УДК 517.547.22

О НУЛЯХ И ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО РОСТА

Г.Г. БРАЙЧЕВ

Аннотация. В статье для важного класса целых функций нулевого порядка выявляются непосредственные, прямые связи между скоростью стремления к бесконечности последовательности нулей и скоростью стремления к нулю последовательности тейлоровских коэффициентов. Применяя коэффициентную характеризацию роста целых функций и некоторые тауберовы теоремы из выпуклого анализа, мы получаем точные асимптотические оценки, связывающие нули λ_n и спрямленные по Адамару тейлоровские коэффициенты $\hat{f}_n$ для целых функций логарифмического роста. В ситуациях, когда функция обладает той или иной регулярностью поведения, упомянутые оценки переходят в точные асимптотические формулы. Например, если целая функция имеет регулярный по Борелю рост и точка $a = 0$ не является ее борелевским исключительным значением, то при $n \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство $\ln |\lambda_n| \sim \ln(\hat{f}_{n-1}/\hat{f}_n)$. Результат верен и для функций совершенно регулярного логарифмического роста, причем в последнем случае дополнительно можно утверждать, что $\ln |\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n| \sim \ln \hat{f}_n^{\,-1}$ при $n \to \infty$.

Ключевые слова: целая функция, последовательность нулей, тейлоровские коэффициенты, спрямленные по Адамару тейлоровские коэффициенты, логарифмический порядок, логарифмический тип.

Mathematics Subject Classification: 30D15, 30B10

1. Введение. Предварительные сведения

Настоящая работа является продолжением серии статей [1], [2], в которых изучалось совместное поведение нулей и тейлоровских коэффициентов целой функции. Здесь мы начинаем с рассмотрения целых функций положительного порядка, чтобы показать, что для изучения аналогичных вопросов в классе функций нулевого порядка требуется отдельное исследование. Как и в [1], [2], нас будет интересовать получение двусторонних оценок и асимптотических равенств, связывающих нули и тейлоровские коэффициенты рассматриваемых целых функций.

Каждая целая функция представляется рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, z^n, \qquad f_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

сходящимся всюду в комплексной плоскости.

Целую функцию конечного порядка ρ (определение порядка приводится ниже) с последовательностью нулей $\Lambda = \Lambda_f = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно представить также и в виде произведения Адамара

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z^2}{2\lambda_n^2} + \ldots + \frac{z^p}{p\lambda_n^p}}, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1.2}$$

где m — кратность нуля в точке $z = 0$, $p \leqslant \rho$, и $P(z)$ — многочлен степени $\leqslant \rho$ (см. [3]). Будем в дальнейшем предполагать, что f имеет бесконечно много нулей, они записаны в порядке неубывания модулей и с учетом кратностей. Для простоты считаем также, что $f_0 = f(0) = 1$.

G.G. Braichev, On zeros and Taylor coefficients of entire function of logarithmic growth.

© Брайчев Г.Г. 2024.

Поступила 18 августа 2023 г.

Через $M_f(r)$ обозначим максимум модуля функции f в круге $|z| \leqslant r$, т.е. величину

$$M_f(r) = \max_{|z|\leqslant r} |f(z)| = \max_{|z|=r} |f(z)|, \qquad r > 0.$$

Как известно, $M_f(r)$ — возрастающая, выпуклая относительно $\ln r$ функция. Скорость ее стремления к бесконечности связана с асимптотическим поведением последовательности тейлоровских коэффициентов $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ и последовательности нулей $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ функции f.

Борель [4] ввел понятия порядка и нижнего порядка функции, предложив вычислять эти характеристики по формулам

$$\rho = \rho_f = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}, \qquad \lambda = \lambda_f = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}.$$

Если величины порядков совпадают, т.е. $\rho_f = \lambda_f$, то говорят, что f имеет регулярный по Борелю рост (порядка ρ). Порядок целой функции можно вычислить также через коэффициенты ее ряда Тейлора по известной формуле

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln|f_n|^{-1}}.$$

Аналогичная формула для вычисления нижнего порядка с заменой верхнего предела на нижний в общем случае не верна, поскольку последовательность тейлоровских коэффициентов f_n может содержать бесконечную нулевую подпоследовательность, как, например, в рядах четных функций или в лакунарных рядах. Для преодоления этого обстоятельства и получения формул не только для нижнего порядка, но и для других нижних характеристик роста целых функций, рассматриваемых ниже, мы, как и в работе [2], вводим спрямленные (сглаженные, регуляризованные) по Адамару коэффициенты степенных рядов.

