Неймана. Данное отличие проявляется в формулах для первых членов асимптотик для собственных значений и собственных функций оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$, которые являются основными результатами нашей работы (это теоремы 2.2, 2.3, 2.4).

Теорема 2.2 описывает первые четыре члена асимптотики собственных значений оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ при $n \to +\infty$ с остатком порядка $O(n^{-3})$, равномерным по ε. Это принципиально иной результат по сравнению с классическими спектральными асимптотиками, см., например, [8], [9], так как асимптотика зависит от малого параметра и даётся равномерная оценка остатка. В асимптотике (2.8) явно найдены первые четыре члена и это основное отличие от аналогичных результатов наших недавних работ [22], [23], где примененный метод подобных операторов позволил построить асимптотики только с остатком порядка $O(n^{-2})$. Соответствующие коэффициенты описываются формулами (2.9). Эти соотношения содержат функции вида $\sin p\varkappa_n\varepsilon$, $\cos p\varkappa_n\varepsilon$, $p = 1, 2, 3$. Эти функции медленно осциллируют по индексу n. При небольших n они близки соответственно к 0 и 1. При n порядка

$O(\varepsilon^{-1})$ функции $\sin p\varkappa_n\varepsilon$ и $\cos p\varkappa_n\varepsilon$ плавно меняются от -1 до $+1$, а при n, существенно превосходящих $O(\varepsilon^{-1})$, эти функции быстро осциллируют. Наличие таких функций в первых членах асимптотик для собственных значений описывает интересный высокочастотный эффект, в котором возмущение (малый сдвиг) нетривиально взаимодействует с большими значениями индекса n.

Если индекс n зафиксировать и уменьшать параметр ε, то собственное значение λ_n^ε оказывается голоморфным по достаточно малым ε и при $\varepsilon \to 0$ сходится к собственному значению λ_n предельного оператора. Такая сходимость оказывается неравномерной, как это сразу показывают асимптотики (2.8). Вместе с тем, если зафиксировать достаточно большое N, то при $n \geqslant N$ асимптотики (2.8) детально описывают поведение собственных значений λ_n^ε. Затем для $n \leqslant N$ затем следует выбрать достаточно малые значения ε, и тогда для собственных значений λ_n^ε можно выписать асимптотики по малому параметру ε, см. формулы (2.10), (2.11), (2.12) теоремы 2.3. Первые члены асимптотик выписаны явно, но оценка остатка уже неравномерна по n.

Для собственных функций также удается выписать первые члены асимптотических разложений и этот результат сформулирован в теореме 2.4. Соотношения (2.13), (2.14), (2.15) описывают асимптотики для больших $n \geqslant N$, а равенства (2.16), (2.17), (2.18) — асимптотики по параметру ε при $n \leqslant N$.

Теоремы 2.2, 2.3, 2.4 достаточно явно описывают глобальное поведение всего ансамбля собственных значений оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ и соответствующих собственных функций. Вне некоторого достаточно большого круга на комплексной плоскости, т. е. при $n \geqslant N$, следует пользоваться асимптотиками при $n \to +\infty$, а внутри круга — асимптотиками при $\varepsilon \to +0$. Дополнительно доказано, что собственные функции образуют (неортонормированный) базис в $L_2(0,1)$. Это тоже более сильный результат по сравнению с аналогичными утверждениями в статьях [22], [23], где утверждалась базисность системы собственных функций и возможных присоединенных функций. В настоящей работе существование присоединенных функций удается исключить.

Отдельно отметим, что первые члены асимптотик как при $n \to +\infty$, так и при $\varepsilon \to 0$ зависят от знака ε. Это показывают формулы (2.9). Члены $\Lambda_{n,0}^\varepsilon$ и $\Lambda_{n,1}^\varepsilon$ оказываются зависящими от абсолютной величины параметра ε, а член $\Lambda_{n,2}^\varepsilon$ содержит дополнительное слагаемое $-\frac{a^2}{4}(\varepsilon + |\varepsilon|)$, которое равно $-\frac{a^2\varepsilon}{2}$ при $\varepsilon > 0$ и тождественно обращается в нуль при $\varepsilon < 0$. Отличия членов асимптотик собственных значений по ε начинаются уже от коэффициентов при первой степени ε, см. (2.11), (2.12). Кроме того, формулы (2.14), (2.15), (2.17), (2.18) показывают значительные различия членов асимптотики при $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 0$.

Остановимся ещё на методе данной работы. Так как предельный оператор очень простой, а коэффициент a в возмущающем операторе постоянен, то уравнение на собственные значения для оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ удается решить достаточно явно. Используемое явное решение позволяет получить все описанные выше асимптотики. Однако при этом из–за наличия нелокальности в виде малого сдвига не гарантируется, что построенное нами решение общее, и что построенная система собственных значений исчерпывает весь спектр. Чтобы установить требуемый факт, проводится дополнительный анализ соответствующих собственных функций и показывается, что они образуют базис в $L_2(0,1)$, и тем самым построенная нами система собственных значений исчерпывает весь спектр оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$. Подчеркнем, что метод подобных операторов, использованный в работах [22] и [23] лишен такого недостатка и автоматически выдает результаты о всем наборе собственных значений. Вместе с тем, преимущество наших явных построений в возможности вычислений следующих членов асимптотик. Более того, наша техника позволяет построить любое наперёд заданное число членов асимптотик собственных значений и собственных функций, но вычисления при этом оказываются очень и очень громоздкими.

3. Форма и резольвента возмущенного оператора

В настоящем параграфе мы доказываем теорему 2.1. Схема в целом воспроизводит рассуждения доказательства теоремы 1 из статьи [22], но для удобства читателя мы кратко описываем основные необходимые шаги.

Применение общих результатов из доказательства теоремы 3 в [19, § 5] позволяет сразу заключить, что форма $\mathfrak{h}^\varepsilon$ секториальна и замкнута, ее числовая область расположена в секторе $\{z\in\mathbb{C}:\,|\operatorname{Im}\,z|\leqslant C_0(\operatorname{Re}\,z-C_1)\}$, где C_0 и C_1 — некоторые константы, не зависящие от ε и $C_0>0$, и согласно первой теореме о представлении [20, Гл. VI, §2.1, Теор. 2.1] данной форме соответствует некоторый m–секториальный оператор. Обозначим данный оператор через $\tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon$ и проверим, что он совпадает с $\mathcal{H}^\varepsilon$. В силу той же первой теоремы о представлении область определения оператора $\tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon$ состоит из функций $u\in\mathfrak{D}(\mathfrak{h}^\varepsilon)$, для которых выполнено равенство

$$\mathfrak{h}^\varepsilon(u,v)=(h,v)_{L_2(0,1)}\qquad\text{для всех}\qquad v\in\mathfrak{D}(\mathfrak{h}^\varepsilon)\tag{3.1}$$

с некоторой функцией $h\in L_2(0,1)$. Отсюда немедленно следует, что функция u является обобщенным решением краевой задачи

$$\begin{gathered}-u''=\widetilde{h}\quad\text{на}\quad(0,1),\qquad u(0)=u'(1)=0,\\ \widetilde{h}:=h-a\mathcal{R}\mathcal{T}^\varepsilon\mathcal{L}u+au\in L_2(0,1),\end{gathered}$$

и в силу стандартных теорем о повышении гладкости мы видим, что $u\in\mathfrak{D}(\mathcal{H}^\varepsilon)$. Поэтому $\mathfrak{D}(\tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon)\subseteq\mathfrak{D}(\mathcal{H}^\varepsilon)$ и оператор $\tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon$ очевидно является продолжением оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$. Для всех $u\in\mathfrak{D}(\mathcal{H}^\varepsilon)$, $v\in\mathfrak{D}(\mathfrak{h}^\varepsilon)$ интегрированием по частям проверяется равенство

$$(\mathcal{H}^\varepsilon u,v)_{L_2(0,1)}=\mathfrak{h}^\varepsilon(u,v),$$

откуда немедленно следует, что оператор $\mathcal{H}^\varepsilon$ является продолжением оператора $\tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon$. Следовательно, форма $\mathfrak{h}^\varepsilon$ соответствует оператору $\mathcal{H}^\varepsilon$, и верны утверждения теоремы о m–секториальности оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ и о положении его спектра.

Непосредственно из определения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ и компактности вложения пространства $W_2^1(0,1)$ в $L_2(0,1)$ следует, что резольвента оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ компактна, а потому его спектр состоит из счетного числа изолированных собственных значений, которые могут накапливаться только к бесконечности.

