ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 16. № 2 (2024). С. 37-66.

УДК 519.172.1

ИНДУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ НА ДЕРЕВЬЯХ

А.И. ПАРФЁНОВ

Аннотация. Мы изучаем неравенство Харди на не более чем счетном дереве с корнем. Главными известными критериями для него в нижнетреугольном случае являются два критерия Аркоцци, Рохберга и Сойера (2002) и емкостной критерий. В литературном обзоре показано, что эти критерии примыкают к критериям для неравенства Харди для последовательностей, для неравенства Харди на интервале вещественной оси и для следовых неравенств с потенциалами Рисса. Приведены примеры в литературе, когда следовое неравенство или иное утверждение характеризуется в терминах справедливости неравенства Харди на дереве. Мы упрощаем два известных доказательства критерия Аркоцци, Рохберга и Сойера, которые основаны на интерполяционной теореме Марцинкевича и на емкостном критерии. Мы даем новые доказательства критериев Аркоцци, Рохберга и Сойера, которые основаны на индукции по дереву, индуктивной формуле для емкости и формуле интегрирования по частям. Последнее из доказательств записано для неравенства Харди на дереве с границей и для неравенства Харди над семейством всех двоичных кубов. В диагональном случае это доказательство доставляет оптимальную постоянную p, которая совпадает с постоянной Беннетта в неравенстве Харди для последовательностей. В общем случае даны несколько новых индуктивных критериев справедливости неравенства Харди в терминах существования семейства функций, удовлетворяющих индуктивному соотношению. Один из этих критериев применен при доказательстве теоремы, содержащей дополнительные эквивалентные условия справедливости неравенства Харди на деревьях в диагональном случае.

Ключевые слова: двухвесовое неравенство, дерево с корнем, неравенство Харди.

Mathematics Subject Classification: 05C05, 31C20, 47A30

1. Введение

Пусть T — не более чем счетное дерево. Это значит, что на не более чем счетном множестве $T \neq \varnothing$ задано антирефлексивное ($x \not\sim x$) и симметричное ($x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$) отношение $\sim$ такое, что для любых $x, y \in T$ найдется единственный набор $(x_i)_{i=0}^n$ ($n \geqslant 0$) попарно различных точек в T со свойствами

$$x_0 = x \quad \& \quad x_n = y \quad \& \quad x_i \sim x_{i+1} \quad (0 \leqslant i < n).$$

Этот набор $(x_i)_{i=0}^n$ обозначается через $[x, y]$.

Выбрав в T точку o, получим дерево с корнем (T, o). Соотношение

$$x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x \in [o, y]$$

A.I. Parfenov, Inductive methods for Hardy inequality on trees.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Поступила 17 июля 2023 г.

вводит частичный порядок $\leqslant$ на T с наименьшим элементом o. Зададим оператор Харди $\mathcal{I}$ на функциях $f : T \to \mathbb{R}$ формулой

$$\mathcal{I}f(x) = \sum_{[o,x]} f = \sum_{w\in[o,x]} f(w).$$

Настоящая статья посвящена *неравенству Харди на дереве*:

$$(\exists A \geqslant 0)\ (\forall f : T \to [0,\infty)) \quad \Bigl(\sum_T u[\mathcal{I}f]^q\Bigr)^{1/q} \leqslant A\Bigl(\sum_T vf^p\Bigr)^{1/p}. \tag{1.1}$$

Оно определяется числами $1 < p < \infty$ и $1 < q < \infty$ и функциями $u : T \to [0,\infty)$ и $v : T \to (0,\infty)$. Выбор $f = \chi_{\{o\}}$ показывает, что (1.1) может выполняться лишь при

$$\sum_T u < \infty,$$

что и будет в дальнейшем всегда предполагаться. Кроме обозначений T, $x \sim y$, $[x,y]$, o, $x \leqslant y$, $\mathcal{I}f$, p, q, u и v в статье будут без специальных напоминаний применяться следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&p' = p/(p-1) \quad \text{(сопряженный показатель)},\\
&P_x = [o,x] = \bigl\{w \in T\colon w \leqslant x\bigr\} \quad \text{(предки x или сам x)},\\
&R_x = \bigl\{y \in T\colon x \sim y \ \&\ x \leqslant y\bigr\} \quad \text{(дети x)},\\
&S_x = \bigl\{y \in T\colon x \leqslant y\bigr\} \quad \text{(потомки x или сам x)},\\
&U(x) = \sum_{S_x} u, \qquad V(x) = \sum_{P_x} v^{1-p'}, \qquad B(x) = \sum_{S_x} U^{p'}v^{1-p'},\\
&C = \sup_T B^{1/p'}U^{-1/q'}, \qquad D = \sup_T U^{1/q}V^{1/p'},\\
&\mathcal{E} = \bigl\{E \subset T\colon (\forall x \in E)\ S_x \subset E\bigr\}.
\end{aligned}$$

Для множества $E \subset T$ через $E^{\min}$ обозначаем множество всех минимальных элементов в E, а через χ_E — характеристическую функцию E. Неопределенность $0 \cdot \infty$ (включая неопределенности $0/0$ и ∞/∞) трактуется как $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$, как это принято в теории неравенств Харди. В частности, $C = 0$, если $u \equiv 0$. Неравенство (1.1) будет иногда рассматриваться при $p, q \in (0,\infty)$, когда определения P_x, R_x, S_x, $U(x)$, $\mathcal{E}$, $E^{\min}$ и χ_E сохраняют смысл.

Для дерева $T = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ с отношением смежности

$$n \sim k \quad \Leftrightarrow \quad n - k = \pm 1$$

и корнем $o = 1$ неравенство (1.1) принимает вид

$$\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k\Bigr)^q\biggr)^{1/q} \leqslant A\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} v_n a_n^p\Bigr)^{1/p}, \tag{1.2}$$

где $u_n = u(n) \geqslant 0$, $v_n = v(n) > 0$, а $A \geqslant 0$ не зависит от чисел $a_n = f(n) \geqslant 0$. Неравенство (1.2) имеет непрерывный аналог

$$\biggl(\int_0^b \Bigl(\int_0^x f\,dt\Bigr)^q w_1(x)\,dx\biggr)^{1/q} \leqslant A\Bigl(\int_0^b f^p(x)w_2(x)\,dx\Bigr)^{1/p}, \tag{1.3}$$

где $0 < b \leqslant \infty$, функции w_1, w_2 и f измеримы на $(0,b)$, $w_1 \geqslant 0$, $w_2 > 0$, а число $A \geqslant 0$ не зависит от $f \geqslant 0$. Неравенства (1.2) и (1.3) часто встречаются в анализе и их теория хорошо разработана.

Оценка (1.1) наиболее изучена в нижнетреугольном случае $1 < p \leqslant q < \infty$. Главными результатами здесь являются емкостной критерий (лемма 4.3) и следующие критерии Аркоцци, Рохберга и Сойера:

$$\text{если } 1 < p \leqslant q < \infty, \text{ то } (1.1) \Leftrightarrow C < \infty; \tag{1.4a}$$

$$\text{если } 1 < p < q < \infty, \text{ то } (1.1) \Leftrightarrow D < \infty. \tag{1.4b}$$

Критерий для $p = q$ и двоичного дерева T из работы автора [1] можно считать мультипликативной формой критерия (1.4a). Критерий (1.4a) впервые доказан в [2, теорема 3] с помощью оценивания функции распределения

$$t \mapsto \sum_{\{\mathcal{I}f > t\}} u$$

функции $\mathcal{I}f$ в стиле так называемых неравенств с хорошим λ (англ. good-λ inequalities). Позже эти же авторы дали для случая $p = q$ и дерева с границей $T \cup \partial T$ более простые выводы с участием интерполяционной теоремы Марцинкевича (см. [3, § 3], [4, 5.4.1]) и емкостного критерия [4, теорема 43]. В работе [5] критерий (1.4a) для $p = q = 2$, $v \equiv 1$ и одномерного двоичного дерева T передоказан с помощью метода функций Беллмана. Критерий (1.4b) впервые доказан в [2, теорема 4] сведением к критерию (1.4a) с помощью неравенства с хорошим λ. Критерий (1.4b) передоказан в препринте [6] с привлечением работы [7].

Автору неизвестно убедительное сопоставление описанных результатов с предшествующими результатами. В работах [6]–[8] и книге [9] емкостной критерий приводится без терминологии емкостей и без упоминания емкостных критериев для следовых неравенств. Неравенство (1.1) для $p = q$ и двоичного дерева T использовалось в ряде работ автора (см. [1], [10], [11] и библиографию в [11]) под названием «дискретное весовое неравенство», однако оно никогда не рассматривалось в общем контексте деревьев. Комментарии насчет емкостного критерия и критериев (1.4) в работах [2], [4], [12] более удовлетворительны, однако они смещены в сторону теории пространств аналитических функций и, на наш взгляд, должны быть дополнены, что и является первой целью статьи.

Вторая цель статьи заключается в том, чтобы опробовать метод индукции по дереву применительно к неравенству Харди (1.1). В этом методе сначала формулируется зависящее от $x \in T$ утверждение, относящееся к дереву с корнем (S_x, x) и при $x = o$ совпадающее с требуемым результатом, после чего в этом утверждении проводится индукция по убыванию длины цепочки $[o, x]$. База индукции состоит в том, что утверждение верно для достаточно длинных цепочек $[o, x]$, что обеспечивается какой-либо аппроксимацией исходной задачи. Индуктивный переход показывает, что обсуждаемое утверждение верно для x, если оно верно для всех элементов множества R_x. Индуктивный переход обычно опирается на легко проверяемое равенство

$$S_x = \{x\} \cup \bigcup_{y \in R_x} S_y \quad \text{(объединения дизъюнктные).}$$

Например, рассуждения с функциями Беллмана в [13, § 1] можно записать в индуктивной форме. А.А. Васильева в [7] применительно к (1.1) использовала индукцию по дереву в сочетании с индуктивной формулой для емкости из [8] (формула (4.4) ниже).

Третья цель статьи в том, чтобы дать новые доказательства критериев (1.4). Надеемся, что это улучшает связность теории неравенств Харди и может оказаться полезным в близких ситуациях. В качестве примера таких близких ситуаций укажем неравенство Харди на декартовых произведениях одномерных двоичных деревьев [12], [14], которые не являются деревьями.

Строго верхнетреугольный случай $1 < q < p < \infty$ в статье не изучается из-за его выраженной специфики, потребовавшей бы отдельного исследования. В этом случае критерии справедливости неравенств (1.1)–(1.3) и следовых неравенств обычно имеют вид сходимости ряда или интеграла (а не конечности некоторого супремума, как в критериях (1.4)) и часто допускают обобщение на случай $p > 1$, $0 < q < p$, см. [15, теорема 1] и публикации [16]–[20].

Структура работы такова. В § 2 описаны критерии для неравенств (1.2), (1.3) и следовых неравенств, примыкающие к емкостному критерию и критериям (1.4). В § 3 доказаны три индуктивных критерия справедливости неравенства (1.1), после чего установлена теорема о диагональном случае $p = q$. Теорема утверждает равносильность неравенства (1.1), условия из работы [1] (в упрощенной форме), условия $C < \infty$ и нового условия индуктивного типа. В § 4 упрощены два известных доказательства критерия (1.4a) и даны новые доказательства критериев (1.4); иногда приводятся и простые известные выкладки. В заключительном § 5 доказаны варианты критериев (1.4) для дерева с границей $T \cup \partial T$ и для двоичного семейства $\mathcal{D}$, а также установлена пара утверждений из § 2.

2. О критериях, примыкающих к емкостному критерию и критериям Аркоцци–Рохберга–Сойера

Сначала кратко обрисуем историю неравенств Харди (1.2) и (1.3) в нижнетреугольном случае $p \leqslant q$. Подробное изложение имеется в книге [19].

Простейшее неравенство Харди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant A^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

следует из обратного неравенства Гёльдера и неравенства Гильберта (1906), которое утверждает ограниченность в пространстве последовательностей ℓ_2 квадратичной формы с матрицей $\left(\frac{1}{n+k}\right)_{n,k=1}^{\infty}$. Длинная история независимого вывода этого неравенства с оптимальной постоянной приведена в приложении к [19]. В классической книге [21] получены частные случаи неравенства (1.2) (теоремы 326 и 339) и неравенства (1.3) (теоремы 327, 330 и 340).

Проблему характеризации пар функций (w_1, w_2) со свойством (1.3) в нижнетреугольном случае $1 < p \leqslant q < \infty$ решает критерий

$$(1.3) \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{r\in(0,b)} \left(\int_r^b w_1(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_0^r w_2^{1-p'}(x)\,dx\right)^{1/p'} < \infty. \tag{2.1}$$

Для $p = q = 2$ и $w_2 \equiv 1$ этот критерий доказан в [22], а для $p = q$ — в [23], [24] и еще ряде опубликованных и неопубликованных работ примерно в то же самое время, см. [19, гл. 4]. В полной общности критерий (2.1) доказан Уолшем [25], причем постановка задачи охватывает оба неравенства (1.2) и (1.3). Уолш представил ядро $\chi_{\{x>t\}}$ оператора Харди как произведение двух ядер и применил вариант леммы Шура. Аналог (2.1) для неравенства (1.2) имеет вид

$$(1.2) \quad \Leftrightarrow \quad D = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{1/p'} < \infty. \tag{2.2}$$

Критерии (2.1) и (2.2) передоказывались рядом авторов.

Со временем обнаружились иные эквивалентные условия справедливости неравенств (1.2) и (1.3). Например, в [26] содержится следующий критерий:

$$(1.2) \quad \Leftrightarrow \quad C < \infty \quad \Leftrightarrow \quad D < \infty \quad \Leftrightarrow \quad D_1 < \infty, \tag{2.3}$$

$$D_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k V^q(k) \right)^{1/q} V^{-1/p}(n) \quad \text{для} \quad V(n) = \sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}.$$

Для неравенства (1.3) с $p = q$ аналоги условий $C < \infty$ и $D_1 < \infty$ использовались в работах [27] и [24] соответственно.

Что касается собственно неравенства Харди на дереве (1.1), то оно обычно косвенно или явно возникает в связи с дискретизацией вложения пространства Соболева (или сходного пространства аналитических функций) в весовое пространство L_q. По мере развития теории таких вложений, с одной стороны, появлялись критерии, похожие на критерии справедливости неравенства (1.1), а с другой стороны, появлялись теоремы, в которые (1.1) входит явно. Разберем эти два аспекта в нижнетреугольном случае.