Коротко опишем процедуру сглаживания коэффициентов f_n. Нанесем на плоскость точки $(n, -\ln|f_n|)$, где $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$, и обозначим через Γ ломаную, являющуюся границей выпуклой оболочки множества этих точек. Эта ломаная называется ломаной Ньютона-Адамара целой функции $f(z)$. Если $y = G(x)$, $x \geqslant 0$, задает уравнение Γ, то спрямленные по Адамару коэффициенты определяются равенствами

$$\hat{f}_n = e^{-G(n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

По определению точки $(n, -\ln\hat{f}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, лежат на ломаной Γ. Поэтому последовательность $\{1/\hat{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ является логарифмически выпуклой. Если последовательность $\{1/|f_n|\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ является логарифмически выпуклой, то, очевидно, выполняются равенства $\hat{f}_n = |f_n|$, $n \in \mathbb{N}_0$. Так будет, например (см. [5, Th. 2.11.8*]), если целая функция имеет порядок, не превосходящий единицы и только отрицательные нули. В общем случае для всех $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется неравенство $|f_n| \leqslant \hat{f}_n$ со знаком равенства в абсциссах вершин ломаной Ньютона–Адамара.

Для целых функций конечного порядка

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, z^n, \qquad \hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n\, z^n$$

справедливо соотношение

$$\ln M_f(r) \sim \ln M_{\hat{f}}(r), \qquad r \to +\infty.$$

Поэтому классические характеристики роста у такой пары целых функций соответственно совпадают. В частности, f и $\hat{f}$ имеют одинаковые порядки и одинаковые нижние порядки. Таким образом, можем записать

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln|f_n^{-1}|} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln\hat{f}_n^{-1}}, \qquad \lambda = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln\hat{f}_n^{-1}}. \tag{1.3}$$

Происхождение первой части формулы (1.3) — для порядка функции — ясно из предыдущего. Вторая часть формулы (1.3) — для нижнего порядка — доказывается обычными методами с учетом логарифмической выпуклости последовательности $\{1/\hat{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ (см. [6]).

Нам понадобятся менее известные формулы. Обозначим

$$R_n = \hat{f}_{n-1}/\hat{f}_n, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad R_0 = 1.$$

Как мы убедимся позже, именно с последовательностью R_n ближе всего связана последовательность нулей (точнее, модулей нулей) целой функции, заданной рядом (1.1). Логарифмическая выпуклость последовательности $\{1/\hat{f}_n\}$ влечет возрастание последовательности R_n. Применим к выпуклым последовательностям $x_n = n\ln n$ и $y_n = -\ln \hat{f}_n$ уточнение теоремы Штольца, доказанное в работе [7, теорема 2.7]. Согласно этой теореме имеем

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{\ln \hat{f}_n^{-1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln n}{\ln \hat{f}_{n-1} - \ln \hat{f}_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln R_n}.$$

Такие же равенства верны и для нижнего предела. Таким образом, справедливы формулы[1]

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln R_n}, \qquad \lambda = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln R_n}. \tag{1.4}$$

Обратимся теперь к характеристикам роста последовательности нулей целой функции. Пусть $n(r) = \sum\limits_{|\lambda_n|\leqslant r} 1$ — считающая функция последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, а $N(r) = \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt$ — ее усредненная считающая функция (в прежнем предположении $f(0)=1$). Показатель сходимости последовательности нулей целой функции f определяется равенством

$$\tau = \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^\alpha} < +\infty\right\}.$$

Этот показатель может быть найден по формулам

$$\tau = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln n(r)}{\ln r} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|}. \tag{1.5}$$

Определим также нижнюю характеристику роста последовательности нулей

$$\mu = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln n(r)}{\ln r} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|}. \tag{1.6}$$

Величины τ и μ назовем верхней и нижней логарифмическими плотностями последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$. Будем говорить, что Λ логарифмически измерима, если $\tau = \mu$. Заметим, что введенные логарифмические плотности последовательности не изменятся, если в их определениях — равенствах (1.5) и (1.6) — заменить считающую функцию $n(r)$ на усредненную считающую функцию $N(r)$. Такая замена основана на оценках

$$N(r) = \int_c^r \frac{n(t)}{t}\,dt \leqslant n(r)\ln\frac{r}{c}, \qquad 0 < c < |\lambda_1|, \quad r > c, \tag{1.7}$$

$$N(r) \geqslant \int_{r^\alpha}^r \frac{n(t)}{t}\,dt \geqslant n(r^\alpha)\ln r^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \quad r > 1. \tag{1.8}$$

Теперь, применив теорему Штольца, получим полезные формулы

$$\tau = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln N(r)}{\ln r} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{\ln|\lambda_1\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n|}, \tag{1.9}$$

$$\mu = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln N(r)}{\ln r} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{\ln|\lambda_1\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n|}. \tag{1.10}$$

Пусть теперь задано число $a \in \mathbb{C}$. Как обычно, a–точками целой функции f называем корни уравнения $f(z) = a$ и обозначаем через τ_a показатель сходимости последовательности ее a–точек.

[1]На возможность применения первой из формул (1.4) для вычисления порядка ρ указано в задаче 52 классической книги [8].

При любом $a \in \mathbb{C}$ справедливо неравенство $\tau_a \leqslant \rho$, где ρ — порядок f. Борель доказал, что за возможным исключением единственого значения a выполняется равенство $\tau_a = \rho$. Значение, для которого это равенство нарушается, называется исключительным по Борелю[2]. Отметим, что целые функции нецелого порядка не имеют исключительных по Борелю значений. Отметим также, что регулярный по Борелю рост целой функции не влечет логарифмической измеримости ее нулей, и наоборот. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть целую функцию, представленную бесконечным произведением (1.2), внешний экспоненциальный сомножитель которого содержит многочлен P степени, большей показателя сходимости последовательности нулей.