Оставшиеся утверждения теоремы следует из общих результатов теорем 4, 5 работы [19], примененной к оператору $\mathcal{H}^\varepsilon$. Теорема 2.1 доказана.

4. Трансцендентное уравнение для собственных значений

В настоящем параграфе мы начинаем доказательство теоремы 2.2. Пусть λ — собственное значение оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$. Тогда соответствующая нормированная в $L_2(0,1)$ собственная функция ψ должна удовлетворять интегральному тождеству, а именно,

$$\lambda=\mathfrak{h}^\varepsilon(\psi,\psi)=\|\psi'\|^2_{L_2(0,1)}+a(\mathcal{R}\mathcal{T}^\varepsilon\mathcal{L}\psi-\psi,\psi)_{L_2(0,1)}.$$

Взяв реальную и мнимые части данного равенства, с учетом нормировки функции ψ сразу получаем априорные оценки

$$\operatorname{Re}\lambda\geqslant -c_1,\qquad|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant c_1,\tag{4.1}$$

где c_1 — некоторая положительная константа, не зависящая от ε и λ. Поэтому все собственные значения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ лежат в некоторой фиксированной полуполосе вдоль вещественной полуоси.

Согласно теореме 2.1, собственные значения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$, расположенные в фиксированном круге на комплексной плоскости, сходятся к собственным значениям оператора $\mathcal{H}$, которые находятся явно и имеют вид $\lambda_n^0 := \varkappa_n^2$. Поэтому с учётом оценки (4.1) собственные значения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ будем искать в виде

$$\lambda = k^2, \tag{4.2}$$

где $k \in \mathbb{C}$ — новый комплексный параметр, меняющийся по области

$$\Omega := \left\{ k \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} k \geqslant \frac{\pi}{8}, \ |\operatorname{Im} k| \leqslant \frac{c_2}{\operatorname{Re} k} \right\},$$

с некоторой положительной константой c_2, не зависящей от k и ε.

В силу определения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ уравнение на собственные значения $\mathcal{H}^\varepsilon\psi = \lambda\psi$ со спектральным параметром, заданным формулой (4.2), эквивалентно краевым задачам

$$\begin{aligned}
&-\psi''(x) + a\big(\psi(x+\varepsilon) - \psi(x)\big) - k^2\psi(x) = 0, && x \in (0, 1-\varepsilon),\\
&-\psi''(x) - (k^2 + a)\psi(x) = 0, && x \in (1-\varepsilon, 1),\\
&\psi(0) = 0, \qquad \psi'(1) = 0, \qquad [\psi]_{1-\varepsilon} = 0, && [\psi']_{1-\varepsilon} = 0,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

при $\varepsilon > 0$ и

$$\begin{aligned}
&-\psi''(x) - (k^2 + a)\psi(x) = 0, && x \in (0, |\varepsilon|),\\
&-\psi''(x) + a\big(\psi(x+\varepsilon) - \psi(x)\big) - k^2\psi(x) = 0, && x \in (|\varepsilon|, 1),\\
&\psi(0) = 0, \qquad \psi'(1) = 0, \qquad [\psi]_{|\varepsilon|} = 0, && [\psi']_{|\varepsilon|} = 0,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

при $\varepsilon < 0$. Здесь $[u]_{x_0}$ — скачок функции u в точке $x = x_0$:

$$[u]_{x_0} := u(x_0 + 0) - u(x_0 - 0).$$

Решение такой пары краевых задач будем отдельно искать на интервалах $(0, 1-\varepsilon)$, $(1-\varepsilon, 1)$ и $(0, |\varepsilon|)$, $(|\varepsilon|, 1)$ с учётом краевых условий в точках $x = 0$ и $x = 1$. Затем полученные решения подставим в условия сопряжения в точках $x = 1-\varepsilon$ и соответственно $x = |\varepsilon|$, что в итоге даст трансцендентное уравнение для k.

Для построения решения нелокальных уравнений на интервалах $(0, 1-\varepsilon)$ и $(0, |\varepsilon|)$ в краевых задачах (4.3), (4.4) рассмотрим вспомогательное нелокальное уравнение на оси:

$$-y''(x) + a\big(y(x+\varepsilon) - y(x)\big) - k^2 y(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Его частное решение будем искать в виде

$$y(x) = e^{\mathrm{i}\tau x}. \tag{4.6}$$

Тогда для τ сразу получаем характеристическое уравнение

$$\tau^2 + a(e^{\mathrm{i}\tau\varepsilon} - 1) - k^2 = 0. \tag{4.7}$$

В левой части данного уравнения стоит целая функция, которая имеет экспоненциальный тип при $\varepsilon \neq 0$, $a \neq 0$. Функция $\tau \mapsto e^{\mathrm{i}\tau\varepsilon} - 1$ имеет бесконечно много нулей, поэтому тоже верно и для функции в левой части уравнения (4.7). Тем самым уравнение (4.5) имеет *бесконечно много линейно независимых* решений вида (4.6) лишь только $\varepsilon \neq 0$. Из такого множества нулей далее мы будем использовать только определенную пару, существование которой описывает следующая лемма.

Обозначим:

$$\begin{aligned} &\Omega := \left\{ k\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re} k \geqslant \frac{\pi}{8},\ |\operatorname{Im} k| \leqslant \frac{c_2}{\operatorname{Re} k}\right\},\\ &\Omega_0 := \left\{ k\in\mathbb{C}:\ \frac{\pi}{8} \leqslant \operatorname{Re} k \leqslant R_1+\frac{\pi}{3},\ |\operatorname{Im} k| \leqslant \frac{c_2}{\operatorname{Re} k}\right\},\\ &\Omega_1 := \left\{ k\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re} k \geqslant R_1,\ |\operatorname{Im} k| \leqslant \frac{c_2}{\operatorname{Re} k}\right\}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

где константа R_1 достаточно большая, фиксирована и не зависит от ε. Пусть $B_r(k)$ — открытый круг радиуса r с центром в точке k.

Лемма 4.1. *Для достаточно большого фиксированного R_1 существуют фиксированные числа $R_2\in(R_1-1,R_1)$ и c_3, не зависящие от ε, такие, что для всех $k\in\Omega$ множества*

$$\Pi_\pm := \big\{\tau\in\mathbb{C}:\ |\operatorname{Im}\tau|\leqslant c_3,\ \pm\operatorname{Re}\tau > R_2\big\}$$

содержат ровно по одному корню $\tau^\pm=\tau^\pm(\varepsilon,k)$ уравнения (4.7) и для этих корней верны оценки

$$|\tau^\pm \mp k| \leqslant r, \tag{4.9}$$

где r — достаточно малое число, не зависящее от k и ε. Корни $\tau^\pm$ голоморфны по $k\in\Omega$ для каждого достаточного малого ε.

Доказательство. При $\tau\in\overline{\Pi_+}$, $k\in\overline{\Omega}$ и достаточно малых ε верны оценки

$$|\tau^2-k^2| \geqslant |\tau-k|\operatorname{Re}(\tau+k) \geqslant 2R_2|\tau-k|, \qquad |a(e^{\mathrm{i}\tau\varepsilon}-1)| \leqslant |a|(1+e^{c_3\varepsilon}) \leqslant 3|a|. \tag{4.10}$$

Выберем R_2 достаточно большим и ещё одно число $r>0$ достаточно малым, но фиксированным так, чтобы гарантировать неравенство и вложения

$$2R_2 > 3|a|r+1, \qquad \overline{B_r(k)}\subset\Pi_+, \qquad k\in\overline{\Omega}. \tag{4.11}$$

Ясно, что такой выбор возможен. Тогда из этих оценок сразу следует, что

$$|\tau^2-k^2| > |a(e^{\mathrm{i}\tau\varepsilon}-1)| \quad \text{при} \quad \tau\in\overline{\Pi_+}\setminus B_r(k).$$

Следовательно, уравнение (4.7) не имеет корней в $\tau\in\overline{\Pi_+}\setminus B_r(k)$, а применение теоремы Руше сразу гарантирует, что уравнение (4.7) содержит в $B_r(k)$ столько же нулей с учетом кратности, сколько и функция $\tau\mapsto\tau^2-k^2$, то есть, ровно один корень. Данный корень обозначим через $\tau^+(\varepsilon,k)$ и так как он принадлежит кругу $B_r(k)$, для него верна оценка (4.9).

