ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 1 (2012). С. 17-28.

УДК 517.9

О ПРИМЕНЕНИИ МОДЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ КОЦИКЛИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОЛУГРУППЫ СДВИГОВ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Г.Г. АМОСОВ, А.Д. БАРАНОВ, В.В. КАПУСТИН

Аннотация. В работе описывается конструкция коциклических возмущений полугруппы сдвигов на полупрямой, основанная на использовании теории модельных пространств. Показано, что, подбирая внутреннюю функцию, определяющую модельное пространство, можно добиться того, чтобы элементы возмущенной полугруппы имели предписанный спектральный тип и отличались от элементов исходной полугруппы на операторы класса Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$, $p > 1$. Отдельно рассматривается случай возмущений класса со следом $\mathfrak{S}_1$.

Ключевые слова: полугруппа сдвигов, внутренняя функция, классы Шаттена–фон Неймана.

1. Введение

Пусть $(S_t,\ t \geq 0)$ и $(\tilde{S}_t,\ t \in \mathbb{R})$ – полугруппа сдвигов в пространстве $H = L^2(\mathbb{R}_+)$ и группа сдвигов (ее унитарная дилатация) в пространстве $\tilde{H} = L^2(\mathbb{R})$, определенные формулами

$$(S_t f)(x) = \begin{cases} f(x-t), & x > t, \\ 0, & 0 \leq x \leq t, \end{cases} \qquad f \in H,$$

и

$$(\tilde{S}_t g)(x) = g(x-t), \qquad g \in \tilde{H}.$$

Иногда удобно считать, что мультипликативная группа алгебры $B(H)$ ограниченных операторов в пространстве H вложена в мультипликативную группу алгебры $B(\tilde{H})$ таким образом, что элементы $B(H)$ действуют на функциях $f \in \tilde{H}$ с носителем на отрицательной полуоси как тождественное отображение. В этом смысле операторы, действующие в пространстве H, будут рассматриваться также и как операторы в $\tilde{H}$. Сильно-непрерывное семейство унитарных операторов $(W_t,\ t \geq 0)$ в пространстве H называется *коциклом* полугруппы сдвигов $(S_t,\ t \geq 0)$, если выполнено условие (см. [1])

$$W_{t+s} = W_t \tilde{S}_t W_s \tilde{S}_{-t}, \quad t, s \geq 0, \qquad W_0 = I. \tag{1}$$

Из условия (1) вытекает, что семейство изометрических операторов $(V_t = W_t S_t,\ t \geq 0)$ в пространстве H образует полугруппу (т.е. $V_{t+s} = V_t V_s$, $t, s \geq 0$), которую будем называть *коциклическим возмущением* полугруппы сдвигов $(S_t,\ t \geq 0)$.

G.G. Amosov, A.D. Baranov, V.V. Kapustin, On applications of the model spaces to the construction of cocyclic perturbations of the semigroup of shifts on the semiaxis.

Работа поддержана программой РАН "Математические основы управления" и грантом РФФИ 11-01-00584-а.

Поступила 20 декабря 2011 г.

В предлагаемой работе будет показано, что любое коциклическое возмущение полугруппы (S_t) унитарно эквивалентно ортогональной сумме

$$(V_t) \cong (U_t \oplus S_t), \tag{2}$$

где $(U_t,\ t \geq 0)$ – полугруппа унитарных операторов, причем справедливы следующие две теоремы. Здесь и далее все рассматриваемые полугруппы предполагаются сильно-непрерывными; символом $\mathfrak{S}_p$ обозначаются классы операторов Шаттена–фон Неймана.

Теорема 1. *Для любой полугруппы унитарных операторов $(U_t,\ t \geq 0)$ со спектральной мерой, сингулярной относительно меры Лебега, найдется коцикл $(W_t,\ t \geq 0)$, удовлетворяющий условию*

$$W_t - I \in \mathfrak{S}_p$$

для всех $p > 1$, для которого соотношение (2) *выполняется для коциклического возмущения $(V_t = W_t S_t,\ t \geq 0)$, причем*

$$V_t - S_t \in \mathfrak{S}_1, \qquad t \geq 0. \tag{3}$$

Как следствие, из теоремы 1 получается аналогичный результат для произвольной (не обязательно сингулярной) спектральной меры.