Все подготовлено для доказательства основных результатов этого раздела.

Теорема 1.1. *Пусть f — целая функция порядка $\rho > 0$ и нижнего порядка λ, а τ и μ — верхняя и нижняя логарифмические плотности последовательности ее нулей. Тогда спрямленные тейлоровские коэффициенты и нули функции f связаны неравенствами*

$$\frac{\lambda}{\tau} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} \leqslant \min\left\{\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\rho}{\tau}\right\}, \tag{1.11}$$

$$\max\left\{\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\rho}{\tau}\right\} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} \leqslant \frac{\rho}{\mu}, \tag{1.12}$$

где $R_n = \hat{f}_{n-1}/\hat{f}_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Проверка заявленных неравенств основана на сравнении формул для логарифмических плотностей последовательности нулей функции с соответствующими формулами коэффициентного вычисления порядка и нижнего порядка этой функции. Так, применяя формулы (1.4)–(1.6), получаем

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{\ln R_n}}{\frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|}} \geqslant \frac{\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln R_n}}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|}} = \frac{\lambda}{\tau}.$$

Оценка сверху нижнего предела дроби через нижние пределы числителя и знаменателя дает

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} \leqslant \frac{\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln R_n}}{\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|}} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Аналогичная оценка через верхние пределы приводит к соотношению

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} \leqslant \frac{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln R_n}}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|}} = \frac{\rho}{\tau}.$$

Этим доказаны неравенства (1.11). Точно так же

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} \leqslant \frac{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln R_n}}{\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|}} = \frac{\rho}{\mu},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} \geqslant \frac{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln R_n}}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|}} = \frac{\rho}{\tau}, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} \geqslant \frac{\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln R_n}}{\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|}} = \frac{\lambda}{\mu},$$

что доказывает неравенства (1.12). □

В качестве следствия получаем такое утверждение.

[2]Значение $a \in \mathbb{C}$ называется для целой функции f исключительным по Борелю, если категория роста считающей функции последовательности ее a–точек ниже категории роста логарифма максимума модуля этой функции (подробности см. в [3]).

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1.*

I. Если функция имеет регулярный по Борелю рост, то справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n}=\frac{\rho}{\tau}, \qquad \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n}=\frac{\rho}{\mu}\,.$$

II. Если последовательность нулей функции логарифмически измерима, то справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n}=\frac{\lambda}{\tau}\,, \qquad \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n}=\frac{\rho}{\tau}\,,$$

III. Если выполнены условия пунктов I и II, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n}=\frac{\rho}{\tau}\,.$$

Если к тому же $a=0$ не является борелевским исключительным значением функции, то справедлива асимптотика

$$\ln|\lambda_n|\sim\ln R_n\,, \quad n\to\infty.$$

Доказательство. Достаточно применить теорему 1.1, учитывая, что $\rho=\lambda$, когда функция имеет регулярный по Борелю рост; $\tau=\mu$, когда последовательность нулей функции логарифмически измерима; и, наконец, $\rho=\tau$, когда значение $a=0$ не является исключительным по Борелю для целой функции. □

Теорема 1.2 показывает, что оценки из теоремы 1.1 точны, с предъявлением классов функций, на которых эти оценки достигаются. Напомним, что целые функции любого нецелого, а также нулевого порядка не имеют исключительных борелевских значений. Обратим еще внимание на то, что в случае целых функций нулевого порядка (т.е. при $\rho=0$) приведенные выше результаты теряют смысл. Этот случай рассматривается в следующем разделе.

2. Целые функции логарифмического роста

Впервые асимптотику, связывающую нули целой функции с ее тейлоровскими коэффициентами, дал Валирон [9]. Он доказал, что если тейлоровские коэффициенты целой функции отличны от нуля и удовлетворяют условию

$$\frac{f_{n-1}f_{n+1}}{f_n^2}\to 0, \qquad n\to\infty, \tag{2.1}$$

то верна асимптотическая формула

$$\lambda_n\sim-\frac{f_{n-1}}{f_n}, \qquad n\to\infty. \tag{2.2}$$

Заметим, что весьма ограничительное условие (2.1) не является необходимым для выполнения асимптотического соотношения (2.2). Действительно, целая функция

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{q^n}\right), \qquad |q|>1, \tag{2.3}$$

удовлетворяет уравнению

$$f(qz)=(1+z)\,f(z), \qquad z\in\mathbb{C}.$$

Разлагая $f(z)$ в степенной ряд и приравнивая тейлоровские коэффициенты, последовательно получаем, что

$$f(0)=f_0=1, \qquad q^nf_n=f_n+f_{n-1}, \qquad f_n=\frac{f_{n-1}}{q^n-1}, \quad n\in\mathbb{N}\,.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lambda_n=-q^n\sim-(q^n-1)=-\frac{f_{n-1}}{f_n}, \qquad n\to\infty,$$