Если параметр τ меняется по области Π_-, то $-\tau\in\Pi_+$. Замена τ на $-\tau$ переводит уравнение (4.7) в похожее:

$$\tau^2 + a(e^{-\mathrm{i}\tau\varepsilon}-1) - k^2 = 0, \qquad \tau\in\Pi_+, \qquad k\in\Omega. \tag{4.12}$$

Это уравнение исследуется совершенно аналогично тому, как этом было сделано выше, и оно тоже имеет ровно один корень в Π_+. Возвращаясь обратно в область Π_-, заключаем, что в этой области имеется ровно один корень $\tau^-(\varepsilon,k)$ уравнения (4.7), и для него верна оценка (4.9).

Применение теоремы о неявной функции [21, Thm. 1.3.5, Rem. 1.3.6] к уравнению (4.7) сразу показывает, что корни $\tau^\pm$ голоморфны по k для каждого достаточно малого значения ε. Лемма доказана. □

Лемма 4.2. *Для каждого фиксированного R_1 при $k\in\Omega_0$ и достаточно малых комплексных ε уравнение (4.7) имеет ровно по одному корню $\tau^\pm=\tau^\pm(\varepsilon,k)$ в кругах $B_{\frac{\pi}{8}}(\pm k)$. Эти корни голоморфны по ε и k.*

Доказательство. Множество Ω_0 ограничено, поэтому при $k\in\Omega_0$ мы можем сразу применять теорему о неявной функции [21, Thm. 1.3.5, Rem. 1.3.6] к уравнению (4.7), откуда и следует утверждение леммы. $\square$

Построим теперь решения уравнений в (4.3), (4.4), удовлетворяющие краевым условиям в точках $x=0$ и $x=1$. Решение уравнения в (4.3) на интервале $(0,1-\varepsilon)$, удовлетворяющее требуемому условию Дирихле в точке $x=0$ будем строить в виде

$$\psi(x)=C_1\big(e^{\mathrm{i}\tau^+(\varepsilon,k)x}-e^{\mathrm{i}\tau^-(\varepsilon,k)x}\big),\qquad x\in(0,1-\varepsilon),\tag{4.13}$$

где $\tau^\pm=\tau^\pm(\varepsilon,k)$ — найденные в лемме 4.1 корни уравнения (4.7), а C_1 — произвольная константа. Общее решение уравнения в (4.3) на интервале $(1-\varepsilon,1)$, удовлетворяющее условию Неймана в точке $x=1$, очевидно имеет вид

$$\psi(x)=C_2\cos\sqrt{k^2+a}(x-1),\qquad x\in(1-\varepsilon,1),\tag{4.14}$$

где C_2 — произвольная константа, а ветвь корня выбирается из условия $\sqrt{1}=1$ с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси. При таком выборе очевидно выполнено равенство $\sqrt{k^2+a}=k\sqrt{1+ak^{-2}}$.

Найденные решения должны удовлетворять условиям сопряжения в точке $x=1-\varepsilon$, указанным в задаче (4.3), что дает систему линейных уравнений для констант C_1 и C_2

$$\begin{aligned}&C_1\big(e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^+}-e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^-}\big)-C_2\cos\sqrt{k^2+a}\varepsilon=0,\\&C_1\mathrm{i}\big(\tau^+e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^+}-\tau^-e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^-}\big)-C_2\sqrt{k^2+a}\sin\sqrt{k^2+a}\varepsilon=0.\end{aligned}\tag{4.15}$$

По теореме Крамера эта система имеет нетривиальное решение и, соответственно, краевая задача (4.3) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда параметр k удовлетворяет уравнению

$$\big(e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^+}-e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^-}\big)\sqrt{k^2+a}\sin\sqrt{k^2+a}\varepsilon-\mathrm{i}\big(\tau^+e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^+}-\tau^-e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^-}\big)\cos\sqrt{k^2+a}\varepsilon=0,$$

которое нам удобно будет переписать в виде

$$\big(e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^+}-e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^-}\big)\sin\sqrt{k^2+a}\varepsilon-\mathrm{i}\big(\tau^+e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^+}-\tau^-e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^-}\big)\frac{\cos\sqrt{k^2+a}\varepsilon}{\sqrt{k^2+a}}=0.\tag{4.16}$$

Это и есть требуемое трансцендентное уравнение для параметра k, определяющее собственные значения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ в случае $\varepsilon>0$.

Аналогично строим решения уравнения в задаче (4.4), удовлетворяющие тем же краевым условиям в точках $x=0$ и $x=1$. Имеем:

$$\begin{aligned}&\psi(x)=C_1\sin\sqrt{k^2+a}x, && x\in(0,|\varepsilon|),\\&\psi(x)=C_2\sqrt{k^2+a}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\tau^+(\varepsilon,k)(x-1)}}{\tau^+(\varepsilon,k)}-\frac{e^{\mathrm{i}\tau^-(\varepsilon,k)(x-1)}}{\tau^-(\varepsilon,k)}\right), && x\in(|\varepsilon|,1).\end{aligned}\tag{4.17}$$

Условия сопряжения в точке $x=|\varepsilon|=-\varepsilon$ дают:

$$\begin{aligned}&C_1\sin\sqrt{k^2+a}\varepsilon+C_2\sqrt{k^2+a}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}\tau^+(\varepsilon,k)(1+\varepsilon)}}{\tau^+(\varepsilon,k)}-\frac{e^{-\mathrm{i}\tau^-(\varepsilon,k)(1+\varepsilon)}}{\tau^-(\varepsilon,k)}\right)=0,\\&C_1\cos\sqrt{k^2+a}\varepsilon-\mathrm{i}C_2\big(e^{-\mathrm{i}\tau^+(\varepsilon,k)(1+\varepsilon)}-e^{-\mathrm{i}\tau^-(\varepsilon,k)(1+\varepsilon)}\big)=0.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Применение теоремы Крамера приводит к уравнению для k

$$\begin{aligned}&\left(\frac{e^{-\mathrm{i}\tau^+(\varepsilon,k)(1+\varepsilon)}}{\tau^+(\varepsilon,k)}-\frac{e^{-\mathrm{i}\tau^-(\varepsilon,k)(1+\varepsilon)}}{\tau^-(\varepsilon,k)}\right)\sqrt{k^2+a}\cos\sqrt{k^2+a}\varepsilon\\&\quad+\mathrm{i}\big(e^{-\mathrm{i}\tau^+(\varepsilon,k)(1+\varepsilon)}-e^{-\mathrm{i}\tau^-(\varepsilon,k)(1+\varepsilon)}\big)\sin\sqrt{k^2+a}\varepsilon=0,\end{aligned}\tag{4.19}$$

которое определяет собственные значения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ при $\varepsilon < 0$.

Наш следующий шаг — детальное исследование полученных трансцендентных уравнений (4.16), (4.19). Это будет сделано в следующем параграфе.

5. Разрешимость трансцендентных уравнений и асимптотика корней

Для анализа разрешимости уравнений (4.16), (4.19) нам необходимо знать структуру зависимости корней $\tau^\pm(\varepsilon,k)$ уравнения (4.7) от ε и k. Мы будем отдельно рассматривать два случая: $k \in \Omega_0$ и $k \in \Omega_1$. При этом число R_1 в определении этих множеств можно выбрать сколько угодно большим (но фиксированным!), и данный выбор будет фиксирован далее.

Вначале рассмотрим случай $k \in \Omega_1$. Выберем R_1 достаточно большим, так что k также оказывается достаточно большим и опишем асимптотическое поведение $\tau^\pm(\varepsilon,k)$ при больших k.

Лемма 5.1. *Параметр R_1 в определении (4.8) множества Ω_1 можно выбрать так, что при $k \in \Omega_1$ для корней $\tau^\pm(\varepsilon,k)$ верны соотношения:*

$$\tau^\pm(\varepsilon,k) = \pm k + \frac{\xi_1^\pm(\varepsilon,k)}{k} + \frac{\xi_2^\pm(\varepsilon,k)}{k^2} + \frac{\xi_3^\pm(\varepsilon,k)}{k^3} + O(k^{-4}), \tag{5.1}$$

где оценки остатков равномерны по ε и использованы обозначения

$$\begin{gathered} \xi_1^\pm(\varepsilon,k) := \mp\frac{a}{2}(e^{\pm \mathrm{i}\varepsilon k} - 1), \qquad \xi_2^\pm(\varepsilon,k) := \mp\frac{\mathrm{i}a\varepsilon}{2} e^{\pm \mathrm{i}k\varepsilon}\xi_1^\pm(\varepsilon,k), \\ \xi_3^\pm(\varepsilon,k) := \mp\frac{(\xi_1^\pm(\varepsilon,k))^2}{4}(2 - a\varepsilon^2 e^{\pm \mathrm{i}k\varepsilon}) \mp \frac{\mathrm{i}a\varepsilon}{2} e^{\pm \mathrm{i}k\varepsilon}\xi_2^\pm(\varepsilon,k). \end{gathered} \tag{5.2}$$