1) Рассмотрим модельные вложения вышеупомянутого типа (называемые следовыми неравенствами):

$$(\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \, d\mu \right)^{1/q} \leqslant A_0 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_l u|^p \, dx \right)^{1/p}, \tag{2.4}$$

$$(\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_l f|^q \, d\mu \right)^{1/q} \leqslant A_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx \right)^{1/p}. \tag{2.5}$$

Здесь $n \geqslant 2$, μ — мера в $\mathbb{R}^n$ (неотрицательная счетно-аддитивная функция на борелевской σ-алгебре, конечная на компактах), A_i — постоянные, $l \in [1, n/p)$ целое, $\nabla_l u$ — совокупность всех частных производных функции u порядка l, dx — мера Лебега,

$$I_l f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{l-n} f(y) \, dy \quad \text{(потенциал Рисса)}.$$

В (2.5) подразумевается, что для любого $0 \leqslant f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ интеграл $I_l f$ сходится почти всюду относительно меры μ, что позволяет задать I_l на $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Из интегрального представления Соболева [20, с. 19] следует импликация (2.5) $\Rightarrow$ (2.4). Обратную импликацию можно доказать с привлечением плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $L_p(\mathbb{R}^n)$, гладкой срезки и теоремы Михлина о мультипликаторах Фурье [20, с. 516], поэтому будем рассматривать следовое неравенство (2.5), для общности считая, что $n \geqslant 1$, а число $l \in (0, n/p)$ вещественно.

В 60-х и 70-х годах XX века Мазья, Адамс и Дальберг установили, что условие (2.5) равносильно любому из следующих условий:

$$(\forall K) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} (I_l \mu_K)^{p'} \, dx \right)^{1/p'} \leqslant A_2 \mu(K)^{1/q'}, \tag{2.6}$$

$$(\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)) \quad \sup_{t>0} t\mu(\{x \colon |I_l f(x)| \geqslant t\})^{1/q} \leqslant A_3 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx \right)^{1/p}, \tag{2.7}$$

$$(\forall K) \quad \mu(K)^{1/q} \leqslant A_4 \left(\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f^p \, dx \colon f \geqslant 0 \;\&\; (I_l f)\big|_K \geqslant 1 \right\} \right)^{1/p}, \tag{2.8}$$

см. теорему 7.2.1 в [28]. Здесь K — компакт в $\mathbb{R}^n$, $\mu_K(X) = \mu(K \cap X)$ и

$$I_l \mu_K(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{l-n} \, d\mu_K(y).$$

Инфимум в (2.8) называется емкостью множества K, а критерий (2.5) $\Leftrightarrow$ (2.8) аналогичен емкостному критерию из леммы 4.3. При $p < q$ в (2.8) можно ограничиться замкнутыми шарами K по теореме Адамса ([20, с. 64] или [28, с. 193]), что аналогично критерию (1.4b).

Результаты предыдущего абзаца были применены в работе [29] для емкостной характеризации вложения пространства Дирихле в круге $|z| < 1$ в пространство $L_2(\mu)$ и для описания мультипликаторов пространства Дирихле.

В 80-х и 90-х годах XX века появились новые критерии справедливости условий (2.5)–(2.8) в сложном случае $p = q$. В работе Кермана и Сойера [30] показано, что в условии (2.6) можно ограничиться шарами K. В [16, § 2] воспроизведено доказательство из [28] эквивалентности условий (2.5)–(2.8) (при $p = q$), а также дан более простой, чем в [31], вывод равносильности условий (2.5)–(2.8) и любого из следующих условий:

$$\int_K (I_l\mu_K)^{p'}\,dx \leqslant A_5^{p'}\mu(K) \qquad \text{для любого шара } K, \tag{2.9}$$

$$I_l[(I_l\mu)^{p'}] \leqslant A_6^{p'} I_l\mu < \infty \qquad \text{почти всюду в } (\mathbb{R}^n, dx), \tag{2.10}$$

$$\text{условие (2.5) верно для меры } (I_l\mu)^{p'}dx \text{ вместо } d\mu. \tag{2.11}$$

См. также [20, § 11.5]. В [16, § 3] с помощью неравенства Вольфа показано, что условия (2.5)–(2.11) равносильны оценке

$$\sum_{Q\in\mathcal{D}\colon Q\subset P} \mu(Q)^{p'}\ell_Q^{p'(l-n)+n} \leqslant A_7^{p'}\mu(P) \quad \text{для любого куба } P \in \mathcal{D}. \tag{2.12}$$

Здесь $\mathcal{D}$ — семейство всех двоичных кубов в $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{D} = \bigl\{Q \subset \mathbb{R}^n \colon Q = [0, 2^a)^n + 2^a\vec{a} \text{ для некоторых } a \in \mathbb{Z} \text{ и } \vec{a} \in \mathbb{Z}^n\bigr\},$$

а $\ell_Q = 2^a$ — длина ребра куба Q.

В § 5 будет показано, что при $\operatorname{supp}\mu \subset K \in \mathcal{D}$ условие (2.12) является аналогом условия $C\big|_{p=q} < \infty$ для одного неравенства Харди на дереве с границей $T \cup \partial T$ для $T = \mathcal{D}(K)$, где

$$\mathcal{D}(K) = \bigl\{Q \in \mathcal{D}\colon Q \subset o = K\bigr\} \tag{2.13}$$

и $Q_1 \leqslant Q_2 \Leftrightarrow Q_1 \supset Q_2$, откуда (2.5) и (2.12) равносильны и самому этому неравенству Харди. Аналогично, для общих μ условия (2.5) и (2.12) равносильны некоторому неравенству Харди на $\mathcal{D}$. Таким образом, близкими предшественниками критериев (1.4) Аркоцци–Рохберга–Сойера можно считать критерий (2.3), теорему Адамса и равносильность между (2.5) и группой похожих условий: (2.6), условие Кермана–Сойера, (2.9), (2.10) и (2.12).

2) Автору известны следующие ситуации, в которых неравенство Харди на дереве возникало в исследованиях явным образом, причем не само по себе, а в составе некоторых критериев.

2a) В [4, замечание 35] для потенциала Рисса на ограниченном регулярном по Альфорсу метрическом пространстве X высказан аналог утверждения несколькими строками выше о равносильности следового неравенства и неравенства Харди на $T \cup \partial T$. В качестве T берется двоичное разложение пространства X из [32], аналогичное семейству $\mathcal{D}(K)$ для случая $X = K \in \mathcal{D}$.

2b) В [2, предложение 5], [3, теоремы 20 и 23] и [17, теорема 2.5] установлена равносильность между некоторыми неравенствами Харди и вложениями пространств аналитических функций в пространства $L_q(\mu)$ (такие меры μ называются карлесоновскими). В препринте [12] имеется сходное утверждение о равносильности между карлесоновостью меры для пространства Дирихле в бикруге и неравенством Харди на произведении $\mathcal{D}([0, 1)) \times \mathcal{D}([0, 1))$.

2c) В теореме 5.4.6 из [9] для областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ класса GRD, характеризующихся наличием у области дерева-«остова», получена равносильность между вложением $W^1(X(\Omega), Y(\Omega)) \subset Z(\Omega)$ и соответствующим вложением типа неравенства Харди на дереве. Здесь $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ и $Z(\Omega)$ — банаховы функциональные пространства с определенными свойствами, а $W^1(X(\Omega), Y(\Omega))$ — обобщение пространства Соболева $W^1_p(\Omega)$. В используемых деревьях смежные вершины ($x \sim y$) считаются соединенными отрезком, что позволяет рассматривать на таких деревьях дифференциальные уравнения [33]. Такие деревья обычно называют деревьями, метрическими деревьями или геометрическими деревьями.

2d) В ряде работ автора (см. библиографию в [11]) получена равносильность между неравенством Харди и несколькими свойствами, связанными с распрямлением липшицевых областей. В качестве примера укажем [1, теорема 19(iii)], [10, теорема 22] и [11, теорема 5]. В [1] неравенство Харди бралось над деревом $T = \mathcal{D}([0,1)^n)$, а неравенства Харди из [10], [11] эквивалентны серии неравенств Харди над деревьями $T = \mathcal{D}([0,1)^n + \vec{a})$, $\vec{a} \in \mathbb{Z}^n$.

3. Индуктивные критерии и диагональный случай

Выведем три теоремы, в которых показана эквивалентность неравенства (1.1) существованию семейства функций $Q_x(r,s)$ ($x \in T$), удовлетворяющих индуктивному условию. Как и в методе функций Беллмана [13] (которые не зависят от x), эквивалентность является почти тавтологической, а трудность применения теорем состоит в построении таких семейств. Каждую из теорем предваряет соответствующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть $E \subset T$. Тогда множества S_x ($x \in E^{\min}$) попарно не пересекаются и имеет место равенство*

$$E = \bigcup_{x \in E^{\min}} (S_x \cap E) \quad (\textit{объединение дизъюнктное}). \tag{3.1}$$

Для любого $x \in T$

$$S_x = \{x\} \cup \bigcup_{y \in R_x} S_y \quad (\textit{объединения дизъюнктные}). \tag{3.2}$$

Доказательство. От противного: допустим, что $y \in S_{x_1} \cap S_{x_2}$, где $x_1, x_2 \in E^{\min}$ и $x_1 \neq x_2$. Тогда $x_1, x_2 \in [o, y]$, откуда либо $x_1 \leqslant x_2$, либо $x_2 \leqslant x_1$. Ввиду $x_1 \neq x_2$ первое противоречит минимальности элемента x_2, а второе — минимальности элемента x_1.

Для проверки (3.1) осталось заметить, что при $y \in E$ наименьший элемент x множества $[o, y] \cap E$ принадлежит к $E^{\min}$ и $y \in S_x \cap E$.

Пусть $x, y \in T$ и $[o, y] = (y_i)_{i=0}^n$. Очевидно, что условие $y \in (S_x \setminus \{x\})^{\min}$ равносильно условию $n \neq 0$ & $x = y_{n-1}$, которое равносильно условию $y \in R_x$. Поэтому соотношение (3.2) вытекает из (3.1). □

Теорема 3.1. *Пусть $p, q \in (0, \infty)$. Тогда неравенство Харди (1.1) равносильно существованию такого семейства функций*

$$Q_x : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty) \quad (x \in T),$$

что для любых $x \in T$, $r \geqslant 0$, $\rho \geqslant 0$ и $s_y \geqslant 0$ ($\sigma = \sum_{y \in R_x} s_y < \infty$) имеем

$$u(x)(r+\rho)^q + \sum_{y \in R_x} Q_y(r+\rho, s_y) \leqslant Q_x(r, v(x)\rho^p + \sigma). \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть верно (1.1). Положим

$$Q_x(r,s) = \sup_{\substack{f : S_x \to [0,\infty) \\ \sum_{S_x} v f^p \leqslant s}} \sum_{S_x} u\big[r + \mathcal{I}[\chi_{S_x} f]\big]^q.$$

Здесь через $\chi_{S_x} f$ не вполне корректно обозначено продолжение функции f нулем на множество $T \setminus S_x$. В силу (1.1) имеем, что $Q_x(r,s) < \infty$.

Возьмем произвольно $x \in T$, $r \geqslant 0$, $\rho \geqslant 0$, $s_y \geqslant 0$ с $\sigma = \sum_{y\in R_x} s_y < \infty$ и функции $\varphi_y : S_y \to [0,\infty)$ $(y \in R_x)$ с $\sum_{S_y} v\varphi_y^p \leqslant s_y$. В соответствии с (3.2) зададим функцию $f : S_x \to [0,\infty)$ формулой

$$f(z) = \begin{cases} \rho & \text{при} \quad z = x, \\ \varphi_y(z) & \text{при} \quad z \in S_y \ (y \in R_x). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{S_x} vf^p &= v(x)\rho^p + \sum_{y\in R_x} \sum_{S_y} v\varphi_y^p \leqslant v(x)\rho^p + \sigma, \\ Q_x(r, v(x)\rho^p + \sigma) &\geqslant \sup_{\{\varphi_y\}} \sum_{S_x} u\big[r + \mathcal{I}[\chi_{S_x} f]\big]^q \\ &= u(x)(r+\rho)^q + \sup_{\{\varphi_y\}} \sum_{y\in R_x} \sum_{S_y} u\big[r + \rho + \mathcal{I}[\chi_{S_y}\varphi_y]\big]^q \\ &= u(x)(r+\rho)^q + \sum_{y\in R_x} Q_y(r+\rho, s_y). \end{aligned}$$

Доказали (3.3).

Обратно, пусть существуют функции Q_x со свойством (3.3). Тогда (3.3) верно и для функции $\chi_F u$ вместо u, где множество $F \subset T$ конечно. Если проверить (1.1) для функции $\chi_F u$ (с не зависящей от F постоянной), то предельный переход с участием монотонного исчерпания $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ дерева T покажет, что (1.1) имеет место и для функции u. Значит, без умаления общности считаем, что множество $\{u \neq 0\}$ конечно.

Возьмем $f : T \to [0,\infty)$ такое, что $\sum_T vf^p < \infty$. Если длина цепочки $[o, x]$ достаточно велика, то неравенство

$$\sum_{S_x} u[\mathcal{I}f]^q \leqslant Q_x\Big(\mathcal{I}f(x) - f(x), \sum_{S_x} vf^p\Big) \tag{3.4}$$

тривиально выполнено, так как его левая часть зануляется ввиду конечности множества $\{u \neq 0\}$. Рассуждая индукцией по убыванию длины цепочки $[o, x]$, можем считать, что (3.4) имеет место для всех $y \in R_x$ вместо x. Это предположение охватывает случай $R_x = \varnothing$. Пусть

$$r = \mathcal{I}f(x) - f(x) \quad \& \quad \rho = f(x) \quad \& \quad s_y = \sum_{S_y} vf^p.$$

Тогда $\sigma = \sum_{y\in R_x} s_y \leqslant \sum_T vf^p < \infty$. С учетом (3.2)–(3.4) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{S_x} u[\mathcal{I}f]^q &= u(x)(r+\rho)^q + \sum_{y\in R_x} \sum_{S_y} u[\mathcal{I}f]^q \\ &\leqslant u(x)(r+\rho)^q + \sum_{y\in R_x} Q_y(\mathcal{I}f(y) - f(y), s_y) \\ &\leqslant Q_x(r, v(x)\rho^p + \sigma), \end{aligned}$$

так как $\mathcal{I}f(y) - f(y) = \mathcal{I}f(x) = r + \rho$. Тем самым (3.4) доказано для данного x, а по индукции — и для всех $x \in T$.

Из (3.4) для $x = o$ имеем

$$\sum_T u[\mathcal{I}f]^q \leqslant Q_o\Big(0, \sum_T vf^p\Big).$$

Инвариантность оценки (1.1) относительно умножения f на положительную постоянную показывает, что (1.1) выполнено с постоянной $A = Q_o(0,1)^{1/q}$. □

Лемма 3.2. *Пусть $p, q \in (1, \infty)$. Тогда неравенство Харди (1.1) эквивалентно существованию такого $A \geqslant 0$, что*

$$(\forall g : T \to [0, \infty)) \quad \Big(\sum_T v^{1-p'}[\mathcal{J}g]^{p'}\Big)^{1/p'} \leqslant A\Big(\sum_T ug^{q'}\Big)^{1/q'}, \tag{3.5}$$

где $\mathcal{J}g(x) = \sum_{S_x} ug$. Наилучшие постоянные A в (1.1) и (3.5) равны.