Теорема 2. *Для любой полугруппы унитарных операторов $(U_t,\ t \geq 0)$ и для любого $p > 1$ найдется коцикл $(W_t,\ t \geq 0)$, удовлетворяющий условию*

$$W_t - I \in \mathfrak{S}_p$$

для всех $p > 1$, для которого соотношение (2) *выполняется для коциклического возмущения $(V_t = W_t S_t,\ t \geq 0)$.*

Ниже будет показано (предложение 10), что в рассматриваемой нами модели коциклических возмущений условие $W_t - I \in \mathfrak{S}_1$ никогда не выполняется. Таким образом, результаты работы в определенном смысле неулучшаемы. Естественно предположить, что этот факт обобщается и на общий случай.

Гипотеза. Для любого коцикла $(W_t,\ t \geq 0)$ такого, что $W_t - I \in \mathfrak{S}_1$ при всех $t \geq 0$, возмущенная полугруппа $(V_t = W_t S_t,\ t \geq 0)$ унитарно эквивалентна исходной: $(V_t) \cong (S_t)$.

Отметим, что связанная с рассматриваемым вопросом задача о марковских коциклических возмущениях группы унитарных операторов была поставлена в [2], а в работах [3, 4] были построены марковские коциклы со свойством $W_t - I \in \mathfrak{S}_2,\ t \geq 0$. Свойство (3) рассматривалось в статье [5], где изучались возмущения $(V_t,\ t \geq 0)$ полугруппы сдвигов $(S_t,\ t \geq 0)$, для которых $V_t - S_t \in \mathfrak{S}_p,\ p \geq 1$. Отличие данной статьи состоит в том, что рассматриваемые возмущения обладают дополнительным свойством коцикличности, что требует рассмотрения унитарных дилатаций полугрупп. Техника, развиваемая здесь, аналогична использованной в работе [5].

2. Коциклические возмущения общего вида

Для любой сильно-непрерывной полугруппы изометрических операторов $(V_t,\ t \geq 0)$ в гильбертовом пространстве H определено разложение Вольда–Колмогорова следующего вида:

$$H = H_0 \oplus H_1,$$
$$V_t = U_t \oplus R_t, \qquad t \geq 0, \tag{4}$$

где $(U_t,\ t \geq 0)$ – полугруппа унитарных операторов в H_0, а $(R_t,\ t \geq 0)$ – полугруппа вполне неунитарных изометрических операторов в H_1, т.е. не имеющих нетривиальных инвариантных подпространств, на которых они действуют как унитарные операторы.

Предложение 3. *Пусть полугруппа изометрических операторов* $(V_t,\ t \geq 0)$ *является коциклическим возмущением полугруппы сдвигов* $(S_t,\ t \geq 0)$. *Тогда вполне неунитарная часть* $(R_t,\ t \geq 0)$ *в разложении Вольда–Колмогорова* (4) *унитарно эквивалентна полугруппе сдвигов* $(S_t,\ t \geq 0)$.

Замечание. Это утверждение справедливо для произвольной (не обязательно являющейся коциклическим возмущением) полугруппы изометрических операторов $(V_t,\ t \geq 0)$, если потребовать, чтобы $V_t - S_t \in \mathfrak{S}_p$, $p \geq 1$ (см. [5]).

Доказательство. Определим элементы $\xi_t \in H,\ t \geq 0$, по формуле

$$\xi_t(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq t, \\ 0, & x > t. \end{cases}$$

Заметим, что семейство $(\xi_t,\ t \geq 0)$ удовлетворяет так называемому условию *аддитивного коцикла* полугруппы $(S_t,\ t \geq 0)$, то есть

$$\xi_{t+s} = \xi_t + S_t \xi_s, \qquad s, t \geq 0,$$

причем функции $\xi_{t_1} - \xi_{s_1}$ и $\xi_{t_2} - \xi_{s_2}$ ортогональны, если $(s_1, t_1) \cap (s_2, t_2) = \emptyset$. Более того, линейные комбинации элементов $(\xi_s,\ 0 \leq s \leq t)$ порождают $\operatorname{Ker} S_t^*$. Положим $\tilde{\xi}_t = W_t \xi_t,\ t \geq 0$. Для доказательства предложения 3 достаточно убедиться, что для коциклического возмущения $(V_t = W_t S_t,\ t \geq 0)$ семейство элементов $\tilde{\xi}_t$ обладает следующими свойствами:

(i) $\tilde{\xi}_{t+s} = \tilde{\xi}_t + V_t \tilde{\xi}_s,\ s, t \geq 0$,

(ii) $\tilde{\xi}_{t_1} - \tilde{\xi}_{s_1}$ и $\tilde{\xi}_{t_2} - \tilde{\xi}_{s_2}$ ортогональны, если $(s_1, t_1) \cap (s_2, t_2) = \emptyset$,

(iii) линейные комбинации $(\tilde{\xi}_s,\ 0 \leq s \leq t)$ порождают $\operatorname{Ker} V_t^*$.