Доказательство. Как было установлено в доказательстве леммы 4.1, корень τ^+ находится внутри круга радиуса r с центром в точке k. Поэтому данный корень можно представить в виде

$$\tau = k + \tau_0, \qquad |\tau_0| \leqslant r, \tag{5.3}$$

где $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon,k)$ — некоторая функция. Подставляя такое представление в уравнение (4.7), немедленно получаем уравнения для τ_0

$$2\tau_0 + \frac{\tau_0^2}{k} + \frac{a}{k}(e^{\mathrm{i}\varepsilon k} e^{\mathrm{i}\varepsilon r} - 1) = 0.$$

Ввиду априорной ограниченности τ_0, см. (5.3), и принадлежности $k \in \Omega$, из полученного уравнения сразу следует, что $|\tau_0| \leqslant Ck^{-1}$ с некоторой константой C, не зависящей от ε и k. Поэтому представление (5.3) можно уточнить:

$$\tau^+ = k + \frac{\tau_1^+}{k}, \qquad |\tau_1^+| \leqslant C. \tag{5.4}$$

Подставим теперь уточнённое представление в (4.7), тогда для τ_1^+ получим уравнение

$$2\tau_1^+ + \frac{(\tau_1^+)^2}{k^2} + a(e^{\mathrm{i}\varepsilon k} - 1) + ae^{\mathrm{i}\varepsilon k}(e^{\mathrm{i}\varepsilon \frac{\tau_1^+}{k}} - 1) = 0.$$

Из этого уравнения в силу оценки для τ_1^+ из (5.4) и очевидного неравенства

$$|ae^{\mathrm{i}\varepsilon k}(e^{\mathrm{i}\varepsilon \frac{\tau_1^+}{k}} - 1)| \leqslant C\varepsilon k^{-1}$$

с ещё одной константой C сразу следует, что

$$\tau_1^+(\varepsilon,k) = \xi_1^+(\varepsilon,k) + \frac{\tau_2^+(\varepsilon,k)}{k}, \qquad |\tau_2^+(\varepsilon,k)| \leqslant C, \tag{5.5}$$

где $\tau_2^+ = \tau_2^+(\varepsilon, k)$ — некоторая функция, а C — некоторая константа, не зависящая от ε и k. Подставим полученное представление для τ_1^+ в (5.4) и аналогично вычислениям выше выпишем уравнение для τ_2^+. Учитывая потом, что

$$e^{\mathrm{i}\varepsilon\frac{\tau_1^+}{k}} = 1 - \frac{a\varepsilon}{2k}(e^{\mathrm{i}\varepsilon k} - 1) + O(k^{-2}),$$

где оценка остатка равномерна по ε, получаем равенство

$$\tau_2^+ = \xi_2^+(\varepsilon, k) + \frac{\xi_3^+(\varepsilon, k)}{k}, \tag{5.6}$$

Подставляя это соотношение, (5.4) и (5.5) в уравнение (4.16) и выделяя в полученном равенстве члены до порядка $O(k^{-2})$ включительно, приходим к равенству

$$\tau_3^+ = \xi_3^+(\varepsilon, k) + \frac{\xi_4^+(\varepsilon, k)}{k},$$

где функция $\xi_4^+(\varepsilon, k)$ ограничена равномерно по ε и k. Подставляя это соотношение, (5.5) и (5.6) в (5.4), приходим к формуле (5.1) для τ^+. Это же равенство для τ^- доказывается аналогично. Лемма доказана. $\square$

Лемма 5.2. *Для каждого фиксированного R_1 при $k \in \Omega_0$ и достаточно малых ε первые члены рядов Тейлора корней $\tau^\pm(\varepsilon, k)$ имеют вид*

$$\tau^\pm(\varepsilon, k) = \pm k + \frac{\mathrm{i}a\varepsilon}{2} \mp \frac{a(2k^2 + a)}{8k}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \tag{5.7}$$

Доказательство. По лемме 4.2 при $k \in \Omega_0$ корни $\tau^\pm(\varepsilon, k)$ голоморфны по ε. Выпишем для них формулы Тейлора с первыми тремя членами с неопределенными коэффициентами и подставим эти формулы в уравнение (4.7). Полученное равенство разложим в ряд Тейлора до порядка $O(\varepsilon^2)$ включительно и коэффициенты при ε и ε^2 приравняем к нулю. Решая полученные уравнения, приходим к соотношениям (5.7). Лемма доказана. $\square$

Пусть $k \in \Omega_1$ и R_1 выбрано согласно лемме 5.1. Равенство (5.1) позволяет получить аналогичные представления для отдельных выражений в левой части (4.16)

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^\pm} = e^{\pm\mathrm{i}(1-\varepsilon)k}\Bigg(1 &+ \frac{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\xi_1^\pm}{k} + \frac{2\mathrm{i}(1-\varepsilon)\xi_2^\pm - (1-\varepsilon)^2(\xi_1^\pm)^2}{2k^2} \\ &+ \frac{6\mathrm{i}(1-\varepsilon)\xi_3^\pm - 6(1-\varepsilon)^2\xi_2^\pm\xi_1^\pm - \mathrm{i}(1-\varepsilon)^3(\xi_1^\pm)^3}{6k^3}\Bigg) + O(k^{-4}), \end{aligned} \tag{5.8}$$

где оценка остатка равномерна по ε. Верны также очевидные равенства:

$$\begin{aligned} &\sin\sqrt{k^2 + a\varepsilon} = \sin k\varepsilon + \frac{a\varepsilon}{2k}\cos k\varepsilon - \frac{a^2\varepsilon^2}{8k^2}\sin k\varepsilon - \frac{a^2\varepsilon(a\varepsilon^2 + 6)}{48k^3}\cos k\varepsilon + O(k^{-4}), \\ &\frac{\cos\sqrt{k^2 + a\varepsilon}}{\sqrt{k^2 + a}} = \frac{\cos k\varepsilon}{k} - \frac{a\varepsilon\sin k\varepsilon}{2k^2} - \frac{a(4 + a\varepsilon^2)\cos k\varepsilon}{8k^3} + \frac{a^2\varepsilon(a\varepsilon^2 + 18)\sin k\varepsilon}{48k^4} + O(k^{-5}), \\ &\sqrt{k^2 + a}\cos\sqrt{k^2 + a\varepsilon} = k\cos k\varepsilon - \frac{a\varepsilon}{2}\sin k\varepsilon + \frac{a(4 - a\varepsilon^2)\cos k\varepsilon}{8k} + \frac{a^2\varepsilon(a\varepsilon^2 - 6)\sin k\varepsilon}{48k^2} \\ &\qquad + \frac{a^2(a^2\varepsilon^2 - 48)}{384}\cos k\varepsilon + O(k^{-4}). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Подставим полученные соотношения в уравнение (4.16) и соберем члены до порядка $O(k^{-3})$ включительно. Тогда уравнение перепишется в виде:

$$K_0(k) + \sum_{j=1}^{4} \frac{K_j^+(\varepsilon, k)}{k^j} = 0, \tag{5.10}$$

где K_4^+ — некоторая равномерно ограниченная по ε и $k \in \overline{\Omega}$ функция, голоморфная по $k \in \Omega$ для каждого достаточно малого значения ε, а функции K_0, K_1^+, K_2^+ задаются формулами:

$$\begin{aligned}
&K_0(k) := \cos k, \qquad K_1^+(\varepsilon, k) := -\frac{a}{2}\sin k + \frac{a}{2}(1-\varepsilon)\sin k(1+\varepsilon),\\
&K_2^+(\varepsilon, k) := -\frac{a}{8}\big(1 - 2(a(1-\varepsilon^2))\cos k(1+\varepsilon) + a(1-\varepsilon^2)\cos k(1+2\varepsilon)\\
&\qquad\qquad + 2\cos k(1-\varepsilon) + a\cos k\big),\\
&K_3^+(\varepsilon, k) := \frac{a^2}{48}\Big(3(a + 2(a-1)\varepsilon - a\varepsilon^2 - 2a\varepsilon^3)\sin k(1+2\varepsilon) + 6(1-\varepsilon)\sin k(1-\varepsilon)\\
&\qquad\qquad - a(1-\varepsilon)(1+2\varepsilon)^2\sin k(1+3\varepsilon) + a\sin k\\
&\qquad\qquad - 3(a + 2 - (a-6)\varepsilon + a\varepsilon^2 + a\varepsilon^3)\sin k(1+\varepsilon)\Big).
\end{aligned}$$

Ясно, что функции K_i^+, $i = 1, 2, 3$, ограничены равномерно по $k \in \overline{\Omega}$ и достаточно малым ε.