Этот результат хорошо известен, см. [2, с. 455] или [4, с. 352 ($p = q$)]. Доказательство легко проводится на основе тождества

$$\sum_T u[\mathcal{I}f]g = \sum_T f\mathcal{J}g,$$

где f и g зануляются вне конечного множества. Это тождество позволяет интерпретировать $\mathcal{J}$ как сопряженный к $\mathcal{I}$ оператор относительно указанных в тождестве спариваний. Надо также учесть, что условия (1.1) и (3.5) равносильны этим же условиям для $\mathbb{R}$-значных функций f и g.

Теорема 3.2. *Пусть $p, q \in (1, \infty)$. Тогда неравенство Харди (1.1) эквивалентно существованию неотрицательных функций $Q_x(r, s)$ $(x \in T)$, заданных для $r, s \geqslant 0$ с ограничением $r \leqslant U^{1/q}(x)s^{1/q'}$, невозрастающих по r и таких, что для любых $x \in T$, $\rho \geqslant 0$, $r_y \geqslant 0$ и $s_y \geqslant 0$ $(y \in R_x)$ со свойствами*

$$r_y \leqslant U^{1/q}(y)s_y^{1/q'} \quad \& \quad \sigma_r = \sum_{y \in R_x} r_y < \infty \quad \& \quad \sigma = \sum_{y \in R_x} s_y < \infty \tag{3.6}$$

выполнено условие

$$v^{1-p'}(x)(u(x)\rho + \sigma_r)^{p'} + \sum_{y \in R_x} Q_y(r_y, s_y) \leqslant Q_x(u(x)\rho + \sigma_r, u(x)\rho^{q'} + \sigma). \tag{3.7}$$

По неравенству Гёльдера и (3.2)

$$\begin{aligned} u(x)\rho + \sigma_r &\leqslant u(x)\rho + \sum_{y \in R_x} U^{1/q}(y)s_y^{1/q'} \\ &\leqslant \Big(u(x) + \sum_{R_x} U\Big)^{1/q}(u(x)\rho^{q'} + \sigma)^{1/q'} = U^{1/q}(x)(u(x)\rho^{q'} + \sigma)^{1/q'}, \end{aligned}$$

поэтому условие $\sigma_r < \infty$ в (3.6) следует из остальных двух условий, а значение функции Q_x в (3.7) определено.

Доказательство. Пусть верно (1.1). Тогда по лемме 3.2 имеет место (3.5), так что функции

$$Q_x(r, s) = \sup_{\substack{g : S_x \to [0,\infty) \\ \mathcal{J}g(x) \geqslant r \ \& \ \sum_{S_x} ug^{q'} \leqslant s}} \sum_{S_x} v^{1-p'}[\mathcal{J}g]^{p'}$$

конечны. Ввиду $r \leqslant U^{1/q}(x)s^{1/q'}$ множество допустимых функций g содержит функцию $g \equiv r/U(x)$ и потому не пусто. Это множество не расширяется при росте r, поэтому функции $r \mapsto Q_x(r, s)$ не возрастают.

Пусть x, ρ, r_y и s_y такие, как в (3.6). Для функций $\psi_y : S_y \to [0, \infty)$ со свойствами $\mathcal{J}\psi_y(y) \geqslant r_y$ и $\sum_{S_y} u\psi_y^{q'} \leqslant s_y$ положим

$$g(z) = \begin{cases} \rho & \text{при} \quad z = x, \\ \psi_y(z) & \text{при} \quad z \in S_y \ (y \in R_x). \end{cases}$$

Тогда по (3.2)

$$\mathcal{J}g(x) = u(x)\rho + \sum_{y\in R_x} \mathcal{J}\psi_y(y) \geqslant u(x)\rho + \sigma_r,$$

$$\sum_{S_x} ug^{q'} = u(x)\rho^{q'} + \sum_{y\in R_x}\sum_{S_y} u\psi_y^{q'} \leqslant u(x)\rho^{q'} + \sigma,$$

$$\begin{aligned} Q_x(u(x)\rho+\sigma_r, u(x)\rho^{q'}+\sigma) &\geqslant \sup_{\{\psi_y\}} \sum_{S_x} v^{1-p'}[\mathcal{J}g]^{p'} \\ &\geqslant v^{1-p'}(x)(u(x)\rho+\sigma_r)^{p'} + \sup_{\{\psi_y\}} \sum_{y\in R_x}\sum_{S_y} v^{1-p'}[\mathcal{J}\psi_y]^{p'} \\ &= v^{1-p'}(x)(u(x)\rho+\sigma_r)^{p'} + \sum_{y\in R_x} Q_y(r_y, s_y). \end{aligned}$$

Доказали (3.7).

Обратно, пусть существуют функции Q_x с требуемыми свойствами. Пусть $g : T \to [0,\infty)$ таково, что множество $\{g \neq 0\}$ конечно. Тогда для достаточно длинных цепочек $[o, x]$ имеем

$$\sum_{S_x} v^{1-p'}[\mathcal{J}g]^{p'} \leqslant Q_x\Big(\mathcal{J}g(x), \sum_{S_x} ug^{q'}\Big), \tag{3.8}$$

так как левая часть зануляется, а правая имеет смысл по неравенству Гёльдера:

$$\mathcal{J}g(x) \leqslant U^{1/q}(x)\big(\sum_{S_x} ug^{q'}\big)^{1/q'}.$$

Рассуждая по индукции, считаем, что (3.8) выполнено на элементах множества R_x вместо x. Положим

$$\rho = g(x) \quad \& \quad r_y = \mathcal{J}g(y) \quad \& \quad s_y = \sum_{S_y} ug^{q'}.$$

В силу вышесказанного имеет место (3.6), так что

$$\mathcal{J}g(x) = u(x)g(x) + \sum_{y\in R_x} \mathcal{J}g(y) = u(x)\rho + \sigma_r,$$

$$\begin{aligned} \sum_{S_x} v^{1-p'}[\mathcal{J}g]^{p'} &= v^{1-p'}(x)(u(x)\rho+\sigma_r)^{p'} + \sum_{y\in R_x}\sum_{S_y} v^{1-p'}[\mathcal{J}g]^{p'} \\ &\leqslant Q_x(u(x)\rho+\sigma_r, u(x)\rho^{q'}+\sigma) \quad (\text{ввиду (3.8) и (3.7)}) \\ &= Q_x\Big(\mathcal{J}g(x), \sum_{S_x} ug^{q'}\Big). \end{aligned}$$

По индукции (3.8) верно для всех $x \in T$.

Взяв $x = o$ в (3.8), имеем

$$\sum_{T} v^{1-p'}[\mathcal{J}g]^{p'} \leqslant Q_o\Big(\mathcal{J}g(o), \sum_{T} ug^{q'}\Big) \leqslant Q_o\Big(0, \sum_{T} ug^{q'}\Big),$$

что дает (3.5) с постоянной $A = Q_o(0,1)^{1/p'}$ для данной функции g. Аппроксимация доставляет (3.5) в полном объеме, что доказывает (1.1) по лемме 3.2. □

Лемма 3.3. *Для $q \in [1,\infty)$ имеют место оценки*

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)^q \geqslant \sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{j} a_i\Big)^{q-1} a_j \qquad (n \geqslant 0 \ \& \ a_0,\dots,a_n \geqslant 0), \tag{3.9}$$

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)^q \leqslant q \sum_{j=0}^{n} \Big(\sum_{i=0}^{j} a_i\Big)^{q-1} a_j, \tag{3.10}$$

$$(a+b)^q \leqslant a^q + q2^{q-1}(a^{q-1}b + b^q) \quad (a, b \geqslant 0). \tag{3.11}$$

Неравенство (3.10) обычно называют формулой интегрирования по частям, а неравенство (3.11) названо биномиальной оценкой в [28, с. 59].

Доказательство. Для $a, b \geqslant 0$

$$a^q + (a+b)^{q-1}b \leqslant (a+b)^{q-1}a + (a+b)^{q-1}b = (a+b)^q,$$

что по индукции дает (3.9). По формуле конечных приращений

$$(a+b)^q = a^q + q\xi^{q-1}b \leqslant a^q + q(a+b)^{q-1}b,$$

где $a \leqslant \xi \leqslant a+b$. Отсюда получаем формулу (3.10) по индукции, а (3.11) — из неравенства $(a+b)^{q-1} \leqslant \max\{1, 2^{q-2}\}(a^{q-1} + b^{q-1})$. □

Теорема 3.3. *Пусть $p \in (0, \infty)$ и $q \in [1, \infty)$. Тогда неравенство Харди (1.1) равносильно существованию такого набора функций*

$$Q_x : [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty) \quad (x \in T),$$

что для любых $x \in T$, $r \geqslant 0$, $\rho \geqslant 0$ и $s_y \geqslant 0$ ($\sigma = \sum_{y \in R_x} s_y < \infty$) имеем

$$U(x)(r+\rho)^{q-1}\rho + \sum_{y \in R_x} Q_y(r+\rho, s_y) \leqslant Q_x(r, v(x)\rho^p + \sigma). \tag{3.12}$$

Доказательство. Для $f : T \to [0, \infty)$, $x \in T$ и $[o, x] = (x_i)_{i=0}^n$ имеем

$$[\mathcal{I}f]^q(x) = \Big(\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Big)^q \leqslant q \sum_{P_x} [\mathcal{I}f]^{q-1} f,$$

$$\sum_T u[\mathcal{I}f]^q \leqslant q \sum_{w, x \in T:\, w \leqslant x} u(x)[\mathcal{I}f]^{q-1}(w) f(w) = q \sum_T U[\mathcal{I}f]^{q-1} f$$

ввиду (3.10) и теоремы Фубини. В сочетании с аналогичной выкладкой с участием неравенства (3.9) видим, что (1.1) равносильно условию

$$(\exists A \geqslant 0)\ (\forall f : T \to [0, \infty)) \quad \Big(\sum_T U[\mathcal{I}f]^{q-1} f\Big)^{1/q} \leqslant A \Big(\sum_T v f^p\Big)^{1/p}.$$

Теперь доказательство теоремы 3.3 проводится полностью аналогично доказательству теоремы 3.1, с применением функций

$$Q_x(r, s) = \sup_{\substack{f : S_x \to [0, \infty) \\ \sum_{S_x} v f^p \leqslant s}} \sum_{S_x} U\big[r + \mathcal{I}[\chi_{S_x} f]\big]^{q-1} f$$

в первой части доказательства и условия

$$\sum_{S_x} U[\mathcal{I}f]^{q-1} f \leqslant Q_x\Big(\mathcal{I}f(x) - f(x), \sum_{S_x} v f^p\Big)$$

во второй части. □

Применим теперь теорему 3.1 к диагональному случаю в неравенстве Харди (1.1). Автору не удалось обобщить рассуждения из доказательства следующей теоремы на случай $p < q$. В § 4 индукция дважды проводится при $p < q$ вне рамок теорем 3.1–3.3.

Теорема 3.4. *Пусть $p = q > 1$. Тогда равносильны следующие условия.*
(i) Выполнено неравенство Харди (1.1).
(ii) Существуют $\beta > 0$ и $\beta_1 \geqslant 1$ такие, что при

$$\pi_x(y) = \prod_{S_x \cap P_y} \left(1 + \beta\{U/v\}^{p'-1}\right) \quad (y \in S_x)$$

имеем $\sum_{S_x} u\pi_x \leqslant \beta_1 U(x)$ для любого $x \in T$.
(iii) $C < \infty$.
(iv) Существуют $E : T \to [0, \infty)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для любого $x \in T$

$$u(x) + \sum_{R_x} E \leqslant E(x)\left(1 + \varepsilon\{E(x)/v(x)\}^{p'-1}\right)^{1-p}.$$

Критерий (i) $\Leftrightarrow$ (ii) упрощает теорему 16 из [1], где функция π_x определялась немного по-иному и где применялось дополнительное условие $\sup_T(U/v) < \infty$. Отметим, что (ii) $\Rightarrow$ $\sup_T(U/v) \leqslant ((\beta_1 - 1)/\beta)^{p-1}$ ввиду соотношений

$$\pi_x(y) \geqslant 1 + \beta \sum_{S_x \cap P_y} \{U/v\}^{p'-1} \geqslant 1 + \beta\{U(x)/v(x)\}^{p'-1}. \tag{3.13}$$

Критерий (i) $\Leftrightarrow$ (iii) является частным случаем критерия (1.4a).
Критерий (i) $\Leftrightarrow$ (iv) является новым.

Доказательство. Покажем, что (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

Доказательство импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) воспроизведем по работе [1]. Пусть имеет место (1.1). Случай $A = 0$ (когда $u \equiv 0$) тривиален, поэтому считаем, что $A > 0$. Обозначим

$$\beta = (2A/p)^{-p'} \quad \& \quad \beta_1 = 2^p.$$

Зафиксируем $x \in T$. Зададим родителя $y' \in S_x$ элемента $y \in S_x \setminus \{x\}$ условием $y \in R_{y'}$. Используя соглашение $\pi_x(x') = 1$, положим

$$f(y) = \begin{cases} \pi_x^{1/p}(y) - \pi_x^{1/p}(y') \\ \quad = \pi_x^{1/p}(y')\left[\left(1 + \beta\{U(y)/v(y)\}^{p'-1}\right)^{1/p} - 1\right] & \text{при} \quad y \in S_x, \\ 0 & \text{при} \quad y \in T \setminus S_x. \end{cases}$$

В силу (1.1), вогнутости функции $s \mapsto s^{1/p}$ и теоремы Фубини

$$\mathcal{I}f(y) = \sum_{S_x \cap P_y} f = \pi_x^{1/p}(y) - 1 \quad (y \in S_x),$$

$$\sum_{S_x} u\pi_x = \sum_{S_x} u[1 + \mathcal{I}f]^p \leqslant 2^{p-1}U(x) + 2^{p-1}\sum_{S_x} u[\mathcal{I}f]^p$$
$$\leqslant 2^{p-1}U(x) + 2^{p-1}A^p \sum_{S_x} vf^p,$$

$$f^p(y) \leqslant \pi_x(y')(\beta/p)^p\{U(y)/v(y)\}^{p'},$$

$$(p/\beta)^p \sum_{S_x} vf^p \leqslant \sum_{y \in S_x} v(y)\pi_x(y')\{U(y)/v(y)\}^{p'}$$
$$= \sum_{y \in S_x} \pi_x(y')\{U(y)/v(y)\}^{p'-1} \sum_{z \in S_y} u(z)$$
$$= \beta^{-1} \sum_{z \in S_x} u(z) \sum_{y \in S_x \cap P_z} (\pi_x(y) - \pi_x(y'))$$

$$= \beta^{-1} \sum_{z \in S_x} u(z)(\pi_x(z) - 1) \leqslant \beta^{-1} \sum_{S_x} u\pi_x,$$

$$\sum_{S_x} u\pi_x \leqslant 2^{p-1}U(x) + (1/2) \sum_{S_x} u\pi_x.$$

Если множество $\{u \neq 0\}$ конечно, то отсюда имеем $\sum_{S_x} u\pi_x \leqslant \beta_1 U(x)$. Общий случай сводится к этому частному случаю так же, как в доказательстве теоремы 3.1. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) доказана.