В самом деле, тогда сужение полугруппы $(V_t,\ t \geq 0)$ на подпространство H_0, порожденное $\operatorname{Ker} V_t^*,\ t \geq 0$, унитарно эквивалентно $(S_t,\ t \geq 0)$, а сужение $V_t|_{H_0^\perp}$ будет унитарным оператором, поскольку $\operatorname{Ker} V_t|_{H_0^\perp} = \{0\},\ t \geq 0$.

Имеем

$$\tilde{\xi}_{t+s} = W_{t+s} \xi_{t+s} = W_t \tilde{S}_t W_s \tilde{S}_{-t} \xi_t + W_t \tilde{S}_t (W_s) \tilde{S}_{-t} S_t \xi_s. \tag{5}$$

Заметим, что

$$\tilde{S}_t W_s \tilde{S}_{-t} \xi_s = \xi_s, \tag{6}$$

поскольку $W_s f = f$ для функций с носителем $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}_-$. С другой стороны,

$$\tilde{S}_t W_s \tilde{S}_{-t} S_t \xi_s = \tilde{S}_t W_s \xi_s = S_t \tilde{\xi}_s. \tag{7}$$

Подставляя соотношения (6) и (7) в равенство (5), получаем свойство (i).

Далее,

$$W_{t+s} \xi_t = W_t \tilde{S}_t (W_s) \tilde{S}_{-t} \xi_t = W_t \xi_t, \qquad s, t \geq 0, \tag{8}$$

в силу (6). Пусть $\tilde{t} = \max(t_1, t_2)$; тогда, принимая во внимание (8), получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{\xi}_{t_1} - \tilde{\xi}_{s_1}, \tilde{\xi}_{t_2} - \tilde{\xi}_{s_2}) &= (W_{t_1} \xi_{t_1} - W_{s_1} \xi_{s_1}, W_{t_2} \xi_{t_2} - W_{s_2} \xi_{s_2}) \\ &= (W_{\tilde{t}} \xi_{t_1} - W_{\tilde{t}} \xi_{s_1}, W_{\tilde{t}} \xi_{t_2} - W_{\tilde{t}} \xi_{s_2}) = (\xi_{t_1} - \xi_{s_1}, \xi_{t_2} - \xi_{s_2}) = 0, \end{aligned}$$

если $(s_1, t_1) \cap (s_2, t_2) = \emptyset$. Тем самым, свойство (ii) также установлено.

Наконец, рассмотрим уравнение

$$V_t^* f = S_t^* W_t^* f = 0. \tag{9}$$

Из (9) следует, что носитель $\operatorname{supp} W_t^* f \subset [0, t]$. Следовательно, f принадлежит замыканию линейной оболочки элементов $(W_t \xi_s,\ 0 \leq s \leq t)$. Поскольку $s \leq t$, для таких элементов $W_t \xi_s = W_s \xi_s = \tilde{\xi}_s$ в силу соотношения (8). Тем самым, свойство (iii) также доказано, и доказательство предложения завершено. □

Следующее свойство потребуется нам для построения модели коциклов.

Предложение 4. *Пусть* $(V_t,\ t\geq 0)$ – *коциклическое возмущение полугруппы сдвигов* $(S_t,\ t\geq 0)$ *коциклом* $(W_t,\ t\geq 0)$. *Тогда, определив семейство унитарных операторов* $(W_{-t},\ t\geq 0)$ *в пространстве* $\tilde{H}$ *формулой*

$$W_{-t}=\tilde{S}_{-t}W_t^*S_t, \qquad t\geq 0, \tag{10}$$

получим, что семейство операторов $(\tilde{V}_t,\ t\in\mathbb{R})$, *где*

$$\tilde{V}_t=W_t\tilde{S}_t,$$

образует группу унитарных операторов в пространстве $\tilde{H}$, *причем*

$$\tilde{V}_tf=\begin{cases}V_tf, & \operatorname{supp}f\subset\mathbb{R}_+, \quad t\geq 0,\\ \tilde{S}_tf, & \operatorname{supp}f\subset\mathbb{R}_-, \quad t\leq 0.\end{cases}$$