Функция K_0 имеет нули в точках $k = \kappa_n$, $n \in \mathbb{N}$, и верны очевидные оценки

$$|K_0(k)| \geqslant C_1 \min_{n\in\mathbb{N}} |k - \kappa_n|, \qquad k \in \overline{\Omega}, \tag{5.11}$$

где C_1 — некоторая константа, не зависящая от k, выбора R_1 и n, а сам индекс n выбирается из условия $n \geqslant n_0$ с некоторым фиксированным n_0, которое обеспечивает вложение кругов $B_{\frac{\pi}{4}}(\kappa_n)$ в область Ω. Уравнение (5.10) можно переписать в виде

$$K_0^+(k) + \frac{f^+(\varepsilon, k)}{k} = 0, \qquad f^+(\varepsilon, k) := \sum_{j=1}^{4} \frac{K_j^+(\varepsilon, k)}{k^{j-1}}. \tag{5.12}$$

Функция f голоморфна по $k \in \Omega$ и ограничена равномерно по ε и k, а потому верна оценка

$$\left|\frac{f^+(\varepsilon, k)}{k}\right| \leqslant \frac{C_2}{|k|} \leqslant \frac{C_2}{R_1}, \tag{5.13}$$

где C_2 — некоторая константа, не зависящая от ε, k, и выбора R_1. Выберем число R_1 из условия

$$\frac{\pi}{4} C_1 > \frac{C_2}{R_1}.$$

Тогда из (5.11), (5.13) следует, что

$$|K_0(k)| > \left|\frac{f^+(\varepsilon, k)}{k}\right| \quad \text{при} \quad k \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{\frac{\pi}{4}}(\kappa_n). \tag{5.14}$$

Это неравенство означает, что уравнение (5.10) не имеет корней вне кругов $B_{\frac{\pi}{4}}(\kappa_n)$, $n \geqslant n_0$, и по теореме Руше имеет ровно по одному простому корню в каждом из данных кругов. Обозначим эти корни через k_n^ε.

С учетом (5.13) оценку (5.14) можно уточнить, а именно,

$$|K_0^+(k)| > \left|\frac{f^+(\varepsilon, k)}{k}\right| \quad \text{при} \quad k \in B_{\frac{C_3}{n}}(\kappa_n), \quad n \geqslant n_0, \tag{5.15}$$

с некоторой константой C_3, не зависящей от n и ε. Поэтому для корней k_n^ε верны оценки:

$$|k_n^\varepsilon - \kappa_n| \leqslant \frac{C_3}{n}. \tag{5.16}$$

В силу этого неравенства для k_n^ε справедливо представление

$$k_n^\varepsilon = \kappa_n + \frac{\xi_{n,1}^\varepsilon}{\kappa_n}, \tag{5.17}$$

где $\xi_{n,1}^\varepsilon$ — некоторые величины, ограниченные равномерно по ε и n. Подставляя данное соотношение в (5.10) и выписывая члены вплоть до порядка $O(n^{-1})$, при больших n получаем:

$$(-1)^{n+1}\xi_{n,1}^\varepsilon - \frac{(-1)^n a}{2}\big(1-(1-\varepsilon)\cos\kappa_n\varepsilon\big) + O(n^{-1}) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\xi_{n,1}^\varepsilon = \zeta_{n,1}^\varepsilon + \frac{\xi_{n,2}^\varepsilon}{\kappa_n}, \qquad \zeta_{n,1}^\varepsilon := \frac{a}{2}(1-\varepsilon)\cos\kappa_n\varepsilon - \frac{a}{2}, \tag{5.18}$$

где $\xi_{n,2}^\varepsilon$ — некоторые величины, ограниченные равномерно по ε и n. Подставим это представление в (5.17), а результат — в уравнение (5.10) и выделим затем члены до порядка $O(n^{-2})$ включительно. Это дает соотношение

$$\xi_{n,2}^\varepsilon = \zeta_{n,2} + \frac{\xi_{n,3}^\varepsilon}{\kappa_n}, \qquad \zeta_{n,2}^\varepsilon := \frac{a^2}{8}\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)\sin 2\kappa_n\varepsilon, \tag{5.19}$$

где $\xi_{n,3}^\varepsilon$ — некоторая равномерно ограниченная величина. Она определяется по такой же схеме, как и $\xi_{n,2}^\varepsilon$, и в результате рутинных технических вычислений получаем:

$$\xi_{n,3}^\varepsilon = \zeta_{n,3}^\varepsilon + O(n^{-1}), \tag{5.20}$$

где остаток равномерный по малому параметру ε, а величина $\zeta_{n,3}^\varepsilon$ задается формулой

$$\begin{aligned}\zeta_{n,3}^\varepsilon := &-\frac{3a^3\varepsilon^2}{64}(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2\cos 3\kappa_n\varepsilon - \frac{a^2\varepsilon^2}{8}\cos 2\kappa_n\varepsilon \\ &+ \frac{a^2}{64}(1-\varepsilon)(16+3a\varepsilon^2-2a\varepsilon^3-a\varepsilon^4)\cos\kappa_n\varepsilon - \frac{a^2}{8}(2-\varepsilon+\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{5.21}$$

Отсюда и из (5.17), (5.18), (5.19) окончательно получаем:

$$k_n^\varepsilon = \kappa_n + \frac{\zeta_{n,1}^\varepsilon}{\kappa_n} + \frac{\zeta_{n,2}^\varepsilon}{\kappa_n^2} + \frac{\zeta_{n,3}^\varepsilon}{\kappa_n^3} + O(n^{-4}) \tag{5.22}$$

для $\varepsilon > 0$, где оценка остатка равномерна по ε.

Исследование уравнения (4.19) проводится по такой же схеме. Равенства (5.8) здесь заменяются на

$$\begin{aligned}e^{-\mathrm{i}(1+\varepsilon)\tau^\pm} = e^{\mp\mathrm{i}(1+\varepsilon)k}\bigg(1 &- \frac{\mathrm{i}(1+\varepsilon)\xi_1^\pm}{k} - \frac{2\mathrm{i}(1+\varepsilon)\xi_2^\pm + (1+\varepsilon)^2(\xi_1^\pm)^2}{2k^2} \\ &+ \frac{\mathrm{i}(1+\varepsilon)^3(\xi_1^\pm)^3 - 6(1+\varepsilon)^2\xi_1^\pm\xi_2^\pm - \mathrm{i}(1+\varepsilon)\xi_3^\pm}{6k^3}\bigg) + O(k^{-4}),\end{aligned}$$

где оценка остатка равномерна по ε. Эти соотношения и (5.9) подставляем в уравнение (4.19) и выделяем слагаемые до порядка $O(k^{-2})$ включительно. В результате получаем аналог уравнения (5.10)

$$K_0(k) + \frac{K_1^-(\varepsilon,k)}{k} + \frac{K_2^-(\varepsilon,k)}{k^2} + \frac{K_3^-(\varepsilon,k)}{k^3} = 0, \tag{5.23}$$

где K_3^- — некоторая равномерно ограниченная по ε и $k \in \overline{\Omega}$ функция, голоморфная по $k \in \Omega$ для каждого достаточно малого значения ε, а функции K_1^- и K_2^- задаются формулами:

$$
\begin{aligned}
K_1^-(\varepsilon,k) &:= \frac{a}{2}(1+\varepsilon)\sin(1-\varepsilon)k - \frac{a}{2}\sin k,\\
K_2^-(\varepsilon,k) &:= \frac{a}{8}\big(2(a+1-\varepsilon^2)\cos k(1-\varepsilon) - a(1-\varepsilon^2)\cos k(1-2\varepsilon) - a\cos k + 2\cos k(1+\varepsilon)\big),\\
K_3^-(\varepsilon,k) &:= -\frac{a^2}{48}\Big(-(12+3a+6(1-a)\varepsilon - 3a\varepsilon^2 + 6a\varepsilon^3)\sin k(1-2\varepsilon) - 6(1+\varepsilon)\sin k(1+\varepsilon)\\
&\qquad + a(1-\varepsilon)(2\varepsilon-1)^2\sin k(1-3\varepsilon) - (a+12)\sin k\\
&\qquad + 3(a+6-(a-2)\varepsilon - a\varepsilon^2 + a\varepsilon^3)\sin k(1-\varepsilon)\Big).
\end{aligned}
$$