Пусть верно (ii). Тогда для любого $x \in T$ по (3.13) и теореме Фубини

$$\beta_1 U(x) \geqslant \sum_{S_x} u\pi_x \geqslant U(x) + \beta \sum_{y \in S_x} u(y) \sum_{S_x \cap P_y} \{U/v\}^{p'-1}$$
$$= U(x) + \beta \sum_{S_x} U^{p'} v^{1-p'} = U(x) + \beta B(x).$$

Отсюда $C \leqslant ((\beta_1 - 1)/\beta)^{1/p'} < \infty$. Показали, что (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Пусть верно (iii), так что

$$E(x) \equiv U(x) + C^{-p'} \sum_{S_x} U^{p'} v^{1-p'} \leqslant 2U(x).$$

В силу (3.2) и выпуклости функции $s \mapsto s^{1-p}$

$$u(x) + \sum_{R_x} E = U(x) + C^{-p'} \sum_{S_x \setminus \{x\}} U^{p'} v^{1-p'}$$
$$= E(x) - C^{-p'} U^{p'}(x) v^{1-p'}(x)$$
$$\leqslant E(x)\big(1 - (2C)^{-p'} \{E(x)/v(x)\}^{p'-1}\big)$$
$$\leqslant E(x)\big(1 + \varepsilon \{E(x)/v(x)\}^{p'-1}\big)^{1-p},$$

где $\varepsilon > 0$ любое при $C = 0$ ($\Rightarrow u \equiv 0$) и

$$\varepsilon = (2C)^{-p'}/(p-1)$$

при $0 < C < \infty$. Импликация (iii) $\Rightarrow$ (iv) доказана.

Пусть выполнено условие (iv). Положим

$$A = \varepsilon^{-1/p'},$$
$$Q_x(r, s) = E(x) r^p + A^p s.$$

Для $r \geqslant 0$ и $\rho \geqslant 0$ по неравенству Гёльдера

$$E(x)(r + \rho)^p = \Big\{1 \cdot E^{1/p}(x) r + \varepsilon^{1/p'} \{E(x)/v(x)\}^{1/p} \cdot A v^{1/p}(x) \rho\Big\}^p$$
$$\leqslant \big(1 + \varepsilon \{E(x)/v(x)\}^{p'-1}\big)^{p-1} \big(E(x) r^p + A^p v(x) \rho^p\big).$$

При $\sigma = \sum_{y \in R_x} s_y < \infty$ в силу (iv) имеем

$$u(x)(r + \rho)^p + \sum_{y \in R_x} Q_y(r + \rho, s_y)$$
$$= u(x)(r + \rho)^p + \sum_{y \in R_x} \big(E(y)(r + \rho)^p + A^p s_y\big)$$
$$= \Big(u(x) + \sum_{R_x} E\Big)(r + \rho)^p + A^p \sigma$$
$$\leqslant E(x) r^p + A^p v(x) \rho^p + A^p \sigma = Q_x(r, v(x)\rho^p + \sigma).$$

Получили неравенство (3.3). В силу теоремы 3.1 справедливо неравенство (1.1). Импликация (iv) $\Rightarrow$ (i) и теорема 3.4 доказаны. □

4. Критерии Аркоцци–Рохберга–Сойера для T

Для доказательства (как упрощенного известного, так и нового) критериев (1.4) нам понадобится четыре леммы.

Лемма 4.1. *Для $1 < p \leqslant q < \infty$ и $q/p' \leqslant r < \infty$ положим*

$$s = \frac{p-1}{q-1}\frac{q-r}{r}.$$

Для функции $f : T \to [0, \infty)$ и точки $x \in T$ обозначим

$$E_x(y) = \sum_{S_x \cap P_y \setminus \{x\}} f \qquad (y \in S_x),$$

$$F_x(y) = \sum_{S_x \cap P_y} f = E_x(y) + f(x).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{S_x} uF_x^q\Big)^{p/q} \leqslant \sum_{y \in R_x}\Big(\sum_{S_y} uF_y^q\Big)^{p/q} &+ \varepsilon \frac{U^{p'(1/q - s/q')}}{v^{p'-1}}\Big(\sum_{S_x} uE_x^r\Big)^{p/r} \\ &+ c_1(p, q, \varepsilon)\{U^{p/q} + v\} f^p, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где считается, что функции U, v и f вычисляются в точке x.

Доказательство. Обозначим

$$M = \sum_{S_x} uE_x^q, \qquad N = \sum_{S_x} uE_x^r.$$

Если $M \leqslant Uf^q$, то по неравенству Минковского

$$\Big(\sum_{S_x} uF_x^q\Big)^{1/q} \leqslant \Big(\sum_{S_x} uE_x^q\Big)^{1/q} + \Big(\sum_{S_x} uf^q\Big)^{1/q} \leqslant 2(Uf^q)^{1/q},$$

$$\Big(\sum_{S_x} uF_x^q\Big)^{p/q} \leqslant 2^p U^{p/q} f^p. \tag{4.2}$$

Если же $M > Uf^q$, то из биномиальной оценки (3.11) получаем

$$F_x^q \leqslant E_x^q + q2^{q-1}(E_x^{q-1} f + f^q),$$

$$\sum_{S_x} uF_x^q \leqslant M + q2^{q-1}\Big(f\sum_{S_x} uE_x^{q-1} + Uf^q\Big),$$

$$(a+b)^{p/q} \leqslant a^{p/q} + (p/q)a^{p/q-1}b \quad (a > 0 \ \& \ b \geqslant 0),$$

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{S_x} uF_x^q\Big)^{p/q} &\leqslant M^{p/q} + p2^{q-1}M^{p/q-1}\Big(f\sum_{S_x} uE_x^{q-1} + Uf^q\Big) \\ &\leqslant M^{p/q} + p2^{q-1}\Big(fM^{p/q-1}\sum_{S_x} uE_x^{q-1} + U^{p/q} f^p\Big). \end{aligned}$$

По неравенству Гёльдера и условию $q/p' \leqslant r$

$$M^{p/q-1}\sum_{S_x} uE_x^{q-1} \leqslant M^{p/q-1}\Big(\sum_{S_x} uE_x^q\Big)^{(q-p)/q}\Big(\sum_{S_x} uE_x^{q/p'}\Big)^{p/q} = \Big(\sum_{S_x} uE_x^{q/p'}\Big)^{p/q}$$
$$\leqslant U^{p/q-(p-1)/r}N^{(p-1)/r} = U^{1/q-s/q'}N^{(p-1)/r}.$$

С учетом (4.2) убеждаемся, что в любом случае

$$\Big(\sum_{S_x} uF_x^q\Big)^{p/q} \leqslant M^{p/q} + p2^q\big(U^{1/q-s/q'}N^{(p-1)/r}f + U^{p/q}f^p\big).$$

Очевидно, что $E_x(x) = 0$ и $E_x = F_y$ на S_y ($y \in R_x$), поэтому

$$M^{p/q} = \Big(\sum_{y\in R_x}\sum_{S_y} uF_y^q\Big)^{p/q} \leqslant \sum_{y\in R_x}\Big(\sum_{S_y} uF_y^q\Big)^{p/q}$$

по неравенству Йенсена (вложение $\ell_{p/q} \subset \ell_1$ пространств последовательностей, см. [21, теорема 19]). По неравенству Юнга

$$p2^qU^{1/q-s/q'}N^{(p-1)/r}f \leqslant \varepsilon U^{p'(1/q-s/q')}v^{1-p'}N^{p/r} + c(p,q,\varepsilon)vf^p.$$

Сопоставление последних трех оценок доказывает (4.1). □

Лемма 4.2. *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$ *и* $u_E : T \to [0,\infty)$. *Обозначим через* $U_E(x)$, $B_E(x)$ *и* C_E *числа* $U(x)$, $B(x)$ *и* C *из введения, построенные по функции* u_E *вместо* u. *Пусть* $U_E \leqslant U$ *и* $C < \infty$. *Тогда*

$$B_E(o) \leqslant qC^{p'}U_E^{p'/q'}(o),$$
$$C_E \leqslant q^{1/p'}C.$$

Это утверждение для $p = q$ и дерева с границей при условии $u_E \leqslant u$ доказано в [4, 5.6] с помощью функции распределения максимальной функции. Мы разберем случай $p \leqslant q$ и применим лемму 3.1 вместо максимальной функции, что несколько проще.

Доказательство. В силу условия $U_E \leqslant U$, теоремы Фубини, формулы (3.1), определений числа C и множества $\{U_E/U > t\}$ и вложения $\ell_1 \subset \ell_{p'/q'}$

$$\begin{aligned}
B_E(o) &= \sum_{x\in T} U^{p'}(x)v^{1-p'}(x)\int_{0<t<U_E(x)/U(x)} d(t^{p'})\\
&= p'\int_0^1 t^{p'-1}\,dt \sum_{\{U_E/U>t\}} U^{p'}v^{1-p'}\\
&= p'\int_0^1 t^{p'-1}\,dt \sum_{x\in\{U_E/U>t\}^{\min}}\ \sum_{S_x\cap\{U_E/U>t\}} U^{p'}v^{1-p'}\\
&\leqslant p'C^{p'}\int_0^1 t^{p'-1}\,dt \sum_{\{U_E/U>t\}^{\min}} U^{p'/q'}\\
&\leqslant p'C^{p'}\int_0^1 t^{p'-1-p'/q'}\,dt\Big(\sum_{\{U_E/U>t\}^{\min}} U_E\Big)^{p'/q'}.
\end{aligned}$$

По первому утверждению леммы 3.1 выражение в круглых скобках не превосходит $U_E(o)$, что после интегрирования дает первое утверждение леммы 4.2.

Второе утверждение леммы получается применением первого к деревьям с корнем (S_x, x) для всевозможных x. □

Лемма 4.3. *Пусть $0<p<\infty$. Для $x\in T$ и $E\in\mathcal{E}$ обозначим*

$$\Omega_x(E)=\bigl\{f:T\to[0,\infty)\colon f\big|_{T\setminus S_x}\equiv 0\ \&\ (\mathcal{I}f)\big|_{S_x\cap E}\geqslant 1\bigr\},$$

$$\operatorname{cap}(E)=\inf\left\{\sum_T vf^p\colon f\in\Omega_o(E)\right\}.$$

Тогда при $0<p\leqslant q<\infty$ неравенство Харди (1.1) равносильно существованию такого $\alpha\geqslant 0$, что

$$(\forall E\in\mathcal{E})\quad \left(\sum_E u\right)^{1/q}\leqslant \alpha\operatorname{cap}(E)^{1/p}. \tag{4.3}$$

Для наилучших постоянных из (1.1) и (4.3) имеем $\alpha\leqslant A\leqslant 2^{2+1/p}\alpha$.

Этот результат аналогичен емкостному критерию (2.5) $\Leftrightarrow$ (2.8). Вариант этой леммы для $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$ доказан в [7, лемма 2.5] редукцией к теореме 3.1 из [8], где рассматривался случай метрических деревьев. Как и в работе [8], мы используем метод срезок Мазьи [20, с. 155].

Доказательство. Пусть верно (1.1). Тогда для любых $E\in\mathcal{E}$ и $f\in\Omega_o(E)$

$$\left(\sum_E u\right)^{1/q}\leqslant\left(\sum_E u[\mathcal{I}f]^q\right)^{1/q}\leqslant A\left(\sum_T vf^p\right)^{1/p}.$$

Взятие $\inf_f$ доказывает (4.3) с постоянной $\alpha\leqslant A$.

Обратно, пусть верно условие (4.3). Для $f:T\to[0,\infty)$ положим

$$\begin{aligned}
&E_k=\bigl\{x\in T\colon \mathcal{I}f(x)>2^k\bigr\}\quad\text{при}\quad k\in\mathbb{Z},\\
&F_k=E_k\setminus E_{k+1},\\
&f_k=\chi_{F_{k-1}\cup F_k^{\min}}f,\\
&G_k=\bigcup_{x\in F_k^{\min}}S_x.
\end{aligned}$$

Очевидно, что $F_k\subset G_k\in\mathcal{E}$. Если установить неравенство $\mathcal{I}f_k\geqslant 2^{k-1}$ на множестве $F_k^{\min}$, то оно в силу монотонности функции $\mathcal{I}f_k$ окажется выполненным и на G_k.

Возьмем $x\in F_k^{\min}$ и положим

$$W=E_{k-1}\cap P_x.$$

Очевидно, что $x\in W$. Если $w\in W\setminus\{x\}$, то $\mathcal{I}f(w)\leqslant\mathcal{I}f(x)\leqslant 2^{k+1}$, откуда $w\notin E_k$ по минимальности x в F_k. Значит, $w\in F_{k-1}$ и $W\subset F_{k-1}\cup F_k^{\min}$.