и условие (2.2) выполняется, а условие (2.1) — нет, поскольку

$$\frac{f_{n-1}f_{n+1}}{f_n^2}=\frac{q^n-1}{q^{n+1}-1}\to\frac{1}{q}\neq 0, \qquad n\to\infty.$$

Целые функции, коэффициенты которых подчинены требованию (2.1), имеют медленный рост, точнее, удовлетворяют условию

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln M_f(r)}{\ln^2 r}=0.$$

Функция, заданная произведением (2.3), удовлетворяет более слабому, чем (2.1), условию

$$\frac{|f_n|^2}{|f_{n-1}||f_{n+1}|}\geqslant A>0,\qquad n\geqslant n_0(A)\,. \tag{2.4}$$

Ограничение (2.4) на тейлоровские коэффициенты целой функции эквивалентно «смягченному» (символ o заменен на символ O) ограничению

$$\ln M_f(r)=O(\ln^2 r),\qquad r\to+\infty,$$

на рост самой функции.

Мы рассмотрим здесь более широкие классы целых функций логарифмического роста, выделяемые условием

$$\ln M_f(r)=O(h(r)),\qquad r\to+\infty,$$

в котором функция $h(r)$, называемая далее весом, определена, неограниченно возрастает, дифференцируема на $(0,+\infty)$ и такова, что

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{r\,h'(r)\ln r}{h(r)}=q,\qquad 1\leqslant q<+\infty\,, \tag{2.5}$$

как, например, «модельный» вес $h(r)=\ln^q r$ с $q\geqslant 1$ или веса Линделефа — конечные произведения вида $h(r)=\ln^q r\cdot\ln^s(\ln r)\cdot\ldots$, содержащие степени итераций логарифма.

Введем характеристики роста целых функций (и последовательностей их нулей) из классов, определяемых весами со свойством (2.5). Вначале дадим вспомогательные определения. Логарифмическим порядком (коротко, ln-порядком) и нижним логарифмическим порядком (коротко, нижним ln-порядком) целой функции назовем величины

$$\gamma=\gamma_f=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln\ln r},\qquad \eta=\eta_f=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln\ln r}.$$

Если эти величины совпадают, т.е. $\gamma_f=\eta_f$, то говорим, что f имеет регулярный логарифмический рост. Из известной теоремы Лиувилля следует, что целая функция с нижним логарифмическим порядком $\eta_f<1$ является константой. Поэтому трансцендентная (т.е. отличная от многочлена) целая функция логарифмического порядка $\gamma_f=1$ имеет регулярный логарифмический рост. Логарифмический порядок и нижний логарифмический порядок целой функции, представленной рядом Тейлора (1.1), могут быть найдены по формулам (см. [6], [10])

$$\gamma-1=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\ln|f_n|^{-\frac1n}}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\ln\hat f_n^{\,-\frac1n}}\,, \tag{2.6}$$

$$\eta-1=\varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\ln\hat f_n^{\,-\frac1n}}\,. \tag{2.7}$$

Определим плотностные характеристики роста последовательности нулей $\{\lambda_n\}$ целой функции конечного логарифмического порядка. Верхней билогарифмической плотностью (коротко, верхней $\ln_2$-плотностью) последовательности $\{\lambda_n\}$ назовем верхний предел

$$\overline{\Delta}_{\ln_2}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\ln|\lambda_n|}=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln n(r)}{\ln\ln r}, \tag{2.8}$$

а нижней билогарифмической плотностью этой последовательности (нижней $\ln_2$-плотностью) — соответствующий нижний предел

$$\underline{\Delta}_{\ln_2}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\ln|\lambda_n|}=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{\ln n(r)}{\ln\ln r}. \tag{2.9}$$

Будем говорить, что последовательность билогарифмически измерима, если ее верхняя и нижняя билогарифмические плотности совпадают, т.е. $\underline{\Delta}_{\ln_2}=\overline{\Delta}_{\ln_2}$.

Усредненные верхняя и нижняя билогарифмические плотности последовательности определяются по формулам, аналогичным (2.8), (2.9), но с заменой считающей функции $n(r)$ на усредненную считающую функцию $N(r)$. Именно,

$$\overline{\Delta}^*_{\ln_2} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln N(r)}{\ln\ln r}, \tag{2.10}$$

$$\underline{\Delta}^*_{\ln_2} = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln N(r)}{\ln\ln r}. \tag{2.11}$$

Величины (2.8) и (2.10), а также (2.9) и (2.11) попарно связаны простыми равенствами

$$\overline{\Delta}_{\ln_2} = \overline{\Delta}^*_{\ln_2} - 1, \qquad \underline{\Delta}_{\ln_2} = \underline{\Delta}^*_{\ln_2} - 1. \tag{2.12}$$

Вывод формул (2.12) основан на оценках (1.7), (1.8) (см. также [10]). Для понимания сути происходящего полезно сопоставить (2.8)–(2.12) с (1.5)–(1.10).