Вычисления соотношений (5.11)–(5.16) повторяются практически дословно и в результате вновь приходим к представлению (5.17). Подстановка этой формулы в уравнение (4.19) и выписывание членов до порядка $O(n^{-1})$ включительно дает аналог равенства (5.18)

$$
\xi_{n,1}^\varepsilon = \zeta_{n,1} + \frac{\xi_{n,2}^\varepsilon}{\pi n}, \qquad \zeta_{n,1}^\varepsilon := \frac{a}{2}(1+\varepsilon)\cos\kappa_n\varepsilon - \frac{a}{2}, \tag{5.24}
$$

где $\xi_{n,1}^\varepsilon$ — некоторые величины, ограниченные равномерно по ε и n. Дальнейшие вычисления аналогичны (5.18)–(5.20) и приводят к представлению (5.22), но уже для $\varepsilon < 0$ с оценкой остатка, равномерной по ε, и коэффициентами

$$
\begin{aligned}
\zeta_{n,2}^\varepsilon &:= \frac{a^2\varepsilon(1-\varepsilon^2)}{8}\sin 2\kappa_n\varepsilon,\\
\zeta_{n,3}^\varepsilon &:= -\frac{3a^3\varepsilon^2}{64}(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^2\cos 3\kappa_n\varepsilon - \frac{a^2\varepsilon(2+\varepsilon)}{8}\cos 2\kappa_n\varepsilon\\
&\quad + \frac{a^2}{64}(1+\varepsilon)(16+3a\varepsilon^2+2a\varepsilon^3 - a\varepsilon^4)\cos\kappa_n\varepsilon - \frac{a^2}{8}(2+3\varepsilon+\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

Из этих формул и (5.22), (4.2) вытекают асимптотики (2.8), (2.9).

Приведенные выше вычисления зафиксировали выбор достаточно большого числа R_1 в определении (4.8) множества Ω_0. Пусть теперь $k \in \Omega_1$ с тем же R_1. Уравнения (4.16) и (4.19) перепишем в виде

$$
F_+(\varepsilon,k) = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0, \qquad F_-(\varepsilon,k) = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon < 0, \tag{5.26}
$$

где обозначено:

$$
\begin{aligned}
F_+(\varepsilon,k) &:= \big(e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^+} - e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^-}\big)\sqrt{k^2+a}\sin\sqrt{k^2+a}\,\varepsilon\\
&\qquad - \mathrm{i}\big(\tau^+ e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^+} - \tau^- e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^-}\big)\cos\sqrt{k^2+a}\,\varepsilon = 0,
\end{aligned} \tag{5.27}
$$

$$
\begin{aligned}
F_-(\varepsilon,k) &:= \left(\frac{e^{-\mathrm{i}\tau^+(\varepsilon,k)(1+\varepsilon)}}{\tau^+(\varepsilon,k)} - \frac{e^{-\mathrm{i}\tau^-(\varepsilon,k)(1+\varepsilon)}}{\tau^-(\varepsilon,k)}\right)\cos\sqrt{k^2+a}\,\varepsilon\\
&\qquad + \mathrm{i}\big(e^{-\mathrm{i}\tau^+(\varepsilon,k)(1+\varepsilon)} - e^{-\mathrm{i}\tau^-(\varepsilon,k)(1+\varepsilon)}\big)\frac{\sin\sqrt{k^2+a}\,\varepsilon}{\sqrt{k^2+a}} = 0.
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

В силу леммы 4.2 функции $F_\pm(\varepsilon,k)$ голоморфны по достаточно малым комплексным ε и $k \in \Omega_0$, левые части этих уравнений представляют собой голоморфные по k и ε функции, причем

$$
F_+(\varepsilon,k) = -2\mathrm{i}k\cos k + O(\varepsilon), \qquad F_-(\varepsilon,k) = \frac{2\cos k}{k} + O(\varepsilon).
$$

Поэтому в силу теоремы о неявной функции [21, Thm. 1.3.5, Rem. 1.3.6] при достаточно малых ε уравнения (5.26) имеют ровно по одному корню k_n^ε в окрестности точек $\varkappa_n$, попадающих в область Ω_0, причем эти корни голоморфны по ε. Первые члены рядов Тейлора корней этих уравнений легко находятся аналогично доказательству леммы 5.2:

$$k_n^\varepsilon = \varkappa_n - \frac{6a\varepsilon}{\varkappa_n} + \frac{a\varepsilon^2}{4}\left(\varkappa_n + \frac{2a}{\varkappa_n} - \frac{576a}{\varkappa_n^3}\right) + O(\varepsilon^3) \tag{5.29}$$

при $\varepsilon > 0$ и

$$k_n^\varepsilon = \varkappa_n - \frac{2a\varepsilon}{\varkappa_n} + \frac{a\varepsilon^2}{8}\left(\varkappa_n + \frac{2a}{\varkappa_n} - \frac{64a}{\varkappa_n^3}\right) + O(\varepsilon^3) \tag{5.30}$$

при $\varepsilon < 0$. Отсюда следуют соотношения (2.10)–(2.12).

Приведенные вычисления не доказывают полностью теорему 2.2. Причина в том, что решения уравнения из (4.3) на интервале $(0, 1-\varepsilon)$ и уравнения из (4.4) на интервале $(|\varepsilon|, 1)$ мы ищем в виде (4.13) и (4.17), не имея утверждения о том, что это общее решение. Более того, такое утверждение просто неверно, так как перед леммой 4.1 уже отмечалось, что уравнение (4.5) имеет гораздо более богатое семейство решений. Поэтому для завершения доказательства теоремы 2.2 необходимо ещё доказать, что при достаточно больших n у оператора $\mathcal{H}^\varepsilon$ нет собственных значений, отличных от найденных выше. Для этого нам потребуется изучить поведение собственных функций, соответствующих найденным собственным значениям, что также позволит нам доказать теорему 2.4. Такое исследование будет проведено в следующем параграфе.

6. Собственные функции

Пусть k_n^ε — один из корней уравнения (4.16). Тогда система линейных уравнений (4.15) имеет нетривиальное решение. В случае достаточно больших $n \geqslant N$ из асимптотик (5.8), (5.9), (5.22), следует, что

$$\begin{aligned}
&\left(e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^+(k_n^\varepsilon,\varepsilon)} - e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^-(k_n^\varepsilon,\varepsilon)}\right) = 2(-1)^n \mathrm{i}\cos\varkappa_n\varepsilon + O(n^{-1}),\\
&\mathrm{i}\frac{\tau^+ e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^+(k_n^\varepsilon,\varepsilon)} - \tau^- e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^-(k_n^\varepsilon,\varepsilon)}}{\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2+a}} = 2(-1)^n \mathrm{i}\sin\varkappa_n\varepsilon + O(n^{-1}),\\
&\sin\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2+a}\,\varepsilon = \sin\varkappa_n\varepsilon + O(n^{-1}), \qquad \cos\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2+a}\,\varepsilon = \cos\varkappa_n\varepsilon + O(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Поэтому ранг матрицы линейной системы (4.15) равен единице и она имеет единственное линейное независимое решение. Решение этой системы порождает единственную собственную функцию $\psi_n^\varepsilon(x)$, соответствующую собственному значению λ_n^ε по формулам (4.14), (4.15).

Умножим второе уравнение системы на $\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k^2+a}}$ и сложим с первым. В полученном равенстве положим $C_2 = (-1)^n\sqrt{2}$ и выразим оттуда C_1. Тогда имеем решение

$$\begin{aligned}
C_1 =& (-1)^n\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2+a}\varepsilon}\\
&\cdot\left(\left(1-\frac{\tau^+(k_n^\varepsilon,\varepsilon)}{\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2+a}}\right)e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^+(k_n^\varepsilon,\varepsilon)} - \left(1-\frac{\tau^-(k_n^\varepsilon,\varepsilon)}{\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2+a}}\right)e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^-(k_n^\varepsilon,\varepsilon)}\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Разложения (5.8), (5.9), (5.22) позволяют получить аналогичные разложения для C_1 при $n \to +\infty$:

$$C_1 = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}a}{2\sqrt{2}\pi n}(1-\varepsilon)\sin\varkappa_n\varepsilon + O(n^{-2}), \tag{6.2}$$

где оценка остатка равномерна по ε. Подставим эту формулу и равенство $C_2 = (-1)^n$ в (4.14), (4.15), и с учётом асимптотик (5.22) с коэффициентами из (5.18), (5.19), (5.21) выпишем первые члены асимптотики собственных функций, соответствующих собственным значениям λ_n^ε. В результате технически длинных, но простых вычислений получаем:

$$\psi_n^\varepsilon(x) = \sqrt{2}\sin\varkappa_n x - \frac{a(1-\varepsilon)}{\sqrt{2}\pi n}(1-x)\cos\varkappa_n x\cos\varkappa_n\varepsilon + O(n^{-2}),$$

в норме $C^2[1-\varepsilon, 1]$ и

$$\begin{aligned}\psi_n^\varepsilon(x) = \sqrt{2}\sin\varkappa_n x + \frac{a}{2\sqrt{2}\pi n}\big(((1-\varepsilon)x - 1 + \varepsilon)\cos\varkappa_n(x-\varepsilon)\\ - (x(1+\varepsilon) - 1 + \varepsilon)\cos\varkappa_n(x+\varepsilon)\big) + O(n^{-2})\end{aligned}$$

в норме $C^2[0, 1-\varepsilon]$, где оценки остатков равномерны по ε. Отсюда уже вытекают асимптотики (2.13), (2.14).