Обозначим через w наименьший элемент в W. Тогда $\mathcal{I}f(w)-f(w)\leqslant 2^{k-1}$, что тривиально при $w=o$, а при $w\neq o$ следует из минимальности w в W. Отсюда

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}f_k(x)\geqslant\sum_W f=\mathcal{I}f(x)-(\mathcal{I}f(w)-f(w))>2^k-2^{k-1}=2^{k-1},\\
&2^{1-k}f_k\in\Omega_o(G_k),\\
&\sum_{F_k}u\leqslant\sum_{G_k}u\leqslant\alpha^q\operatorname{cap}(G_k)^{q/p}\leqslant\alpha^q\left(\sum_T v[2^{1-k}f_k]^p\right)^{q/p},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_T u[\mathcal{I}f]^q&=\sum_k\sum_{F_k}u[\mathcal{I}f]^q\leqslant\sum_k 2^{(k+1)q}\sum_{F_k}u\\
&\leqslant 2^{2q}\alpha^q\sum_k\left(\sum_{F_{k-1}\cup F_k^{\min}}vf^p\right)^{q/p}
\end{aligned}$$

$$\leqslant 2^{2q}\alpha^q\biggl(\sum_k \sum_{F_{k-1}\cup F_k^{\min}} vf^p\biggr)^{q/p} \leqslant 2^{2q+q/p}\alpha^q\biggl(\sum_T vf^p\biggr)^{q/p}.$$

Мы применили вложение $\ell_1 \subset \ell_{q/p}$ и то, что множества F_k попарно не пересекаются. Доказали (1.1) с постоянной $A \leqslant 2^{2+1/p}\alpha$. $\square$

Лемма 4.4. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Для* $x \in T$ *и* $E \in \mathcal{E}$ *обозначим*

$$\operatorname{cap}_x(E) = \inf\biggl\{\sum_{S_x} vf^p \colon f \in \Omega_x(E)\biggr\}.$$

Тогда имеют место равенства

$$\operatorname{cap}_x(E) = \begin{cases} v(x) & \text{при} \quad x \in E,\\ \bigl(v^{1-p'}(x) + \sigma^{1-p'}\bigr)^{1-p} & \text{при} \quad x \notin E, \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\operatorname{cap}(S_x \cap E) = \bigl(\mathcal{V}(x) + \operatorname{cap}_x(E)^{1-p'}\bigr)^{1-p}, \tag{4.5}$$

$$\operatorname{cap}(S_x \cap E) = \begin{cases} V^{1-p}(x) & \text{при} \quad x \in E,\\ \bigl(V(x) + \sigma^{1-p'}\bigr)^{1-p} & \text{при} \quad x \notin E, \end{cases} \tag{4.6}$$

где $\sigma = \sum_{y\in R_x} \operatorname{cap}_y(E)$ *и* $\mathcal{V}(x) = \sum_{P_x\setminus\{x\}} v^{1-p'}$.

Число $\operatorname{cap}_x(E) \in [0, v(x)]$ является емкостью $\operatorname{cap}(S_x \cap E)$, вычисленной для дерева (S_x, x) вместо (T, o).

Формула (4.4) без учета случая $x \in E$ доказана в [7, предложение 2.6] редукцией к теореме 4.5 из [8], где рассматривался случай метрических деревьев. Нам проще доказать (4.4), чем обсуждать обозначения из [7]. Результат теоремы 30 в [4] похож на формулу (4.6) с $x \notin E$, но сформулирован с ошибками.

Доказательство. При $S_x \cap E = \varnothing$ все входящие в (4.4)–(4.6) емкости нулевые, так что эти формулы верны (в очевидной интерпретации). Поэтому считаем, что $S_x \cap E \neq \varnothing$.

Если $x \in E$, то $f(x) \geqslant 1$ и $\sum_{S_x} vf^p \geqslant v(x)$ при $f \in \Omega_x(E)$, так что $\operatorname{cap}_x(E) \geqslant v(x)$. Выбор $f = \chi_{\{x\}}$ показывает, что здесь имеет место равенство.

Пусть $x \notin E$, $f \in \Omega_x(E)$ и $\rho = f(x)$. Если $0 \leqslant \rho < 1$, то

$$\begin{aligned} &\frac{\chi_{S_y} f}{1-\rho} \in \Omega_y(E) \quad (\forall y \in R_x),\\ &\sigma = \sum_{y\in R_x} \operatorname{cap}_y(E) \leqslant (1-\rho)^{-p} \sum_{y\in R_x}\sum_{S_y} vf^p = (1-\rho)^{-p} \sum_{S_x\setminus\{x\}} vf^p,\\ &\rho + 1 - \rho \leqslant \rho + \sigma^{-1/p}\biggl(\sum_{S_x\setminus\{x\}} vf^p\biggr)^{1/p}\\ &\qquad\qquad \leqslant \bigl(v^{1-p'}(x) + \sigma^{1-p'}\bigr)^{1/p'}\biggl(v(x)\rho^p + \sum_{S_x\setminus\{x\}} vf^p\biggr)^{1/p} \end{aligned}$$

в силу (3.2) и неравенства Гёльдера. При $\rho \geqslant 1$ полученная оценка тривиальна, что дает неравенство «$\geqslant$» в (4.4).

Пусть $x \notin E$ и $\varphi_y \in \Omega_y(E)$ $(y \in R_x)$. Положим

$$\rho = \frac{v^{1-p'}(x)}{v^{1-p'}(x) + \sigma^{1-p'}},$$

$$f(z)=\begin{cases}\rho & \text{при}\quad z=x,\\ (1-\rho)\varphi_y(z) & \text{при}\quad z\in S_y\ (y\in R_x),\\ 0 & \text{при}\quad z\notin S_x.\end{cases}$$

Если $z\in S_x\cap E$, то $z\in S_y\cap E$ для некоторого $y\in R_x$, так что

$$\mathcal{I}f(z)=\rho+(1-\rho)\mathcal{I}\varphi_y(z)\geqslant 1.$$

Значит, $f\in\Omega_x(E)$ и

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_x(E)\leqslant\inf_{\{\varphi_y\}}\sum_T vf^p&=\inf_{\{\varphi_y\}}\Big\{v(x)\rho^p+(1-\rho)^p\sum_{y\in R_x}\sum_{S_y}v\varphi_y^p\Big\}\\&=v(x)\rho^p+(1-\rho)^p\sigma\\&=\big(v^{1-p'}(x)+\sigma^{1-p'}\big)^{1-p}.\end{aligned}$$

Равенство (4.4) доказано.

Пусть $f\in\Omega_o(S_x\cap E)$ и $\rho=\sum_{P_x\setminus\{x\}}f$. Тогда

$$\rho\leqslant\mathcal{V}^{1/p'}(x)\Big(\sum_{P_x\setminus\{x\}}vf^p\Big)^{1/p}\quad\text{(неравенство Гёльдера).}\tag{4.7}$$

Если $0\leqslant\rho<1$, то $\chi_{S_x}f/(1-\rho)\in\Omega_x(E)$, откуда

$$\sum_{S_x}vf^p\geqslant(1-\rho)^p\operatorname{cap}_x(E),$$

$$\begin{aligned}\rho+1-\rho&\leqslant\mathcal{V}^{1/p'}(x)\Big(\sum_{P_x\setminus\{x\}}vf^p\Big)^{1/p}+\operatorname{cap}_x(E)^{-1/p}\Big(\sum_{S_x}vf^p\Big)^{1/p}\\&\leqslant\big(\mathcal{V}(x)+\operatorname{cap}_x(E)^{1-p'}\big)^{1/p'}\Big(\sum_{P_x\setminus\{x\}}vf^p+\sum_{S_x}vf^p\Big)^{1/p}\\&\leqslant\big(\mathcal{V}(x)+\operatorname{cap}_x(E)^{1-p'}\big)^{1/p'}\Big(\sum_T vf^p\Big)^{1/p}\end{aligned}$$

по неравенству Гёльдера. При $\rho\geqslant1$ полученное неравенство вытекает из (4.7), что дает неравенство «$\geqslant$» в (4.5).

Для проверки обратного неравенства возьмем $\varphi\in\Omega_x(E)$. Положим

$$\rho=\frac{\mathcal{V}(x)}{\mathcal{V}(x)+\operatorname{cap}_x(E)^{1-p'}},$$

$$f(y)=\begin{cases}\rho\mathcal{V}^{-1}(x)v^{1-p'}(y) & \text{при}\quad y\in P_x\setminus\{x\},\\ (1-\rho)\varphi(y) & \text{при}\quad y\in S_x,\\ 0 & \text{при}\quad y\notin P_x\cup S_x.\end{cases}$$

Если $y\in S_x\cap E$, то

$$\mathcal{I}f(y)=\sum_{P_x\setminus\{x\}}f+(1-\rho)\sum_{S_x\cap P_y}\varphi\geqslant\rho+1-\rho=1,$$

$$\sum_T vf^p=\sum_{P_x\setminus\{x\}}vf^p+\sum_{S_x}vf^p=\rho^p\mathcal{V}^{1-p}(x)+(1-\rho)^p\sum_{S_x}v\varphi^p,$$

$$\operatorname{cap}(S_x\cap E)\leqslant\inf_\varphi\sum_T vf^p=\rho^p\mathcal{V}^{1-p}(x)+(1-\rho)^p\operatorname{cap}_x(E)=\big(\mathcal{V}(x)+\operatorname{cap}_x(E)^{1-p'}\big)^{1-p}.$$

Равенство (4.5) установлено, а (4.6) следует из (4.4) и (4.5). □

Комментарии по следующим критериям Аркоцци–Рохберга–Сойера были даны во введении (см. (1.4)). Недостаточность условия $D < \infty$ для справедливости неравенства Харди (1.1) при $p = q$ показана в [2, с. 463] (и указанной там библиографии) и [8, пример 5.3].

Теорема 4.1. *В условиях и обозначениях введения*
(a) если $1 < p \leqslant q < \infty$, то (1.1) $\Leftrightarrow C < \infty$;
(b) если $1 < p < q < \infty$, то (1.1) $\Leftrightarrow D < \infty$.

Доказательство. (a) Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Если верно (1.1), то по лемме 3.2 имеет место условие (3.5). Подставим в (3.5) функцию $g = \chi_{S_x}$. При $y \in S_x$ имеем $\mathcal{J}g(y) = \sum_{S_y} ug = U(y)$, так что

$$\begin{aligned} B^{1/p'}(x) &= \biggl(\sum_{S_x} U^{p'} v^{1-p'}\biggr)^{1/p'} \leqslant \biggl(\sum_T v^{1-p'} [\mathcal{J}g]^{p'}\biggr)^{1/p'} \\ &\leqslant A \biggl(\sum_T ug^{q'}\biggr)^{1/q'} = AU^{1/q'}(x) \quad \Rightarrow \quad C \leqslant A < \infty. \end{aligned}$$

Это доказательство стандартно [2, с. 455].

Обратно, пусть $C < \infty$. Дадим три вывода неравенства (1.1).

Первый вывод. Начнем с индукции. Умножая u или v на положительную постоянную, можем добиться того, что $C = 1$. Достаточно проверить получающееся измененное неравенство Харди (1.1) для функций $f : T \to [0, \infty)$, отличных от нуля лишь на конечном множестве.

Положим $r = \max\{1, q-1\}$. Тогда $q/p' \leqslant r < q$ и $s > 0$ в обозначениях леммы 4.1. Очевидно, что существуют $\varepsilon_1(p,s) > 0$ и $\varepsilon_2(p,s) > 0$ такие, что

$$\varepsilon_1 \tau + (1 + \varepsilon_2 \tau)^{p-1} \leqslant (1-\tau)^{-s}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{4.8}$$

Пусть c_1 — постоянная из неравенства (4.1), отвечающая значению $\varepsilon = \varepsilon_1$. Мы хотим показать, что для любого $x \in T$

$$G_x = \biggl(\sum_{S_x} uF_x^q\biggr)^{p/q} + B^{-s}(x)\biggl(\sum_{S_x} uF_x^r\biggr)^{p/r} \leqslant A^p \sum_{S_x} vf^p, \tag{4.9}$$
$$A^p = 2c_1 + (1 + \varepsilon_2^{-1})^{p-1}.$$

Взяв $x = o$, получим неравенство (1.1), так как $F_o = \mathcal{I}f$.

Отметим, что все входящие в (4.9) ряды сходятся ввиду $U(o) < \infty$ и конечности множества $\{f \neq 0\}$. Второе слагаемое в (4.9) подсказано интерполяцией между первым слагаемым и результатом леммы 5.1.

Оценку (4.9) будем доказывать индукцией по убыванию длины цепочки $[o, x]$. Если эта длина достаточно велика, то $G_x = 0$ ввиду конечности множества $\{f \neq 0\}$, поэтому можно считать, что (4.9) верно для всех $y \in R_x$ вместо x. Также считаем, что $B(x) > 0$, так как $u\big|_{S_x} \equiv 0$ и $G_x = 0$ при $B(x) = 0$.

Положим $\tau = U^{p'}(x) v^{1-p'}(x)/B(x)$. Из $C = 1$ следует, что

$$\begin{aligned} &U^{p'(1/q - s/q')}(x) B^{s+1}(x) \leqslant U^{p'(1/q - s/q') + p'(s+1)/q'}(x) = U^{p'}(x), \\ &\varepsilon \frac{U^{p'(1/q - s/q')}(x)}{v^{p'-1}(x)} \leqslant \varepsilon_1 \tau B^{-s}(x). \end{aligned}$$

Для любого $t>0$ в силу неравенств Минковского ($r\geqslant 1$) и Гёльдера

$$\Big(\sum_{S_x} uF_x^r\Big)^{p/r} \leqslant (1+t)^{p-1}\Big(\sum_{S_x} uE_x^r\Big)^{p/r} + \underbrace{(1+1/t)^{p-1}U^{p/r}(x)f^p(x)}_{H}.$$

При $t=\varepsilon_2\tau$ с учетом (4.1) и (4.8) получаем

$$\begin{aligned} G_x \leqslant \sum_{y\in R_x}\Big(\sum_{S_y} uF_y^q\Big)^{p/q} &+ (1-\tau)^{-s}B^{-s}(x)\Big(\sum_{S_x} uE_x^r\Big)^{p/r} \\ &+ c_1\big\{U^{p/q}(x)+v(x)\big\}f^p(x)+B^{-s}(x)H. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Очевидно, что $(1-\tau)B(x)=B(x)-U^{p'}(x)v^{1-p'}(x)=\sum_{R_x} B$. Если $p/r\leqslant 1$, то из вложения $\ell_{p/r}\subset \ell_1$ и свойства $s>0$

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{S_x} uE_x^r\Big)^{p/r} &= \Big(\sum_{y\in R_x}\sum_{S_y} uF_y^r\Big)^{p/r} \leqslant \sum_{y\in R_x}\Big(\sum_{S_y} uF_y^r\Big)^{p/r}, \\ \Big(\sum_{R_x} B\Big)^{-s}\Big(\sum_{S_x} uE_x^r\Big)^{p/r} &\leqslant \sum_{y\in R_x} B^{-s}(y)\Big(\sum_{S_y} uF_y^r\Big)^{p/r}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

При $p/r>1$ по неравенству Гёльдера

$$\Big(\sum_{S_x} uE_x^r\Big)^{p/r} \leqslant \Big(\sum_{R_x} B^\sigma\Big)^{s/\sigma}\sum_{y\in R_x} B^{-s}(y)\Big(\sum_{S_y} uF_y^r\Big)^{p/r},$$

где $\sigma=\frac{sr}{p-r}=\frac{p-1}{q-1}\frac{q-r}{p-r}\geqslant 1$. Вложение $\ell_1\subset\ell_\sigma$ снова дает оценку (4.11).