Доказательство. Как обычно, будем считать, что действия унитарных операторов $W_t,\ t\geq 0$, заданные первоначально в пространстве H, продолжатся тождественным действием на функции f с носителем $\operatorname{supp}f\subset\mathbb{R}_-$. Тогда формула (10) задает продолжение семейства $(W_t,\ t\geq 0)$ унитарных операторов в $\tilde{H}$ для отрицательных значений параметра t. При этом остается выполненным свойство коцикла

$$W_{t+s}=W_t\tilde{S}_tW_s\tilde{S}_{-t}, \qquad s,t\in\mathbb{R},$$

что следует из формулы

$$I=W_{-t+t}=W_{-t}\tilde{S}_{-t}W_t\tilde{S}_t, \qquad t\geq 0,$$

вытекающей из определения (10). Для завершения доказательства осталось заметить, что если $\operatorname{supp}f\subset\mathbb{R}_-$, то

$$\tilde{V}_{-t}f=W_{-t}\tilde{S}_{-t}f=\tilde{S}_{-t}W_t^*f=\tilde{S}_{-t}f, \qquad t\geq 0.$$

□

3. Модель коциклического возмущения, основанная на когенераторе полугруппы

Нам потребуются общеизвестные сведения из теории однопараметрических полугрупп (см. [6]). Генератором сильно-непрерывной полугруппы изометрических операторов $(V_t,\ t\geq 0)$ называют (возможно, неограниченный) симметрический оператор $A=s-\lim_{t\to 0+}\frac{V_t-I}{it}$. Когенератором полугруппы называют изометрический оператор $V=(A-iI)(A+iI)^{-1}$. Для того чтобы изометрический оператор был когенератором некоторой изометрической полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы число 1 не принадлежало его точечному спектру. Исходная полугруппа будет состоять из унитарных операторов тогда и только тогда, когда A – самосопряженный оператор, или, что то же самое, когда V является унитарным оператором, для которого точка 1 не принадлежит его точечному спектру. Если ввести функции

$$\varphi_t(z)=\exp\left(t\frac{z+1}{z-1}\right), \qquad t\geq 0, \tag{11}$$

то по когенератору V полугруппа восстанавливается как $V_t=\varphi_t(V),\ t\geq 0$. Отметим, что функции φ_t ограничены и аналитичны в единичном круге $\mathbb{D}$.

Нетрудно показать, что когенератор полугруппы операторов сдвига $(S_t,\ t\geq 0)$ в пространстве H унитарно эквивалентен оператору (одностороннего) сдвига S в пространстве Харди $K=H^2(\mathbb{D})$, состоящем из аналитических в круге $\mathbb{D}$ функций $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$, для которых $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} < +\infty$. Тем самым, пространство Харди в круге естественным образом вложено в пространство $\tilde{K} = L^2(\mathbb{T})$ на окружности $\mathbb{T}$. Оператор сдвига S в пространстве Харди задан формулой

$$(Sf)(z) = zf(z), \qquad f \in K. \tag{12}$$

Аналогичным образом, когенератор группы сдвигов в пространстве $\tilde{H}$ унитарно эквивалентен оператору (двустороннего) сдвига $(\tilde{S}f)(z) = zf(z)$ в пространстве $\tilde{K}$, при этом, оператор $\tilde{S}$, очевидно, является унитарной дилатацией оператора S.

Предположим, что E – нетривиальное инвариантное подпространство оператора сдвига S, то есть $SE \subset E$. Тогда, согласно теореме Берлинга (см. [7]), $E = \theta H^2(\mathbb{D})$ для некоторой внутренней функции $\theta \in H^\infty(\mathbb{D})$ (то есть функции, аналитической и ограниченной в единичном круге $\mathbb{D}$ с некасательными предельными значениями, для которых $|\theta(z)| = 1$ почти везде на $\mathbb{T}$). Ортогональное дополнение $K_\theta = H^2(\mathbb{D}) \ominus \theta H^2(\mathbb{D}) = E^\perp$ принято называть *модельным* пространством. Следующее предложение описывает модель коциклического возмущения, используемую в данной работе.