Применяя формулы (2.6)–(2.9), приходим к следующему результату.

Теорема 2.1. *Пусть f — целая функция логарифмического порядка γ и нижнего логарифмического порядка $\eta > 1$, а $\underline{\Delta}_{\ln_2}$ и $\overline{\Delta}_{\ln_2}$ — нижняя и верхняя билогарифмические плотности последовательности ее нулей. Тогда спрямленные тейлоровские коэффициенты и нули этой функции связаны неравенствами*

$$\frac{\eta-1}{\overline{\Delta}_{\ln_2}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln\ln|\lambda_n|}{\ln\ln \hat{f}_n^{-\frac{1}{n}}} \leqslant \min\left\{\frac{\eta-1}{\underline{\Delta}_{\ln_2}}, \frac{\gamma-1}{\overline{\Delta}_{\ln_2}}\right\}, \tag{2.13}$$

$$\max\left\{\frac{\eta-1}{\underline{\Delta}_{\ln_2}}, \frac{\gamma-1}{\overline{\Delta}_{\ln_2}}\right\} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln\ln|\lambda_n|}{\ln\ln \hat{f}_n^{-\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{\gamma-1}{\underline{\Delta}_{\ln_2}}. \tag{2.14}$$

I. Если функция имеет регулярный логарифмический рост, то выполняются равенства

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln\ln|\lambda_n|}{\ln\ln \hat{f}_n^{-\frac{1}{n}}} = \frac{\gamma-1}{\overline{\Delta}_{\ln_2}}, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln\ln|\lambda_n|}{\ln\ln \hat{f}_n^{-\frac{1}{n}}} = \frac{\gamma-1}{\underline{\Delta}_{\ln_2}}.$$

II. Если последовательность нулей функции билогарифмически измерима, то справедливы равенства

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln\ln|\lambda_n|}{\ln\ln \hat{f}_n^{-\frac{1}{n}}} = \frac{\eta-1}{\overline{\Delta}_{\ln_2}}, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln\ln|\lambda_n|}{\ln\ln \hat{f}_n^{-\frac{1}{n}}} = \frac{\gamma-1}{\overline{\Delta}_{\ln_2}}.$$

III. Если выполнены условия пунктов I и II, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\ln|\lambda_n|}{\ln\ln \hat{f}_n^{-\frac{1}{n}}} = \frac{\gamma-1}{\overline{\Delta}_{\ln_2}}.$$

Формулы (2.13), (2.14) являются подходящими аналогами формул (1.11), (1.12). Доказательство теоремы 2.1 повторяет рассуждения из доказательств теорем 1.1, 1.2, и поэтому мы его опускаем.

Введем более тонкие характеристики целой функции логарифмического роста и последовательности ее нулей. Пусть вес $h(r)$ удовлетворяет условию (2.5). Тип и нижний тип целой функции относительно $h(r)$ (коротко, h–тип и нижний h–тип) определяются соответственно формулами

$$T_h = T_h(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)}, \qquad t_h = t_h(f) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)}. \tag{2.15}$$

Следуя терминологии Валирона [9], говорим, что целая функция имеет совершенно регулярный логарифмический рост, или, точнее, совершенно регулярный h–рост, если ее h–тип и нижний h–тип совпадают, т.е. если $T_h = t_h$.

Следующие величины характеризуют рост последовательности Λ нулей целой функции f. Верхняя и нижняя h–плотности Λ, а также усредненные верхняя и нижняя h–плотности Λ определяются соответственно формулами

$$\overline{\Delta}_h = \overline{\Delta}_h(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{rh'(r)}\,, \qquad \underline{\Delta}_h = \underline{\Delta}_h(\Lambda) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{rh'(r)}\,,$$
$$\overline{\Delta}_h^* = \overline{\Delta}_h^*(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N(r)}{h(r)}\,, \qquad \underline{\Delta}_h^* = \underline{\Delta}_h^*(\Lambda) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N(r)}{h(r)}\,.$$

Пусть $q \geqslant 1$ — величина предела в (2.5). При $q > 1$ введенные характеристики удовлетворяют неравенствам

$$a_1\,\overline{\Delta}_h^* \leqslant \underline{\Delta}_h \leqslant \underline{\Delta}_h^*\,, \quad \overline{\Delta}_h^* \leqslant \overline{\Delta}_h \leqslant a_2\,\overline{\Delta}_h^*\,,$$

где a_1, a_2 — корни уравнения

$$qa + (1-q)\,a^{\,q/(q-1)} = \underline{\Delta}_h^* \,/\, \overline{\Delta}_h^*\,. \tag{2.16}$$

При $q = 1$ имеем

$$\underline{\Delta}_h = \underline{\Delta}_h^*\,, \quad \overline{\Delta}_h = \overline{\Delta}_h^*\,.$$