Из неравенств (4.10), (4.11) и (4.9) (для точек в R_x) выводим

$$\begin{aligned} G_x &\leqslant \sum_{y\in R_x} G_y + c_1\big\{U^{p/q}(x)+v(x)\big\}f^p(x)+B^{-s}(x)H \\ &\leqslant A^p\sum_{S_x\setminus\{x\}} vf^p + c_1\big\{U^{p/q}(x)+v(x)\big\}f^p(x)+B^{-s}(x)H. \end{aligned}$$

Оценки $U^{p'}v^{1-p'}\leqslant B\leqslant U^{p'/q'}$ показывают, что $U^{p/q}\leqslant v$ и

$$\begin{aligned} B^{-s}(x)H &\leqslant B^{-s}(x)\left(\frac{1+\varepsilon_2}{\varepsilon_2\tau}\right)^{p-1}U^{p/r}(x)f^p(x) \\ &= (1+\varepsilon_2^{-1})^{p-1}B^{p-1-s}(x)U^{p/r-p}(x)v(x)f^p(x) \\ &\leqslant (1+\varepsilon_2^{-1})^{p-1}v(x)f^p(x), \end{aligned}$$

так как $p-1-s=(p-1)q'/r'$. Это доказывает (4.9) и неравенство (1.1).

Второй вывод. В [3, § 3] и [4, 5.4.1] импликация $C<\infty\Rightarrow$ (1.1) при $p=q$ была доказана применением интерполяционной теоремы Марцинкевича к максимальному оператору. Как и в случае леммы 4.2, здесь мы рассмотрим случай $p\leqslant q$ и применим лемму 3.1 вместо максимального оператора.

Пусть $g:T\to\mathbb{R}$, $\sum_T u|g|<\infty$, $t>0$,

$$Jg(x)=U^{-1}(x)\sum_{S_x} ug, \qquad E=\big\{x\in T\colon J|g|(x)>t\big\}.$$

По аналогии с доказательством леммы 4.2 имеем

$$\sum_E U^{p'}v^{1-p'} = \sum_{x\in E^{\min}}\sum_{S_x\cap E} U^{p'}v^{1-p'} \leqslant C^{p'}\sum_{x\in E^{\min}} U^{p'/q'}(x) \leqslant C^{p'}\Big(\sum_{E^{\min}} U\Big)^{p'/q'}$$

$$\leqslant C^{p'} t^{-p'/q'} \Big(\sum_{x \in E^{\min}} \sum_{S_x} u|g| \Big)^{p'/q'} \leqslant C^{p'} t^{-p'/q'} \Big(\sum_T u|g| \Big)^{p'/q'}.$$

В силу $|Jg| \leqslant J|g|$ оператор J является оператором слабого типа $(1, p'/q')$ по отношению к пространству T с мерами

$$X \mapsto \sum_X u \quad \& \quad X \mapsto \sum_X U^{p'} v^{1-p'}.$$

Ввиду $\sup_T |Jg| \leqslant \sup_T |g|$ он является и оператором типа (∞, ∞). По теореме Марцинкевича [34, приложение Б] J — оператор типа (q', p'), так что

$$(\forall g : T \to [0, \infty)) \quad \Big(\sum_T U^{p'} v^{1-p'} [Jg]^{p'} \Big)^{1/p'} \leqslant c(p, q, C) \Big(\sum_T u g^{q'} \Big)^{1/q'}.$$

Это свойство совпадает с (3.5) и влечет (1.1) по лемме 3.2.

Третий вывод. В.Г. Мазья поставил задачу, см. [4, с. 322 и с. 358], дать емкостное доказательство импликации $C < \infty \Rightarrow$ (1.1). При $p = q$ она решена в [4, теорема 43] с помощью предшественника нашей леммы 4.2 и формулы

$$\operatorname{cap}(E) = \sup_{u : T \to [0,\infty) : \, \{u \neq 0\} \subset E} \frac{U(o)}{C^p}.$$

Покажем, как обойтись без этой формулы.

Для $E \in \mathcal{E}$ положим $u_E = \chi_E u$. Возьмем $f \in \Omega_o(E)$, т.е. такую функцию $f : T \to [0, \infty)$, что $\mathcal{I} f \geqslant 1$ на E. По теореме Фубини, неравенству Гёльдера и лемме 4.2

$$\begin{aligned} U_E(o) &= \sum_T u_E \leqslant \sum_T u_E \mathcal{I} f = \sum_T U_E f \\ &\leqslant \Big(\sum_T U_E^{p'} v^{1-p'} \Big)^{1/p'} \Big(\sum_T v f^p \Big)^{1/p} \\ &= B_E^{1/p'}(o) \Big(\sum_T v f^p \Big)^{1/p} \leqslant q^{1/p'} C U_E^{1/q'}(o) \Big(\sum_T v f^p \Big)^{1/p}, \\ U_E^{1/q}(o) &\leqslant \alpha \Big(\sum_T v f^p \Big)^{1/p} \quad \text{для} \quad \alpha = q^{1/p'} C. \end{aligned}$$

Взятие $\inf_f$ дает условие (4.3), что влечет (1.1) по лемме 4.3.

(b) Пусть $1 < p < q < \infty$. Пусть верно (1.1). Для функции $f = \chi_{P_x} v^{1-p'}$ имеем $\mathcal{I} f = \sum_{P_x} f = V(x)$ на множестве S_x. Отсюда

$$U^{1/q}(x) V(x) \leqslant \Big(\sum_T u [\mathcal{I} f]^q \Big)^{1/q} \leqslant A \Big(\sum_T v f^p \Big)^{1/p} = A V^{1/p}(x),$$

так что $D \leqslant A < \infty$. Это доказательство стандартно [2, с. 458]. Можно аналогично подставить $g = \chi_{S_x}$ в лемму 3.2 и получить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{J} g(w) &= \sum_{S_w} u g = U(x) \quad \text{при} \quad w \in P_x, \\ U(x) V^{1/p'}(x) &\leqslant \Big(\sum_T v^{1-p'} [\mathcal{J} g]^{p'} \Big)^{1/p'} \leqslant A \Big(\sum_T u g^{q'} \Big)^{1/q'} = A U^{1/q'}(x). \end{aligned}$$

Отсюда снова $D \leqslant A < \infty$.

Обратно, пусть $D < \infty$. Мы применим индукцию в сочетании с леммами 4.3 и 4.4, что сходно с работами [6], [7], где рассуждения более сложные.

Обозначим

$$\alpha = \left(\frac{q}{q-p}\right)^{1/p'} D.$$

Возьмем $E \in \mathcal{E}$. Как в теореме 3.1, можем считать, что множество $\{u \neq 0\}$ конечно. Тогда для достаточно длинных цепочек $[o, x]$

$$\left(\sum_{S_x \cap E} u\right)^{1/q} \leqslant \alpha \operatorname{cap}(S_x \cap E)^{1/p}. \tag{4.12}$$

Допустим, что (4.12) верно для элементов множества R_x вместо x. По формуле (4.5) это означает, что

$$(\forall y \in R_x) \quad \sum_{S_y \cap E} u \leqslant \alpha^q h(s_y),$$

где $s_y = \operatorname{cap}_y(E)$ и

$$h(s) = \big(\mathcal{V}(y) + s^{1-p'}\big)^{-q/p'} = \big(V(x) + s^{1-p'}\big)^{-q/p'}.$$

Если $x \in E$, то $\operatorname{cap}(S_x \cap E) = V^{1-p}(x)$ в силу (4.6), так что (4.12) выполнено ввиду неравенства $D \leqslant \alpha$. Пусть $x \notin E$. Тогда

$$\sum_{S_x \cap E} u = \sum_{y \in R_x} \sum_{S_y \cap E} u \leqslant \alpha^q \sum_{y \in R_x} h(s_y).$$

При $s > 0$

$$\frac{d}{ds}\frac{h(s)}{s} = s^{-2}\big(V(x) + s^{1-p'}\big)^{-q/p'-1}\left(\frac{q-p}{p}s^{1-p'} - V(x)\right).$$

Значит, если $\sigma = \sum_{y \in R_x} s_y \leqslant \sigma_0 = \big(\frac{q-p}{pV(x)}\big)^{p-1}$, то

$$s_y \leqslant \sigma \quad \Rightarrow \quad h(s_y) \leqslant s_y h(\sigma)/\sigma \quad \Rightarrow \quad \alpha^q \sum_{y \in R_x} h(s_y) \leqslant \alpha^q h(\sigma).$$

Об этом рассуждении см. [21, § 3.14]. Если же $\sigma > \sigma_0$, то

$$\sum_{S_x \cap E} u \leqslant U(x) \leqslant D^q V^{-q/p'}(x) = \alpha^q h(\sigma_0)$$
$$\leqslant \alpha^q h(\sigma) = \alpha^q \operatorname{cap}(S_x \cap E)^{q/p} \quad (\text{ввиду } (4.6)).$$

По индукции соотношение (4.12) установлено для всех $x \in T$. При $x = o$ получаем условие (4.3), что доказывает (1.1) по лемме 4.3. □

5. Критерии Аркоцци–Рохберга–Сойера для $T \cup \partial T$ и $\mathcal{D}$

Обозначим через ∂T множество всех последовательностей

$$x = (x_i)_{i=0}^{\infty} \subset T\colon \quad x_i \neq x_j \ (i \neq j) \quad \& \quad x_0 = o \quad \& \quad x_i \sim x_{i+1} \ (i \geqslant 0).$$

Для $x \in \overline{T} = T \cup \partial T$ и функции $f : T \to [0, \infty)$ положим

$$P_{x,\overline{T}} = \begin{cases} P_x & \text{при} \quad x \in T, \\ x & \text{при} \quad x \in \partial T, \end{cases}$$

$$\mathcal{I}f(x) = \sum_{P_{x,\overline{T}}} f.$$

Для $x \in T$ пусть

$$S_{x,\partial T} = \{y \in \partial T \colon x \in y\},$$
$$S_{x,\overline{T}} = \{y \in \overline{T} \colon x \in P_{y,\overline{T}}\} = S_x \cup S_{x,\partial T}.$$

Обычно множество $\overline{T}$ наделяют топологией и рассматривают на нем борелевские меры. Для наших целей достаточно ограничиться σ-алгеброй $\mathfrak{S}$ в $\overline{T}$, порожденной всеми множествами $S_{x,\overline{T}}$. Если множество $\{f \neq 0\}$ конечно, то функция $\mathcal{I}f$ $\mathfrak{S}$-измерима, откуда это же верно для любой f. Из формулы (3.2) и аналогичной формулы

$$S_{x,\partial T} = \bigcup_{y \in R_x} S_{y,\partial T} \quad \text{(объединение дизъюнктное)} \tag{5.1}$$

следует, что для любого $x \in T$

$$\{x\} = S_x \setminus \bigcup_{y \in R_x} S_y = S_{x,\overline{T}} \setminus \bigcup_{y \in R_x} S_{y,\overline{T}} \in \mathfrak{S}.$$

Отсюда $T \in \mathfrak{S}$, σ-алгебра $\mathfrak{S}\big|_T$ состоит из всех подмножеств в T, а σ-алгебра $\mathfrak{S}\big|_{\partial T}$ порождена множествами $S_{x,\partial T}$.

Установим вариант критериев Аркоцци–Рохберга–Сойера для множества $\overline{T}$ (с помощью новых рассуждений), доказав сначала пару лемм. Рассмотрим $p, q \in (1, \infty)$. Для заданной на $\mathfrak{S}$ конечной меры ν положим

$$\begin{aligned} U_{\overline{T}}(x) &= \nu(S_{x,\overline{T}}) \qquad (x \in T),\\ B_{\overline{T}}(x) &= \sum_{S_x} U_{\overline{T}}^{p'} v^{1-p'} \quad (x \in T),\\ C_{\overline{T}} &= \sup_T B_{\overline{T}}^{1/p'} U_{\overline{T}}^{-1/q'},\\ D_{\overline{T}} &= \sup_T U_{\overline{T}}^{1/q} V^{1/p'}. \end{aligned}$$

Лемма 5.1. *Выполнено равенство $\beta = B_{\overline{T}}^{1/p'}(o)$, где*

$$\beta = \sup_f \frac{\int_{\overline{T}} \mathcal{I}f \, d\nu}{\left(\sum_T v f^p\right)^{1/p}}.$$

Лемма «разрешает» неравенство Харди на $\overline{T}$ при $p > q = 1$. Для следового неравенства (2.5) аналогичный критерий: $A_1 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (I_l \mu)^{p'} \, dx\right)^{1/p'}$ [20, с. 574].

Доказательство. По теореме Фубини и неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_{\overline{T}} \mathcal{I}f \, d\nu = \sum_T U_{\overline{T}} f &\leqslant \left(\sum_T U_{\overline{T}}^{p'} v^{1-p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_T v f^p\right)^{1/p}\\ &= B_{\overline{T}}^{1/p'}(o) \left(\sum_T v f^p\right)^{1/p}, \end{aligned}$$

так что $\beta \leqslant B_{\overline{T}}^{1/p'}(o)$. Выбор $f = (U_{\overline{T}}/v)^{p'-1}$ (и несложная регуляризация в случае $B_{\overline{T}}(o) = \infty$) показывает, что здесь имеет место равенство. $\square$

Лемма 5.2. *Справедливы следующие оценки:*

$$D_{\overline{T}} \leqslant q^{1/p'} C_{\overline{T}}, \tag{5.2}$$

$$p < q \quad \Rightarrow \quad C_{\overline{T}} \leqslant 2(2^{p'/q'-1} - 1)^{-1/p'} D_{\overline{T}}, \tag{5.3}$$

$$(T, o) = (\mathbb{N}, 1) \quad \Rightarrow \quad C_{\overline{T}} \leqslant (q')^{1/p'} D_{\overline{T}}. \tag{5.4}$$

Для $\nu(\partial T)=0$ оценка типа (5.3) установлена в [2, с. 459–461].

Доказательство. Пусть $U_{\overline{T}}(x)>0$. На P_x имеем $U_{\overline{T}}\geqslant U_{\overline{T}}(x)$, поэтому

$$V(x)=\sum_{w\in P_x}U_{\overline{T}}^{p'}(w)v^{1-p'}(w)\int_{0<t<1/U_{\overline{T}}(w)}d(t^{p'})$$
$$=p'\int_0^{1/U_{\overline{T}}(x)}t^{p'-1}\,dt\sum_{E_t}U_{\overline{T}}^{p'}v^{1-p'},$$

где $E_t=\big\{w\in P_x\colon U_{\overline{T}}(w)<1/t\big\}$. Это множество содержит x и имеет наименьший элемент w, для которого

$$\sum_{E_t}U_{\overline{T}}^{p'}v^{1-p'}\leqslant B_{\overline{T}}(w)\leqslant C_{\overline{T}}^{p'}U_{\overline{T}}^{p'/q'}(w)\leqslant C_{\overline{T}}^{p'}t^{-p'/q'},$$
$$V(x)\leqslant p'C_{\overline{T}}^{p'}\int_0^{1/U_{\overline{T}}(x)}t^{p'/q-1}\,dt=qC_{\overline{T}}^{p'}U_{\overline{T}}^{-p'/q}(x),$$

что доказывает (5.2).