Предложение 5. *Когенератор любого коциклического возмущения полугруппы сдвигов на полупрямой унитарно эквивалентен изометрическому оператору V в пространстве $K = H^2(\mathbb{D})$, для которого найдется внутренняя функция θ, так что*

$$V = U \oplus S|_E, \tag{13}$$

где $S|_E$ является сужением оператора сдвига S на инвариантное пространство, определяемое функцией θ, а U – унитарный оператор в модельном пространстве K_θ, являющийся когенератором унитарной части разложения Вольда–Колмогорова коциклического возмущения.

Доказательство. Для когенератора коциклического возмущения V в пространстве K определено разложение Вольда–Колмогорова $K = K_0 \oplus K_1$ такое, что $V|_{K_0}$ является унитарным оператором и сужение $V|_{K_1}$ является вполне неунитарным изометрическим оператором. Из предложения 3 следует, что сужение $V|_{K_1}$ унитарно эквивалентно оператору сдвига S. Следовательно, в нашей модельной ситуации можно использовать в качестве $V|_{K_1}$ сужение $S|_E$ на любое инвариантное подпространство E, подобранное так, чтобы для соответствующего модельного пространства $K_\theta = E^\perp$ выполненялось соотношение $\dim K_\theta = \dim K_0$, что завершает доказательство. □

Из предложения 5 немедленно вытекает следующее утверждение.

Следствие 6. *Когенератор полугруппы унитарных операторов $(\tilde{V}_t,\ t \geq 0)$, определяющей коцикл согласно предложению 4, унитарно эквивалентен оператору $\tilde{V}$ в пространстве $\tilde{K} = L^2(\mathbb{T})$, обладающему свойствами*

$$\begin{aligned} \tilde{V}f &= Vf, & f &\in K = H^2(\mathbb{D}), \\ (\tilde{V}^*f)(z) &= \overline{z}f(z), & f &\in \tilde{K} \ominus K = L^2(\mathbb{T}) \ominus H^2(\mathbb{D}). \end{aligned}$$

4. Модель возмущения, основанная на мерах Кларка

Пусть U — унитарная часть в разложении Вольда–Колмогорова (13) когенератора коциклического возмущения. В этом параграфе нас будет интересовать случай, когда U унитарно эквивалентен оператору умножения на z в пространстве $L^2(\mu)$, причем мера μ сингулярна относительно меры Лебега. Отметим, что U по условию является когенератором полугруппы, и, следовательно, число 1 не принадлежит его точечному спектру. Операторы умножения на z в пространствах $L^2(\mu)$ и $L^2(\tilde{\mu})$ унитарно эквивалентны, если меры $\tilde{\mu}$ и μ взаимно абсолютно-непрерывны. Умножая меру μ на положительный вес, можно добиться того, чтобы она удовлетворяла следующему дополнительному условию, играющему важную роль в дальнейшем:

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^q} < +\infty \tag{14}$$

для некоторого $q > 3$.

Пусть μ — конечная сингулярная борелевская мера на единичной окружности. Определим внутреннюю функцию θ формулой

$$\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{\xi+z}{\xi-z} d\mu(\xi). \tag{15}$$

Тогда оператор Ω, заданный на $L^2(\mu)$ формулой

$$(\Omega f)(z) = (1-\theta(z)) \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)d\mu(\xi)}{1-\bar{\xi}z}, \tag{16}$$

является унитарным оператором из $L^2(\mu)$ на K_θ. При этом унитарный оператор U в $L^2(\mu)$ переходит в унитарный оператор $\tilde{U}$ в модельном пространстве K_θ, такой, что

$$\tilde{U}f = \Omega U \Omega^* f = zf + (f,g)(1-\theta),\ f \in K_\theta, \tag{17}$$

где

$$g(z) = \frac{\theta(z)-\theta(0)}{z(1-\theta(0))} \in K_\theta,$$

и тем самым операторы U и $\tilde{U}$ унитарно эквивалентны, см.[8].

Оператор (17) является сужением на модельное пространство K_θ изометрического оператора V, действующего в пространстве K по формуле

$$(Vf)(z) = zf(z) + (f,g)(1-\theta(z)), \qquad f \in K. \tag{18}$$

Унитарной дилатацией изометрического оператора (18) будет оператор

$$(\tilde{V}f)(z) = zf(z) + (f,g)(1-\theta(z)) - (f,\bar{z})(1-\overline{\theta(1)}\theta(z)), \quad f \in \tilde{K}. \tag{19}$$

Заметим, что

$$(\tilde{V}^* f)(z) = \bar{z}f(z), \qquad f \in \tilde{K} \ominus K.$$

Следовательно, согласно предложению 5 и следствию 6, доказано следующее утверждение.