Если $\overline{\Delta}_h(\Lambda) = \underline{\Delta}_h(\Lambda)$, или, что равносильно, $\overline{\Delta}_h^*(\Lambda) = \underline{\Delta}_h^*(\Lambda)$, то говорим, что последовательность Λ является h–измеримой. Заметим, что желание измерять плотностные характеристики роста последовательности нулей, сравнивая считающую и усредненную считающую функции с одной функцией роста $h(r)$, оказывается неоправданным. Действительно, рассматривая аналогично усредненной верхней h–плотности $\overline{\Delta}_h^*$ величину верхнего предела $\varlimsup\limits_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{h(r)} = \delta$, для целых функций нулевого порядка с конечным h–типом будем иметь равенство $\delta = 0$. Действительно, при любом $k > 1$ последовательно получаем (ср. с [11]) соотношения

$$N(kr) \geqslant \int\limits_r^{kr} \frac{n(t)}{t}\,dt \geqslant n(r)\ln k, \qquad \frac{N(kr)}{h(kr)}\,\frac{h(kr)}{h(r)} \geqslant \frac{n(r)}{h(r)}\,\ln k.$$

Поскольку $h(kr) \sim h(r)$ при $r \to +\infty$, то переход к верхнему пределу дает $\overline{\Delta}_h^* \geqslant \delta\,\ln k$ с произвольным $k > 1$, откуда и вытекает, что $\delta = 0$.

Следующие неравенства, устанавливающие связь между ростом функции и ростом последовательности ее нулей, легко следуют из формулы Иенсена. Речь идет о соотношениях

$$\overline{\Delta}_h^* \leqslant T_h, \qquad \underline{\Delta}_h^* \leqslant t_h.$$

Как показано в диссертации [12, теоремы 2.11, 2.12], для функций нулевого порядка с конечным h–типом в обеих приведенных оценках достигаются равенства. Тем самым справедлив такой факт.

Предложение 2.1. *Пусть вес $h(r)$ удовлетворяет условию (2.5), а последовательность нулей целой функции конечного h–типа T_h и нижнего h–типа t_h имеет усредненные верхнюю и нижнюю h–плотности $\overline{\Delta}_h^*$ и $\underline{\Delta}_h^*$ соответственно. Тогда справедливы равенства*

$$\overline{\Delta}_h^* = T_h, \qquad \underline{\Delta}_h^* = t_h. \tag{2.17}$$

Кроме того, если в условии (2.5) константа $q = 1$, то дополнительно имеем

$$\overline{\Delta}_h = T_h, \qquad \underline{\Delta}_h = t_h. \tag{2.18}$$

Равенства (2.17) и (2.18) играют ключевую роль при установлении результатов о совместном изменении нулей и тейлоровских кэффициентов целой функции. Нам понадобятся формулы для вычисления h–типа и нижнего h–типа целой функции (определения даны в (2.15)) по ее тейлоровским коэффициентам (см., например, [6]).

Теорема A. *Пусть вес $h(r)$ удовлетворяет условию (2.5) с константой $q > 1$, и $k(\zeta)$ — обратная к $h(e^r)/r$ функция. Пусть, далее, целая функция f, представимая рядом (1.1), имеет*

h–тип $T_h = T \in (0, +\infty)$ и нижний h–тип $t_h = t$. Тогда ее спрямленные тейлоровские коэффициенты удовлетворяют равенствам

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{nk(n)}{\ln \hat{f}_n^{\,-1}} = \frac{q}{q-1}\,(Tq)^{\frac{1}{q-1}}\,, \tag{2.19}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{nk(n)}{\ln \hat{f}_n^{\,-1}} = \frac{q}{q-1}\,(tq)^{\frac{1}{q-1}}\,. \tag{2.20}$$

Следующие две теоремы являются основными результатами статьи.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы A. Если в (2.5) величина $q > 1$, то справедливы неравенства*

$$\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{q-1}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln \hat{f}_n^{\,-1}}{\ln|\lambda_1\lambda_2\,\ldots\,\lambda_n|} \leqslant 1 \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \hat{f}_n^{\,-1}}{\ln|\lambda_1\lambda_2\,\ldots\,\lambda_n|} \leqslant \left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{1}{q-1}}, \tag{2.21}$$

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{1}{q-1}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} \leqslant \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{q-1}}, \tag{2.22}$$

где $R_n = \hat{f}_{n-1}/\hat{f}_n$ и a_1, a_2 $(a_1 \leqslant 1 \leqslant a_2)$ суть корни уравнения (2.16), принимающего вид

$$qa + (1-q)\,a^{\,q/(q-1)} = t/T.$$

Если функция имеет совершенно регулярный h–рост, или, что равносильно, последовательность ее нулей h–измерима, то справедливы асимптотические равенства

$$\ln|\lambda_1\lambda_2\,\ldots\,\lambda_n| \sim \ln \hat{f}_n^{\,-1}, \qquad n\to\infty,$$