Пусть $p<q$ и $U_{\overline{T}}(x)>0$. Для $k\geqslant 0$ обозначим

$$Y_k=\big\{y\in S_x\colon U_{\overline{T}}(y)/U_{\overline{T}}(x)\in(2^{-k-1},2^{-k}]\big\}.$$

Множества $S_{y,\overline{T}}\subset S_{x,\overline{T}}$ $(y\in Y_k^{\min})$ попарно не пересекаются (как в лемме 3.1). Отсюда и из формулы (3.1)

$$U_{\overline{T}}(x)\geqslant\sum_{y\in Y_k^{\min}}U_{\overline{T}}(y)\geqslant 2^{-k-1}U_{\overline{T}}(x)\operatorname{card}Y_k^{\min},$$
$$B_{\overline{T}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{Y_k}U_{\overline{T}}^{p'}v^{1-p'}\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}2^{k+1}\max_{y\in Y_k^{\min}}\sum_{S_y\cap Y_k}U_{\overline{T}}^{p'}v^{1-p'}.$$

Для $y\in Y_k^{\min}\subset Y_k$ и $z_1,z_2\in S_y\cap Y_k$ имеем

$$2^{-k-1}+2^{-k-1}<\frac{U_{\overline{T}}(z_1)}{U_{\overline{T}}(x)}+\frac{U_{\overline{T}}(z_2)}{U_{\overline{T}}(x)}=\frac{\nu(S_{z_1,\overline{T}}\cup S_{z_2,\overline{T}})+\nu(S_{z_1,\overline{T}}\cap S_{z_2,\overline{T}})}{U_{\overline{T}}(x)}$$
$$\leqslant 2^{-k}+\frac{\nu(S_{z_1,\overline{T}}\cap S_{z_2,\overline{T}})}{U_{\overline{T}}(x)}.$$

Отсюда $S_{z_1,\overline{T}}\cap S_{z_2,\overline{T}}\neq\varnothing$, так что $z_1\leqslant z_2$ или $z_2\leqslant z_1$, т.е. множество $S_y\cap Y_k$ линейно упорядочено. Для любого $z\in S_y\cap Y_k$

$$\sum_{S_y\cap Y_k\cap P_z}U_{\overline{T}}^{p'}v^{1-p'}\leqslant(2^{-k}U_{\overline{T}}(x))^{p'}V(z)$$
$$\leqslant(2^{-k}U_{\overline{T}}(x))^{p'}D_{\overline{T}}^{p'}U_{\overline{T}}^{-p'/q}(z)$$
$$\leqslant(2^{-k}U_{\overline{T}}(x))^{p'}D_{\overline{T}}^{p'}(2^{-k-1}U_{\overline{T}}(x))^{-p'/q}$$
$$=2^{p'/q}2^{-kp'/q'}D_{\overline{T}}^{p'}U_{\overline{T}}^{p'/q'}(x).$$

Взятие точных верхних граней по z и по y показывает, что

$$B_{\overline{T}}(x)\leqslant 2^{p'/q+1}D_{\overline{T}}^{p'}U_{\overline{T}}^{p'/q'}(x)\sum_{k=0}^{\infty}2^{k(1-p'/q')}=\frac{2^{p'}D_{\overline{T}}^{p'}U_{\overline{T}}^{p'/q'}(x)}{2^{p'/q'-1}-1}.$$

Оценка (5.3) установлена. Отметим, что ее можно немного усилить, так как на самом деле $\operatorname{card}Y_k^{\min}\leqslant 2^{k+1}-1$.

Пусть $(T, o) = (\mathbb{N}, 1)$ и $U_{\overline{T}}(x) > 0$. На S_x имеем $U_{\overline{T}} \leqslant U_{\overline{T}}(x)$, поэтому

$$B_{\overline{T}}(x) = \sum_{y \in S_x} v^{1-p'}(y) \int_{0<t<U_{\overline{T}}(y)} d(t^{p'}) = p' \int_0^{U_{\overline{T}}(x)} t^{p'-1}\, dt \sum_{E_t} v^{1-p'},$$

где $E_t = \{y \in S_x \colon U_{\overline{T}}(y) > t\}$. Рассматривая $y \in E_t$ и $\sup_{y \in E_t}$, имеем

$$\sum_{E_t \cap P_y} v^{1-p'} \leqslant V(y) \leqslant D_{\overline{T}}^{p'} U_{\overline{T}}^{-p'/q}(y) \leqslant D_{\overline{T}}^{p'} t^{-p'/q},$$

$$B_{\overline{T}}(x) \leqslant p' D_{\overline{T}}^{p'} \int_0^{U_{\overline{T}}(x)} t^{p'/q'-1}\, dt = q' D_{\overline{T}}^{p'} U_{\overline{T}}^{p'/q'}(x),$$

что доказывает (5.4). □

Теорема 5.1. *(a) Если $1 < p \leqslant q < \infty$, то неравенство Харди*

$$(\exists A \geqslant 0)\ (\forall f : T \to [0, \infty)) \quad \left(\int_{\overline{T}} [\mathcal{I} f]^q\, d\nu\right)^{1/q} \leqslant A \left(\sum_T v f^p\right)^{1/p} \tag{5.5}$$

равносильно тому, что $C_{\overline{T}} < \infty$. При этом

$$C_{\overline{T}} \leqslant A \leqslant q^{1/q + (p'-q')(p-1)/(p'q')} r^{(p-1)/q} C_{\overline{T}} \quad (r = p'(q-1) \geqslant q) \tag{5.6}$$

для наилучшего A в (5.5). В частности, $C_{\overline{T}} \leqslant A \leqslant pC_{\overline{T}}$ при $p = q$.

(b) Если $1 < p < q < \infty$, то (5.5) $\Leftrightarrow D_{\overline{T}} < \infty$.

Для $p = q$ эквивалентность из (a) содержится в [4, теорема 32].

При $T = \{o\}$ имеет место равенство $C_{\overline{T}} = A$. Для дерева $(T, o) = (\mathbb{N}, 1)$ и $\nu(\partial T) = 0$ в [26, с. 407] получена оценка $A \leqslant qC_{\overline{T}}$ и отмечено, что при $p = q$ она оптимальна. При $p < q$ оптимальная оценка найдена в [35, (55)]. Таким образом, неравенства $C_{\overline{T}} \leqslant A \leqslant pC_{\overline{T}}$ в (a) неулучшаемы.

Доказательство. Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Если верно (5.5), то

$$(\forall f) \quad \int_{\overline{T}} \mathcal{I} f\, d\nu \leqslant U_{\overline{T}}^{1/q'}(o) \left(\int_{\overline{T}} [\mathcal{I} f]^q\, d\nu\right)^{1/q} \leqslant A U_{\overline{T}}^{1/q'}(o) \left(\sum_T v f^p\right)^{1/p}$$

по неравенству Гёльдера. Отсюда по лемме 5.1 $B_{\overline{T}}^{1/p'}(o) = \beta \leqslant A U_{\overline{T}}^{1/q'}(o)$. Применяя этот результат ко всем деревьям (S_x, x), получаем, что $C_{\overline{T}} \leqslant A < \infty$.

Обратно, пусть $C_{\overline{T}} < \infty$. Наш вывод (5.5) аналогичен выводу в [16] импликаций (2.10) $\Rightarrow$ (2.11) $\Rightarrow$ (2.5) с помощью аналога формулы (3.10) для потенциала Рисса. Он также похож на вывод неравенства (1.3) с $p = q$ в [27].

Пусть функция $f : T \to [0, \infty)$ такова, что $\sum_T v f^p \leqslant 1$ и множество $\{f \neq 0\}$ конечно. Для $F = \mathcal{I} f$ и $x \in \overline{T}$ имеем

$$F^q(x) \leqslant q \sum_{P_{x,\overline{T}}} F^{q-1} f.$$

При $x \in T$ эта оценка дана в доказательстве теоремы 3.3, а для $x = (x_i)_0^\infty \in \partial T$ надо применить ее к x_i и перейти к пределу при $i \to \infty$. Аналогично

$$F^r(x) \leqslant r \sum_{P_x} F^{r-1} f, \quad x \in T.$$

Отсюда по теореме Фубини и неравенству Гёльдера

$$q^{-1} \int_{\overline{T}} F^q\, d\nu \leqslant W = \sum_T U_{\overline{T}} F^{q-1} f \leqslant \left(\sum_T U_{\overline{T}}^{p'} v^{1-p'} F^r\right)^{1/p'},$$

$$r^{-1}\sum_T U_{\overline{T}}^{p'} v^{1-p'} F^r \leqslant \sum_T B_{\overline{T}} F^{r-1} f \leqslant C_{\overline{T}}^{p'} \sum_T U_{\overline{T}}^{p'/q'} F^{r-1} f \leqslant C_{\overline{T}}^{p'} \Bigl(\sup_T U_{\overline{T}}^{1/q} F\Bigr)^{r-q} W,$$

так как $p'/q' - 1 = (r-q)/q$. По неравенству Гёльдера и оценке (5.2)

$$F(x) = \sum_{P_x} f \leqslant \Bigl(\sum_{P_x} v^{1-p'}\Bigr)^{1/p'} = V^{1/p'}(x),$$

$$\sup_T U_{\overline{T}}^{1/q} F \leqslant D_{\overline{T}} \leqslant q^{1/p'} C_{\overline{T}},$$

$$W \leqslant \bigl\{r C_{\overline{T}}^{p'} (q^{1/p'} C_{\overline{T}})^{r-q} W\bigr\}^{1/p'},$$

$$\int_{\overline{T}} F^q \, d\nu \leqslant qW \leqslant q^{1+(r-q)(p-1)/p'} r^{p-1} C_{\overline{T}}^q.$$

Предельный переход дает полученную оценку для любых f с $\sum_T v f^p \leqslant 1$, откуда следуют соотношения (5.5) и (5.6). Утверждение (a) доказано.

Утверждение (b) следует из (a) и неравенств (5.2) и (5.3).

Отметим, что критерий (2.2) вытекает из (a) и неравенств (5.2) и (5.4). □

Займемся интерпретацией условия (2.12) в терминах неравенства Харди.

Лемма 5.3. *Имеет место соотношение*

$$(\forall x \in T_\infty) \quad N(x) = \sum_{R_x \cap T_\infty} N, \tag{5.7}$$

где $T_\infty = \bigl\{x \in T \colon S_{x,\partial T} \neq \varnothing\bigr\}$ *и* $N(x) = \nu(S_{x,\partial T})$.

Обратно, если множества $R_x \cap T_\infty$ *конечны и функция* $N : T_\infty \to [0,\infty)$ *удовлетворяет* (5.7)*, то существует такая единственная конечная мера* ν *на* σ*-алгебре* $\mathfrak{S}\big|_{\partial T}$*, что* $\nu(S_{x,\partial T}) = N(x)$ *при* $x \in T_\infty$.

Доказательство. Первое утверждение леммы вытекает из свойства

$$(\forall x \in T) \quad S_{x,\partial T} = \bigcup_{y \in R_x \cap T_\infty} S_{y,\partial T} \quad \text{(объединение дизъюнктное)} \tag{5.8}$$

(следствие из (5.1)) и счетной аддитивности меры ν.

Обратно, пусть множества $R_x \cap T_\infty$ конечны и верно (5.7). Положим

$$\mathfrak{S}_{\partial T} = \bigl\{X \subset \partial T \colon X = \varnothing \text{ или } X = S_{x,\partial T} \text{ для некоторого } x \in T_\infty\bigr\}.$$

Для $X, Y \in \mathfrak{S}_{\partial T}$ либо $X \cap Y = \varnothing$, либо существует $(x_i)_0^\infty \in X \cap Y$. Во втором случае $X = S_{x_i,\partial T}$ и $Y = S_{x_j,\partial T}$ для некоторых i и j, причем x_i и x_j сравнимы. Значит, в любом случае $X \cap Y \in \{\varnothing, X, Y\}$, так что семейство $\mathfrak{S}_{\partial T}$ замкнуто относительно взятия пересечений.

Если $X \supsetneqq Y \neq \varnothing$, то с необходимостью $i < j$. Применяя формулу (5.8) к точкам $x = x_i, \dots, x_{j-1}$, построим конечное разложение $X = \bigcup_{k=1}^n Y_k$ с $Y_1 = Y$ и попарно непересекающимися $Y_k \in \mathfrak{S}_{\partial T}$. В терминологии из [36, § I.5] это значит, что $\mathfrak{S}_{\partial T}$ — полукольцо (порождающее σ-алгебру $\mathfrak{S}\big|_{\partial T}$). Поэтому результаты о лебеговом продолжении мер из [36, § V.3] докажут лемму, если проверить, что существует единственная счетно-аддитивная на $\mathfrak{S}_{\partial T}$ функция множества ν со свойством $\nu(S_{x,\partial T}) = N(x)$.

Рассмотрим множество $Z \subset T_\infty$. Пусть $x \in T_\infty$ таково, что

$$x \notin \bigcup_{z \in Z} (S_z \setminus \{z\}), \tag{5.9a}$$

$$S_{x,\partial T} = \bigcup_{z \in Z \colon S_{z,\partial T} \subset S_{x,\partial T}} S_{z,\partial T} \quad \text{(объединение дизъюнктное)}, \tag{5.9b}$$

$$N(x) \neq \sum_{z \in Z\colon S_{z,\partial T} \subset S_{x,\partial T}} N(z). \tag{5.9c}$$

Возьмем любое $y \in R_x \cap T_\infty$. Если $y \in S_z \setminus \{z\}$ для некоторого $z \in Z$, то $x \in S_z$, откуда $x = z$ по (5.9a). Из (5.9b) следует, что соотношение (5.9c) превращается в противоречие $N(x) \neq N(x)$. Отсюда

$$y \notin \bigcup_{z \in Z} (S_z \setminus \{z\}).$$

Покажем, что

$$S_{y,\partial T} = \bigcup_{z \in Z\colon S_{z,\partial T} \subset S_{y,\partial T}} S_{z,\partial T} \quad \text{(объединение дизъюнктное).} \tag{5.10}$$

Вложение «$\supset$» очевидно, а дизъюнктность следует из (5.9b). Рассмотрим любое $(x_i)_0^\infty \in S_{y,\partial T}$. Имеем $x = x_j$ и $y = x_{j+1}$ для некоторого j, а из (5.9b) вытекает, что $z = x_k \in Z$ для некоторого k. Из (5.9a) следует, что $j \leqslant k$. Равенство $x = z$ приводит к противоречию, как и выше, поэтому $j < k$ и $(x_i)_0^\infty \in S_{z,\partial T} \subset S_{y,\partial T}$. Утверждение (5.10) доказано.