В случае $\varepsilon < 0$ и системы (4.18) вычисления аналогичны. Ранг матрицы данной системы снова равен единице и для получения требуемого нетривиального решения мы умножаем первое уравнение на i и сложить со вторым. Затем в полученном уравнении полагаем $C_1 = \sqrt{2}$ и выражаем оттуда C_2 :

$$\begin{aligned}C_2 = &-\mathrm{i}\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2 + a\varepsilon}}\\ &\cdot\left(\left(1 - \frac{\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2 + a}}{\tau^+(k_n^\varepsilon, \varepsilon)}\right)e^{-\mathrm{i}(1+\varepsilon)\tau^+(k_n^\varepsilon,\varepsilon)} - \left(1 - \frac{\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2 + a}}{\tau^-(k_n^\varepsilon, \varepsilon)}\right)e^{-\mathrm{i}(1+\varepsilon)\tau^-(k_n^\varepsilon,\varepsilon)}\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{6.3}$$

Асимптотика такого коэффициента при $n \to +\infty$ оказывается следующей:

$$C_2 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} + \frac{(-1)^n a}{2\sqrt{2}\pi n}(1+\varepsilon)\sin\varkappa_n\varepsilon + O(n^{-2}). \tag{6.4}$$

Подставим теперь $C_1 = \sqrt{2}$ и формулу (6.3) в (4.17) и с учётом асимптотик (6.4) и (5.22) с коэффициентами из (5.24), (5.25) выпишем первые члены асимптотики собственных функций, соответствующих собственным значениям λ_n^ε. В результате получаем

$$\psi_n^\varepsilon(x) = \sqrt{2}\sin\varkappa_n x + \frac{a}{\sqrt{2}\pi n}(1+\varepsilon)x\cos\varkappa_n\varepsilon\cos\varkappa_n x + O(n^{-2}) \tag{6.5}$$

в норме $C^2[0, |\varepsilon|]$ и

$$\begin{aligned}\psi_n^\varepsilon(x) = \sqrt{2}\sin\varkappa_n x - \frac{a}{2\sqrt{2}\pi n}\big((x(1-\varepsilon) + 2\varepsilon)\cos\varkappa_n(x+\varepsilon)\\ - x(1+\varepsilon)\cos\varkappa_n(x-\varepsilon)\big) + O(n^{-2})\end{aligned} \tag{6.6}$$

в норме $C^2[|\varepsilon|, 1]$, где оценки остатков равномерны по ε. Отсюда уже вытекают асимптотики (2.13), (2.15).

Пусть теперь $n \leqslant N$. Тогда для корней k_n^ε верны разложения (5.29), (5.30) и системы (4.15), (4.18) вновь имеют по одному нетривиальному решению. Эти решения выбираем также как и выше, взяв указанные выше линейные комбинации уравнений систем (4.15), (4.18). Вместе с тем, в случае первой системы нетривиальное решение выберем, положив соответственно

$$
\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}},\\
C_2 &= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} e^{-\mathrm{i}\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2+a}\varepsilon}\Bigg(\bigg(1-\frac{\tau^+(k_n^\varepsilon,\varepsilon)}{\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2+a}}\bigg)e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^+(k_n^\varepsilon,\varepsilon)}\\
&\qquad\qquad - \bigg(1-\frac{\tau^-(k_n^\varepsilon,\varepsilon)}{\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2+a}}\bigg)e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)\tau^-(k_n^\varepsilon,\varepsilon)}\Bigg).
\end{aligned}
$$

В случае системы (4.18) полагаем

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \frac{(-1)^n\sqrt{2}k_n^\varepsilon}{\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2+a}},\\
C_1 &= \mathrm{i}C_2 e^{-\mathrm{i}\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2+a}\varepsilon}\Bigg(\bigg(1-\frac{\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2+a}}{\tau^+(k_n^\varepsilon,\varepsilon)}\bigg)e^{-\mathrm{i}(1+\varepsilon)\tau^+(k_n^\varepsilon,\varepsilon)}\\
&\qquad\qquad - \bigg(1-\frac{\sqrt{(k_n^\varepsilon)^2+a}}{\tau^-(k_n^\varepsilon,\varepsilon)}\bigg)e^{-\mathrm{i}(1+\varepsilon)\tau^-(k_n^\varepsilon,\varepsilon)}\Bigg).
\end{aligned}
$$

Подставим эти формулы в (4.13), (4.14), (4.17) и с учётом разложений (5.29) и (5.30) выпишем аналогичные разложения для собственных функций при $\varepsilon\to+0$. В результате при $\varepsilon>0$ получаем

$$
\psi_n^\varepsilon(x)=\sqrt{2}\sin\varkappa_n x-\frac{\varepsilon a x}{2\sqrt{2}\varkappa_n}\big(\pi\sin\varkappa_n x+6\cos\varkappa_n x\big)+O(\varepsilon^2)
$$

в норме $C[0,1-\varepsilon]$ и

$$
\begin{aligned}
\psi_n^\varepsilon(x) =&(-1)^n\sqrt{2}\cos\sqrt{\varkappa_n^2+a}(x-1)\\
&+(-1)^n\varepsilon a\Bigg(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{\varkappa_n^2+a}(x-1)+\frac{3\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{\varkappa_n^2+a}}\sin\sqrt{\varkappa_n^2+a}(x-1)\Bigg)+O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

в норме $C[1-\varepsilon,1]$, где оценки остатков, вообще говоря, неравномерны по ε. В случае $\varepsilon<0$ аналогичные формулы имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\psi_n^\varepsilon(x) =&\frac{\sqrt{2}\varkappa_n}{\sqrt{\varkappa_n^2+a}}\sin\sqrt{\varkappa_n^2+a}x\\
&+\sqrt{2}\varepsilon a\Bigg(\bigg(\frac{\varkappa_n}{\sqrt{\varkappa_n^2+a}}-\frac{\mathrm{i}}{\varkappa_n}-\frac{3a}{(\varkappa_n^2+a)^{\frac{3}{2}}}\bigg)\sin\sqrt{\varkappa_n^2+a}x\\
&\qquad-\frac{3a\varkappa_n}{2(\varkappa_n^2+a)}x\cos\sqrt{\varkappa_n^2+a}x\Bigg)+O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

в норме $C[0,|\varepsilon|]$ и

$$
\psi_n^\varepsilon(x)=\sqrt{2}\sin\varkappa_n x-\frac{\varepsilon a}{\sqrt{2}}\bigg(\frac{3x-2}{\varkappa_n}\cos\varkappa_n x+(x-1)\sin\varkappa_n x\bigg)+O(\varepsilon^2)
$$

в норме $C[|\varepsilon|,1]$, где оценки остатков, вообще говоря, неравномерны по ε. Полученные соотношения доказывают асимптотики (2.16)–(2.18).

Покажем теперь, что при достаточно малых ε собственные функции ψ_n^ε, $n\in\mathbb{Z}_+$, образуют базис в $L_2(0,1)$. Вначале отметим, что функции $\psi_n^0(x):=\sqrt{2}\sin\varkappa_n x$ образуют ортонормированный базис в $L_2(0,1)$. Каждую из функций $\psi_n^\varepsilon(x)$ представим в виде

$$
\psi_n^\varepsilon(x)=\psi_n^0(x)+\phi_n^\varepsilon(x), \tag{6.7}
$$

и отметим, что из асимптотик (2.13), (2.16) сразу следуют оценки:

$$\|\phi_n^\varepsilon\|_{L_2(0,1)} \leqslant \frac{c_4}{n}, \qquad n \geqslant N, \tag{6.8}$$

$$\|\phi_n^\varepsilon\|_{L_2(0,1)} \leqslant c_5|\varepsilon|^{\frac{1}{2}}, \qquad n \leqslant N. \tag{6.9}$$

Здесь выбор номера N определяется асимптотикой (2.13), а именно, это число, не зависящее от ε, такое, что при $n \geqslant N$ верны асимптотическое равенство (2.13) и оценка (6.8) с константой c_4, не зависящей от ε, n и выбора N. Зафиксировав N, далее мы выбираем достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N)$ так, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ верны асимптотики (2.16) для всех $n \leqslant N$ и оценки (6.9) с константой c_5, не зависящей от ε и n.