Предложение 7. *Формулы* (18), (19) *определяют модель когенератора коциклического возмущения в случае, когда унитарная часть когенератора в разложении Вольда–Колмогорова унитарно эквивалентна оператору умножения на z в пространстве $L^2(\mu)$ с мерой μ, сингулярной относительно меры Лебега.*

5. Близость коциклических возмущений

Применим функцию (11) к модельному когенератору V полугруппы изометрических операторов $(V_t,\ t \geq 0)$. Изометрический оператор V является сужением унитарного оператора $\tilde{V}$, определенного формулой (19), на подпространство $K = H^2$. Напомним, что символы S и $\tilde{S}$ обозначают операторы сдвига на K и $\tilde{K}$ соответственно. Тогда коцикл $(W_t,\ t \geq 0)$ удовлетворяет равенству

$$\varphi_t(\tilde{V}) - \varphi_t(\tilde{S}) = (W_t - I)\tilde{S}_t, \quad t \geq 0.$$

Таким образом, включение разности $W_t - I$ в идеалы $\mathfrak{S}_p$ оказывается равносильным соответвующему включению для разностей $\varphi_t(\tilde{V}) - \varphi_t(\tilde{S})$. В свою очередь, свойства операторов

$\varphi_t(\tilde{V})-\varphi_t(\tilde{S})$ определяются свойствами спектральной меры μ унитарного оператора (17), а именно, ее малостью (гладкостью) в точке 1.

Нам потребуется следующее утверждение, доказанное в [5] (предложение 7.2).

Предложение 8. *Пусть спектральная мера унитарного оператора* (17) *удовлетворяет условию*

$$\mathfrak{M}_q(\mu)=\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{d\mu(\xi)}{|1-\xi|^q}<+\infty \tag{20}$$

для некоторого $q>3$. Тогда

$$\varphi_t(V)-\varphi_t(S)\in\mathfrak{S}_1,\quad t\geq 0,$$

причем

$$\|\varphi_t(V)-\varphi_t(S)\|_{\mathfrak{S}_1}\leq C_q t^{1/2}(\mathfrak{M}_q(\mu))^{1/2},$$

где константа C_q зависит только от q.

Ключевую роль в доказательстве теорем 1 и 2 играет следующее предложение, позволяющее оценить компоненты унитарной дилатации. В этом случае мы уже не можем добиться включения $\varphi_t(\tilde{V})-\varphi_t(\tilde{S})\in\mathfrak{S}_1$, но разность может принадлежать идеалам $\mathfrak{S}_p$ для всех $p>1$.

Предложение 9. *Пусть спектральная мера унитарного оператора* (17) *удовлетворяет условию* (20) *для некоторого $q>3$. Тогда*

$$\varphi_t(\tilde{V})-\varphi_t(\tilde{S})\in\mathfrak{S}_p,\qquad p>q'=\frac{q}{q-1},\quad t\geq 0,$$

причем

$$\|\varphi_t(\tilde{V})-\varphi_t(\tilde{S})\|_{\mathfrak{S}_p}\leq\omega(\mathfrak{M}_q(\mu)),$$

где ω — некоторая положительная функция такая, что $\omega(r)\to 0$ при $r\searrow 0$.

Доказательство. Доказательство предложения 9 состоит из нескольких этапов. На первом этапе мы рассмотрим компоненты оператора $\varphi_t(\tilde{V})-\varphi_t(\tilde{S})$ относительно некоторого канонического представления пространства $\tilde{K}$ и увидим, что все компоненты, за исключением одной, будут принадлежать идеалу $\mathfrak{S}_1$ в силу предложения 8. Затем будет показано, что оставшаяся компонента унитарно эквивалентна (после конформной пересадки в верхнюю полуплоскость) оператору умножения на некоторую функцию в пространстве Пэли–Винера. Это позволит свести задачу к вопросу об описании мер (весов), для которых оператор вложения пространства Пэли–Винера принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_p$. Завершит доказательство применение одной теоремы О.Г. Парфенова [9].