$$\ln|\lambda_n| \sim \ln R_n, \qquad n\to\infty,$$

Доказательство. В работе автора [2] показано, что верхняя и нижняя усредненные h–плотности $\overline{\Delta}_h^* = \overline{\Delta}^*$ и $\underline{\Delta}_h^* = \underline{\Delta}^*$ последовательности нулей функции f совпадают соответственно с верхним и нижним h–типом вспомогательной функции $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$, построенной по нулям исходной функции $f(z)$. Поэтому для вычисления нужных величин используем формулы, аналогичные (2.19), (2.20), с заменой $\hat{f}_n^{\,-1}$ на логарифмически выпуклую последовательность $|\lambda_1\lambda_2\,\ldots\,\lambda_n|$. Именно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{nk(n)}{\ln|\lambda_1\lambda_2\,\ldots\,\lambda_n|} = \frac{q}{q-1}\left(\overline{\Delta}^* q\right)^{\frac{1}{q-1}}, \tag{2.23}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{nk(n)}{\ln|\lambda_1\lambda_2\,\ldots\,\lambda_n|} = \frac{q}{q-1}\,(\underline{\Delta}^* q)^{\frac{1}{q-1}}\,. \tag{2.24}$$

Оценим обычным образом верхний и нижний пределы частного в (2.21), используя формулы (2.19), (2.20), (2.23), (2.24) и равенства (2.17) из предложения 2.1. Получим

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \hat{f}_n^{\,-1}}{\ln|\lambda_1\lambda_2\,\ldots\,\lambda_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\frac{nk(n)}{\ln|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n|}}{\frac{nk(n)}{\ln \hat{f}_n^{\,-1}}} \leqslant \frac{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{nk(n)}{\ln|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n|}}{\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{nk(n)}{\ln \hat{f}_n^{\,-1}}} = \left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{1}{q-1}},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \hat{f}_n^{\,-1}}{\ln|\lambda_1\lambda_2\,\ldots\,\lambda_n|} \geqslant \frac{\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{nk(n)}{\ln|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n|}}{\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{nk(n)}{\ln \hat{f}_n^{\,-1}}} = \frac{t}{t} = 1.$$

Работа с нижним пределом в (2.21) привлекает те же соображения. Выкладки мы опустим.

Для вывода (2.22) применим доказанные в [6] оценки

$$\left(\overline{\Delta}^* q\right)^{\frac{1}{q-1}} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\ln|\lambda_n|} \leqslant \left(a_2\,\overline{\Delta}^* q\right)^{\frac{1}{q-1}}, \tag{2.25}$$

$$\left(a_1\,\overline{\Delta}^* q\right)^{\frac{1}{q-1}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\ln|\lambda_n|} \leqslant (\underline{\Delta}^* q)^{\frac{1}{q-1}}\,. \tag{2.26}$$

Согласно формуле Валирона [9] логарифм максимального члена $\mu(r)$ ряда Тейлора целой функции имеет такое же представление через центральный индекс $\nu(r)$, как и усредненная считающая функция последовательности нулей $N(r)$ через считающую функцию $n(r)$. Точнее,

$$\ln \mu(r) = \int\limits_0^r \frac{\nu(t)}{t}\, dt.$$

Поскольку центральный индекс $\nu(r)$ является считающей функцией последовательности R_n, то для него имеют место аналоги формул (2.25), (2.26) с заменой усредненных h-плотностей последовательности нулей целой функции на величины ее h-типов. Тем самым

$$(Tq)^{\frac{1}{q-1}} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\ln R_n} \leqslant (a_2 Tq)^{\frac{1}{q-1}}, \tag{2.27}$$

$$(a_1 Tq)^{\frac{1}{q-1}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\ln R_n} \leqslant (tq)^{\frac{1}{q-1}}. \tag{2.28}$$

Теперь результат (2.22) легко получить, используя оценки (2.25)–(2.28). В самом деле, правое неравенство в (2.22) выводится по схеме

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} \leqslant \frac{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\ln R_n}}{\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\ln|\lambda_n|}} \leqslant \frac{(a_2 Tq)^{\frac{1}{q-1}}}{\left(a_1 \overline{\Delta}^* q\right)^{\frac{1}{q-1}}} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{q-1}}.$$

Для вывода левой оценки в (2.22) запишем

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} \geqslant \frac{\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\ln R_n}}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\ln|\lambda_n|}} \geqslant \frac{(a_1 Tq)^{\frac{1}{q-1}}}{\left(a_2 \overline{\Delta}^* q\right)^{\frac{1}{q-1}}} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{1}{q-1}}.$$

Мы учли предложение 2.1, согласно которому выполнено равнство $T = \overline{\Delta}^*$.

Последнее утверждение теоремы получим, если примем во внимание, что в указанных условиях справедливы равенства $T = t = \underline{\Delta}^* = \overline{\Delta}^*$. При этом корни уравнения (2.16) совпадают и равны единице. Отметим, наконец, что последнее асимптотическое равенство в утверждении теоремы влечет предыдущее равенство в силу теоремы Штольца [7]. $\square$

Осталось рассмотреть случай очень медленного роста целой функции, когда ее логарифмический порядок равен единице. Здесь требуется отдельное исследование, поскольку предыдущие рассуждения теряют силу. В этом случае вес имеет вид $h(r) = \ln r \cdot h_1(r)$, где для функции $h_1(e^r)$ предел из (2.5) больше нуля. Выберем для наглядности модельный вес $h(r) = \ln r \cdot \ln^s(\ln r)$ с показателем $s > 0$.