В силу (5.8), (5.9b) и (5.10) имеется дизъюнктное объединение

$$\{z \in Z\colon S_{z,\partial T} \subset S_{x,\partial T}\} = \bigcup_{y \in R_x \cap T_\infty} \{z \in Z\colon S_{z,\partial T} \subset S_{y,\partial T}\}.$$

Допустим, что для любого $y \in R_x \cap T_\infty$

$$N(y) = \sum_{z \in Z\colon S_{z,\partial T} \subset S_{y,\partial T}} N(z).$$

Тогда

$$N(x) = \sum_{R_x \cap T_\infty} N = \sum_{y \in R_x \cap T_\infty} \sum_{z \in Z\colon S_{z,\partial T} \subset S_{y,\partial T}} N(z) = \sum_{z \in Z\colon S_{z,\partial T} \subset S_{x,\partial T}} N(z),$$

что противоречит (5.9c). Значит, для некоторого $y \in R_x \cap T_\infty$ вместо x выполнены свойства (5.9).

Многократное применение этого утверждения доставляет такие $n \geqslant 0$ и $(x_i)_0^\infty \in \partial T$, что $[o, x] = (x_i)_{i=0}^n$ и (5.9) имеет место для всех x_i $(i \geqslant n)$ вместо x. Имеем $(x_i)_0^\infty \in S_{x,\partial T}$ в силу $x = x_n$, поэтому $z = x_j \in Z$ для некоторого j по (5.9b). При этом $j \geqslant n$ ввиду (5.9a). Однако $x_{j+1} \in S_z \setminus \{z\}$ в противоречие с (5.9a). Значит, $x \in T_\infty$ не может удовлетворять всем условиям (5.9), т.е.

$$\text{(5.9a) \& (5.9b)} \quad \Rightarrow \quad N(x) = \sum_{z \in Z\colon S_{z,\partial T} \subset S_{x,\partial T}} N(z). \tag{5.11}$$

Рассмотрим теперь различные $x, y \in T_\infty$ такие, что $S_{x,\partial T} = S_{y,\partial T}$. Это возможно, например, при $(T, o) = (\mathbb{N}, 1)$. Переставляя x и y, если нужно, считаем, что $x \notin S_y \setminus \{y\}$. Для $Z = \{y\}$ импликация (5.11) показывает, что $N(x) = N(y)$. Значит, определение

$$\nu(\varnothing) = 0 \quad \& \quad \nu(S_{x,\partial T}) = N(x)$$

функции множества $\nu : \mathfrak{S}_{\partial T} \to [0, \infty)$ корректно.

При проверке счетной аддитивности ν можно ограничиться непустыми множествами. Пусть имеется дизъюнктное объединение

$$S_{x,\partial T} = \bigcup_{z \in Z} S_{z,\partial T},$$

где $Z \subset T_\infty$, а $x \in T_\infty$ выбрано минимальным среди всех точек x с данным $S_{x,\partial T}$. Из этой минимальности и вложений $S_{z,\partial T} \subset S_{x,\partial T}$ получаем, что верно (5.9a). Значит, (5.11) доказывает счетную аддитивность ν и лемму 5.3. $\square$

Пусть мера μ в $\mathbb{R}^n$ сосредоточена на двоичном кубе $K \in \mathcal{D}$. Положим

$$T = \mathcal{D}(K) \quad (\text{см. } (2.13)) \quad \& \quad o = K \quad \& \quad N(Q) = \mu(Q) \quad (Q \in T).$$

Множество $R_Q \cap T_\infty = R_Q$ состоит из 2^n кубов, образующих разбиение куба Q, что дает (5.7). По лемме 5.3 на ∂T определена мера ν такая, что

$$U_{\overline{T}}(Q) = \nu(S_{Q,\overline{T}}) = \nu(S_{Q,\partial T}) = N(Q) = \mu(Q),$$

где мы продолжили ν на T нулем: $\nu(T) = 0$. Для $v(Q) = \ell_Q^{n-pl}$ имеем

$$B_{\overline{T}}(P) = \sum_{Q \in \mathcal{D}\colon Q \subset P} \mu(Q)^{p'} \ell_Q^{p'(l-n)+n} \quad (0 < l < n/p = n/q),$$

что равно левой части в (2.12). В силу $p'(l-n)+n < 0$ условие (2.12) равносильно такому же условию (с другой постоянной A_7), где P пробегает множество $\mathcal{D}(K)$. Значит, условия (2.5) и (2.12) равносильны условию $C_{\overline{T}} < \infty$ и, по теореме 5.1(a), соответствующему неравенству Харди (5.5).

Выведем аналог теоремы 5.1 для двоичного семейства $\mathcal{D}$, когда «мера сосредоточена на границе» и «корень удален на бесконечность».

Пусть даны $p, q \in (1, \infty)$, мера μ в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ и функция $v : \mathcal{D} \to (0, \infty)$. Для точки $x \in \mathbb{R}^n$, куба $Q \in \mathcal{D}$ и функции $f : \mathcal{D} \to [0, \infty)$ обозначим

$$P_{x,\mathcal{D}} = \{Q \in \mathcal{D}\colon x \in Q\}, \qquad P_{Q,\mathcal{D}} = \{P \in \mathcal{D}\colon P \supset Q\},$$
$$U_{\mathcal{D}}(Q) = \mu(Q), \qquad V_{\mathcal{D}}(Q) = \sum_{P_{Q,\mathcal{D}}} v^{1-p'},$$
$$\mathcal{I}_{\mathcal{D}} f(x) = \sum_{P_{x,\mathcal{D}}} f, \qquad B_{\mathcal{D}}(Q) = \sum_{\mathcal{D}(Q)} U_{\mathcal{D}}^{p'} v^{1-p'},$$
$$C_{\mathcal{D}} = \sup_{\mathcal{D}} B_{\mathcal{D}}^{1/p'} U_{\mathcal{D}}^{-1/q'}, \qquad D_{\mathcal{D}} = \sup_{\mathcal{D}} U_{\mathcal{D}}^{1/q} V_{\mathcal{D}}^{1/p'}.$$

Имеют место следующие результаты.

Лемма 5.4. *Для любого $Q \in \mathcal{D}$*

$$\sup_{f\colon \{f \neq 0\} \subset \mathcal{D}(Q)} \frac{\int_Q \mathcal{I}_{\mathcal{D}} f \, d\mu}{\left(\sum_{\mathcal{D}(Q)} v f^p\right)^{1/p}} = B_{\mathcal{D}}^{1/p'}(Q).$$

Лемма 5.5. *Справедливы оценки*

$$D_{\mathcal{D}} \leqslant q^{1/p'} C_{\mathcal{D}},$$
$$p < q \quad \Rightarrow \quad C_{\mathcal{D}} \leqslant 2(2^{p'/q'-1} - 1)^{-1/p'} D_{\mathcal{D}}.$$

Теорема 5.2. *(a) Если $1 < p \leqslant q < \infty$, то неравенство Харди*

$$(\exists A \geqslant 0)\ (\forall f : \mathcal{D} \to [0, \infty)) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} [\mathcal{I}_{\mathcal{D}} f]^q \, d\mu\right)^{1/q} \leqslant A\left(\sum_{\mathcal{D}} v f^p\right)^{1/p} \tag{5.12}$$

равносильно условию $C_{\mathcal{D}} < \infty$. При этом

$$C_{\mathcal{D}} \leqslant A \leqslant q^{1/q + (p'-q')(p-1)/(p'q')} r^{(p-1)/q} C_{\mathcal{D}} \quad (r = p'(q-1) \geqslant q)$$

для наилучшего A в (5.12). В частности, $C_{\mathcal{D}} \leqslant A \leqslant p C_{\mathcal{D}}$ при $p = q$.

(b) Если $1 < p < q < \infty$, то (5.12) $\Leftrightarrow D_{\mathcal{D}} < \infty$.

Доказательство этих результатов почти идентично доказательству лемм 5.1 и 5.2 и теоремы 5.1. В доказательстве теоремы 5.2 используется оценка

$$F^s(x) \leqslant s \sum_{P_{x,\mathcal{D}}} F^{s-1} f \quad (s \in \{q, r\} \text{ и } x \in \mathbb{R}^n \cup \mathcal{D})$$

для функции $F(x) = \sum_{P_{x,\mathcal{D}}} f$, где множество $\{f \neq 0\}$ конечно. Она является частным случаем аналогичного неравенства для дерева $T = \mathcal{D}(K)$, где куб $K \in \mathcal{D}$ столь большой, что $\mathcal{D}(K) \supset P_{x,\mathcal{D}} \cap \{f \neq 0\}$.

Пусть $0 < l < n/p = n/q$ и $v(Q) = \ell_Q^{n-lp}$. Тогда, как и выше, число $B_{\mathcal{D}}(P)$ равно левой части условия (2.12), а само условие (2.12) означает, что $C_{\mathcal{D}} \leqslant A_7$. По теореме 5.2(a) условия (2.5) и (2.12) равносильны неравенству Харди (5.12). Эту эквивалентность можно использовать, чтобы транслировать контрпримеры к теореме Адамса при $p = q$, см. [20, с. 580] или [30, с. 208], в контрпримеры к теореме 5.2(b) при $p = q$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.И. Парфёнов. *Дискретная норма на липшицевой поверхности и соболевская распрямляемость границы* // Матем. труды. **10**:2, 163–186 (2007).
2. N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer. *Carleson measures for analytic Besov spaces* // Rev. Mat. Iberoam. **18**:2, 443–510 (2002).
3. N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer. *Carleson measures for the Drury-Arveson Hardy space and other Besov-Sobolev spaces on complex balls* // Adv. Math. **218**:4, 1107–1180 (2008).
4. N. Arcozzi, R. Rochberg, E.T. Sawyer, B.D. Wick. *Potential theory on trees, graphs and Ahlfors-regular metric spaces* // Potential Anal. **41**, 317–366 (2014).
5. N. Arcozzi, I. Holmes, P. Mozolyako, A. Volberg. *Bellman function sitting on a tree* // Int. Math. Res. Not. **2021**:16, 12037–12053 (2021).
6. A.A. Vasil'eva. *Estimates for norms of two-weighted summation operators on trees for* $1 < p < q < \infty$ // Preprint: arXiv: 1509.06974 (2015).
7. A.A. Vasil'eva. *Estimates for norms of two-weighted summation operators on a tree under some restrictions on weights* // Math. Nachr. **288**:10, 1179–1202 (2015).
8. W.D. Evans, D.J. Harris, L. Pick. *Weighted Hardy and Poincaré inequalities on trees* // J. London Math. Soc. II Ser. **52**:1, 121–136 (1995).
9. D.E. Edmunds, W.D. Evans. *Hardy operators, function spaces and embeddings.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. 2004.
10. А.И. Парфёнов. *Характеризация мультипликаторов в пространствах Хедберга-Нетрусова* // Матем. труды. **14**:1, 158–194 (2011).
11. А.И. Парфёнов. *Критерий соболевской корректности задачи Дирихле для уравнения Пуассона в липшицевых областях. II* // Сиб. электрон. матем. изв. **20**:1, 211–244 (2023).
12. N. Arcozzi, P. Mozolyako, K.-M. Perfekt, G. Sarfatti. *Bi-parameter potential theory and Carleson measures for the Dirichlet space on the bidisc* // Preprint: arXiv: 1811.04990 (2018).
13. Ф.Л. Назаров, С.Р. Трейль. *Охота на функцию Беллмана: приложения к оценкам сингулярных интегральных операторов и к другим классическим задачам гармонического анализа* // Алгебра и анализ. **8**:5, 32–162 (1996).
14. P. Mozolyako, G. Psaromiligkos, A. Volberg, P. Zorin-Kranich. *Carleson embedding on the tri-tree and on the tri-disc* // Rev. Mat. Iberoam. **38**:7, 2069–2116 (2022).
15. D.H. Luecking. *Embedding theorems for spaces of analytic functions via Khinchine's inequality* // Mich. Math. J. **40**:2, 333–358 (1993).
16. I.E. Verbitsky. *Nonlinear potentials and trace inequalities* // Oper. Theory Adv. Appl. **110**, 323–343 (1999).
17. N. Arcozzi. *Carleson measures for analytic Besov spaces: the upper triangle case* // J. Inequal. Pure Appl. Math. **6**:1, Paper No. 13 (2005).
18. C. Cascante, J.M. Ortega, I.E. Verbitsky. *On* L^p-L^q *trace inequalities* // J. Lond. Math. Soc. II Ser. **74**:2, 497–511 (2006).

19. A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson. *The Hardy inequality. About its history and some related results.* Pilsen: Vydavatelský Servis. 2007.
20. V.G. Maz'ya. *Sobolev spaces. With applications to elliptic partial differential equations.* Berlin: Springer. 2011.
21. Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтльвуд, Г. Полиа. *Неравенства.* М.: Гос. изд. иностр. лит. 1948.
22. И.С. Кац, М.Г. Крейн. *Критерий дискретности спектра сингулярной струны* // Изв. вузов. Матем. **1958**:2, 136–153 (1958).
23. G. Talenti. *Osservazioni sopra una classe di disuguaglianze* // Rend. Sem. Mat. Fis. Milano. **39**, 171–185 (1969).
24. G. Tomaselli. *A class of inequalities* // Boll. Unione Mat. Ital. IV Ser. **2**, 622–631 (1969).
25. T. Walsh. *On weighted norm inequalities for fractional and singular integrals* // Can. J. Math. **23**:5, 907–928 (1971).
26. G. Bennett. *Some elementary inequalities* // Q. J. Math. Oxf. II Ser. **38**:4, 401–425 (1987).
27. S. Bloom, R. Kerman. *Weighted norm inequalities for operators of Hardy type* // Proc. Amer. Math. Soc. **113**:1, 135–141 (1991).
28. D.R. Adams, L.I. Hedberg. *Function spaces and potential theory.* Berlin: Springer-Verlag. 1996.
29. D.A. Stegenga. *Multipliers of the Dirichlet space* // Ill. J. Math. **24**:1, 113–139 (1980).
30. R. Kerman, E. Sawyer. *The trace inequality and eigenvalue estimates for Schrödinger operators* // Ann. Inst. Fourier. **36**:4, 207–228 (1986).
31. V.G. Maz'ya, I.E. Verbitsky. *Capacitary inequalities for fractional integrals, with applications to partial differential equations and Sobolev multipliers* // Ark. Mat. **33**:1, 81–115 (1995).
32. M. Christ. *A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral* // Colloq. Math. **60/61**:2, 601–628 (1990).
33. Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах.* М.: Физматлит. 2004.
34. Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* М.: Мир. 1973.
35. G. Bennett. *Some elementary inequalities. III* // Q. J. Math. Oxf. II Ser. **42**:1, 149–174 (1991).
36. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа. 2-е изд.* М.: Наука. 1968.

Антон Игоревич Парфёнов,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. акад. Коптюга, 4,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: parfenov@math.nsc.ru