Так как функции ψ_n^0 образуют базис в $L_2(0,1)$, каждую из функций ϕ_n^ε можно разложить по этому базису:

$$\phi_n^\varepsilon = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^\varepsilon \psi_m^0, \qquad \alpha_{mn}^\varepsilon := (\phi_n^\varepsilon, \psi_m^0)_{L_2(0,1)}. \tag{6.10}$$

На пространстве $L_2(0,1)$ теперь введём оператор, действующий по правилу

$$\mathcal{A}u = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m^0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn}^\varepsilon u_n, \tag{6.11}$$

где коэффициенты u_n определяются из разложения функции u по базису $\{\psi_n^0\}$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \psi_n^0. \tag{6.12}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ определён корректно и при малых ε его норма мала.

Положим

$$v_m^\varepsilon := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn}^\varepsilon u_n. \tag{6.13}$$

Так как u_n и α_{mn}^ε — коэффициенты разложений функций u, $\phi_n^\varepsilon \in L_2(0,1)$ по базису $\{\psi_n^0\}$, то ряд в определении чисел v_m^ε сходится, и последовательность $\{v_m^\varepsilon\}$ корректно определена. Из неравенства Коши–Буняковского и оценок (6.8), (6.9) сразу следует неравенство

$$|v_m^\varepsilon| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{mn}^\varepsilon|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|u\|_{L_2(0,1)} \|\phi_m^\varepsilon\|_{C[0,1]} \leqslant \|u\|_{L_2(0,1)} \begin{cases} c_4 n^{-1}, & n \geqslant N, \\ c_5|\varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n \leqslant N. \end{cases}$$

Отсюда выводим

$$\sum_{m=0}^{\infty} |v_m^\varepsilon|^2 \leqslant \left(c_5^2|\varepsilon|N + c_4^2 \sum_{m=N}^{\infty} n^{-2}\right) \|u\|_{L_2(0,1)}^2. \tag{6.14}$$

Так как ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} n^{-2}$ сходится, выберем и зафиксируем достаточно большое N так, чтобы гарантировать выполнение неравенства

$$c_4^2 \sum_{n=N}^{\infty} n^{-2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Далее выберем достаточно малое ε_0 так, чтобы при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ было выполнено ещё одно неравенство

$$c_5^2|\varepsilon|N \leqslant \frac{1}{8}.$$

Тогда из этих двух неравенств и (6.14) выводим

$$\sum_{m=0}^{\infty} |v_m^{\varepsilon}|^2 \leqslant \frac{1}{4}\|u\|_{L_2(0,1)}^2.$$

Откуда и из (6.11), (6.13), сразу следует, что ряд в определении оператора $\mathcal{A}$ сходится в $L_2(0,1)$, что означает корректную определенность оператора $\mathcal{A}$, и дополнительно верна оценка

$$\|\mathcal{A}u\|_{L_2(0,1)} \leqslant \frac{1}{2}\|u\|_{L_2(0,1)}. \tag{6.15}$$

Непосредственно из определения оператора $\mathcal{A}$ и формулы (6.7) следует, что

$$\psi_n^{\varepsilon} = (\mathcal{I} + \mathcal{A})\psi_n^0,$$

где $\mathcal{I}$ — единичный оператор в $L_2(0,1)$. Оценка (6.15) позволяет утверждать существовании обратного ограниченного оператора $(\mathcal{I}+\mathcal{A})^{-1}$ на пространстве $L_2(0,1)$. Таким образом, у нас имеется ограниченный оператор, обладающий ограниченным обратным, который базис $\{\psi_n^0\}$ переводит в систему функций $\{\psi_n^{\varepsilon}\}$. Следовательно, вторая система функций также является базисом в $L_2(0,1)$. Отсюда вытекает, что оператор $\mathcal{H}^{\varepsilon}$ не может иметь никаких иных собственных функций, кроме построенных выше функций ψ_n^{ε}. Следовательно, набор собственных значений λ_n^{ε}, описанный в теореме 2.2, исчерпывает весь спектр оператора $\mathcal{H}^{\varepsilon}$. Теоремы 2.2, 2.3, 2.4 полностью доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.L. Skubachevskii. *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhäuser Verlag, Basel (1997).
2. G.A. Kamenskii. *Extrema of nonlocal functional and boundary value problems for functional differential equations*, Nova Science Publishers, New York (2007).
3. А.Л. Скубачевский. *Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения* // Усп. мат. наук **71**:5(431), 3–112 (2016).
4. В.В. Лийко, А.Л. Скубачевский. *Смешанные задачи для сильно эллиптических дифференциально–разностных уравнений в цилиндре* // Мат. заметки **107**:5, 693–716 (2020).
5. Р.Ю. Воротников, А.Л. Скубачевский. *Гладкость обобщенных собственных функций дифференциально–разностных операторов на конечном интервале* // Мат. заметки **114**:5, 679–701 (2023).
6. A.B. Muravnik. *On the Cauchy problem for differential-difference parabolic equations with high–order nonlocal terms of general kind* // Discrete Contin. Dyn. Syst. **16**, 541–561 (2006).
7. Л.Е. Россовский. *Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции* // Соврем. мат., фундам. направл. **54**, 3–138 (2014).
8. В.А. Марченко. *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения.* Киев: Наукова Думка (1977).
9. Б.М. Левитан, И.С. Саргсян *Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы.* М.: Наука (1970).
10. А.А. Шкаликов. *О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи* // Мат. заметки **62**:6, 950–953 (1997).
11. С.Н. Туманов, А.А. Шкаликов. *О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра–Зоммерфельда с профилем Пуазейля* // Изв. Росс. акад. наук, сер. мат. **66**:4, 177–204 (2002).
12. С.А. Степин. *Модель перехода от дискретного спектра к непрерывному в сингулярной теории возмущений* // Фундам. прикл. мат. **3**:4, 1199–1227 (1997).

13. C.S. Morawetz. *The eigenvalues of some stability problems involving viscosity* // J. Rat. Mech. Anal. **1**, 579–603 (1952).
14. А.В. Дьяченко, А.А. Шкаликов. *О модельной задаче для уравнения Орра–Зоммерфельда с линейным профилем* // Функц. анал. прилож. **36**:3, 71–75 (2002).
15. А.А. Шкаликов. *Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса* // Соврем. мат., фундам. направл. **3**, 89–112 (2003).
16. С.Н. Туманов, А.А. Шкаликов. *Предельный спектральный граф в квазиклассическом приближении для задачи Штурма–Лиувилля с комплексным полиномиальным потенциалом* // Докл. Акад. наук, Росс. акад. наук. **465**:6, 660–664 (2015).
17. S.N. Tumanov, A.A. Shkalikov. *Spectral portraits in the semi-classical approximation of the Sturm–Liouville problem with a complex potential* // J. Phys. Conf. Ser. **1141**, 012155 (2018).
18. Х.К. Ишкин, Р.И. Марванов. *Об условиях локализации спектра модельного оператора для уравнения Орра–Зоммерфельда* // Уфим. мат. ж. **12**:4, 66–79 (2020).
19. D.I. Borisov, D.M. Polyakov. *Resolvent convergence for differential–difference operators with small variable translations* // Mathematics. **11**:20, 4260 (2023).
20. Т. Като. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир (1972).
21. R. Narasimhan. *Analysis on real and complex manifolds.* North–Holland, Amsterdam 1985.
22. Д.И. Борисов, Д.М. Поляков. *Спектральные асимптотики для одномерного оператора Шрёдингера на отрезке со сдвигом в свободном члене и условием Дирихле* // Изв. Росс. акад. наук, сер. мат. (направлено в печать).
23. Д.И. Борисов, Д.М. Поляков *Асимптотики собственных значений оператора Шрёдингера с малым сдвигом и условием Дирихле* // Докл. Росс. Акад. наук. Мат. инф. процессы упр. **517**:3, (2024). (принята к печати.)

Денис Иванович Борисов,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `BorisovDI@yandex.ru`

Дмитрий Михайлович Поляков,
Южный математический институт — филиал
Владикавказского научного центра РАН,
ул. Ватутина, 53,
362025, г. Владикавказ, Россия
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `dmitrypolyakow@mail.ru`