Теорема 2.3. *Пусть вес $h(r) = \ln r \cdot \ln^s(\ln r)$, где $s > 0$, а целая функция f имеет конечный h-тип $T_h = T$ и нижний h-тип $t_h = t > 0$. Тогда ее спрямленные тейлоровские коэффициенты и нули удовлетворяют неравенствам*

$$\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln R_n)}{\ln(\ln|\lambda_n|)} \leqslant 1 \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln R_n)}{\ln(\ln|\lambda_n|)} \leqslant \left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{2.29}$$

Если целая функция f имеет совершенно регулярный h-рост или последовательность ее нулей h-измерима, то спрямленные тейлоровские коэффициенты $\{\hat{f}_n\}$ и нули $\{\lambda_n\}$ связаны асимптотической формулой

$$\ln(\ln|\lambda_n|) \sim \ln(\ln R_n), \qquad n \to \infty.$$

Здесь, как и прежде, обозначено $R_n = \hat{f}_{n-1}/\hat{f}_n$.

Доказательство. Поскольку вес $h(r)$ удовлетворяет условию (2.5) с константой $q = 1$, то согласно предложению 2.1 выполнены равенства $T = \overline{\Delta}$, $t = \underline{\Delta}$, которые в рассматриваемом случае, когда

$rh'(r) \sim \frac{h(r)}{\ln r}$ при $r \to +\infty$, можно записать в виде

$$T = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln r \ln^s(\ln r)} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{\ln^s(\ln r)} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\ln^s(\ln|\lambda_n|)} = \overline{\Delta}\,,$$

$$t = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln r \ln^s(\ln r)} = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{\ln^s(\ln r)} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{\ln^s(\ln|\lambda_n|)} = \underline{\Delta}\,.$$

Вычисления h–типов функции по тейлоровским коэффициентам проиводят к формулам

$$T = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\ln^s(\ln R_n)}, \qquad t = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{\ln^s(\ln R_n)}.$$

Теперь нетрудно оценить

$$T = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\ln^s(\ln|\lambda_n|)} \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{\ln^s(\ln R_n)} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^s(\ln R_n)}{\ln^s(\ln|\lambda_n|)} = t \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^s(\ln R_n)}{\ln^s(\ln|\lambda_n|)}.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^s(\ln R_n)}{\ln^s(\ln|\lambda_n|)} \leqslant \frac{T}{t}.$$

Оценка сверху дает

$$T = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\ln^s(\ln|\lambda_n|)} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\ln^s(\ln R_n)} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^s(\ln R_n)}{\ln^s(\ln|\lambda_n|)} = T \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^s(\ln R_n)}{\ln^s(\ln|\lambda_n|)},$$

откуда получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^s(\ln R_n)}{\ln^s(\ln|\lambda_n|)} \geqslant 1.$$

Поменяв местами в приведенных рассуждениях последовательности R_n и $|\lambda_n|$, получим оценки в левой части (2.29). Наконец, последнее утверждение теоремы следует из ее основной части при $t = T$. Доказательство завершено. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г.Г. Брайчев. *Совместные оценки корней и тейлоровских коэффициентов целой функции* // Уфимск. матем. журн., **13**:1, 31–45 (2021).
2. Г.Г. Брайчев. *О связи между ростом нулей и убыванием тейлоровских коэффициентов целой функции* // Матем. заметки, **113**:1, 32–45 (2023).
3. Б.Я. Левин. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат. 1956.
4. E. Borel. *Leçons sur les fonctions entières.* Paris: Gauthier-Villars, 2e édition. 1921.
5. R.P. Boas, Jr. *Entire functions.* New York: Acad. Press. 1954.
6. Г.Г. Брайчев. *Введение в теорию роста выпуклых и целых функций.* М.: Прометей. 2005.
7. G.G. Braichev. *On Stolz's theorem and its conversion* // Eurasian Math. J., **10**:3, 8–19 (2019).
8. Г. Полиа, Г. Сеге. *Задачи и теоремы из анализа.* Т. 2. М.: Наука. 1978.
9. G. Valiron. *Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance règulière* // Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, **5**, 117–257 (1913).
10. S. Shah, M. Ishaq. *Maximum modulus and the coefficients of an entire series* // J. Indian Math. Soc., **XVI**:4, 177–183 (1952).
11. А.А. Гольдберг, Н.В. Заболоцкий. *Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка* // Матем. заметки, **34**:2, 227–236 (1983).
12. Г.Г. Брайчев. *Экстремальные задачи в теории относительного роста выпуклых и целых функций.* Дисс. … д.ф.-м.н. М.: РУДН, 2018.

Георгий Генрихович Брайчев,
Московский педагогический государственный университет,
Краснопрудная, 14,
107140, г. Москва, Россия
Российский университет дружбы народов,
Математический институт имени С.М. Никольского,
Миклухо-Маклая, 6,
117198, г. Москва, Россия
E-mail: `braichev@mail.ru`