Этап 1. Анализ компонент унитарной дилатации. Рассмотрим матрицу оператора $\varphi_t(\tilde{V})-\varphi_t(\tilde{S})$ относительно разложения $\tilde{K}=H^2_-\oplus K_\theta\oplus\theta H^2$, где $H^2_-=L^2(\mathbb{T})\ominus H^2$. Нетрудно видеть, что все компоненты, кроме одной, будут принадлежать классу $\mathfrak{S}_1$. В самом деле, для блока $K_\theta\oplus\theta H^2\to K_\theta\oplus\theta H^2$ утверждение вытекает из Предложения 8. Переходя к сопряженнному оператору, заключаем, что блок $H^2_-\oplus K_\theta\to H^2_-\oplus K_\theta$ также входит в $\mathfrak{S}_1$. По построению компонента $H^2\to H^2_-$ равна нулю. Таким образом, осталось рассмотреть компоненту, отвечающую оператору $H^2_-\to\theta H^2$. Более того, заметим, что на пространстве $\bar{\varphi}_t H^2_-$ оба оператора $\varphi_t(\tilde{V})$ и $\varphi_t(\tilde{S})$ действуют как операторы умножения на φ_t, и, следовательно, $\varphi_t(\tilde{V})-\varphi_t(\tilde{S})=0$ на $\bar{\varphi}_t H^2_-$. Осталось изучить действие оператора $\varphi_t(\tilde{V})-\varphi_t(\tilde{S})$ на подпространстве $\bar{\varphi}_t H^2\ominus H^2=\bar{\varphi}_t K_{\varphi_t}$.

Обозначим через $Q:\bar{\varphi}_t K_{\varphi_t}\to H^2$ сужение оператора $\varphi_t(\tilde{V})-\varphi_t(\tilde{S})$ на подпространство $\bar{\varphi}_t K_{\varphi_t}$.

Этап 2. Включение компоненты Q в идеалы $\mathfrak{S}_p$. Покажем, что для $v \in K_{\varphi_t}$ справедливо равенство

$$Q(\bar\varphi_t v) = -(1 - \overline{\theta(1)}\theta)v. \tag{21}$$

Если $u \in H^2_-$, то для произвольной функции $\varphi \in H^\infty$ имеет место равенство

$$P_+\varphi(\tilde V)u = \overline{\theta(1)}\theta \cdot P_+(\varphi u), \quad P_-\varphi(\tilde V)u = P_-(\varphi u), \tag{22}$$

где символы P_+ и P_- обозначают проекторы в пространстве $L^2(\mathbb{T})$ на подпространства H^2 и H^2_- соответственно. В самом деле, это равенство нетрудно проверить для случая, когда $\varphi(z) = z^n$, $n > 0$, а $u(z) = z^m$, $m < 0$. По линейности и непрерывности равенство (22) справедливо для всех $u \in H^2_-$ и $\varphi(z) = z^n$, $n > 0$. Наконец, в силу линейности и $*$-слабой непрерывности, равенство (22) выполнено и для произвольной функции $\varphi \in H^\infty$.

Поскольку $\varphi_t(\tilde S)u = \varphi_t u$, из равенства (22) вытекает, что

$$\big(\varphi_t(\tilde V) - \varphi_t(\tilde S)\big)u = (\overline{\theta(1)}\theta - 1) \cdot P_+(\varphi_t u), \qquad u \in H^2_-.$$

Подставляя $u = \bar\varphi_t v$, получим равенство (21).

Таким образом, включение $\varphi_t(\tilde V) - \varphi_t(\tilde S) \in \mathfrak{S}_p$ равносильно включению

$$M_{1-\bar\theta(1)\theta}|_{H^2 \ominus \varphi_t H^2} \in \mathfrak{S}_p, \tag{23}$$

где символ M_g обозначает оператор умножения на функцию $g \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Этап 3. Пересадка в полуплоскость. Будет удобно доказывать включение (23), сделав “унитарную пересадку” из единичного круга в верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Положим

$$\Theta(z) = \theta\left(\frac{z-i}{z+i}\right).$$

Тогда $\Theta(z)$ будет внутренней функцией в верхней полуплоскости: $\Theta \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, и $|\Theta(x)| = 1$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$, где значения функции Θ на прямой понимаются в смысле некасательных граничных значений. Определив меру ν на вещественной прямой условием

$$d\mu(\xi) = \frac{d\nu(x)}{\pi(1+x^2)}, \qquad \xi = \frac{x-i}{x+i},$$

получим

$$\frac{1-\Theta(z)}{1+\Theta(z)} = \frac{2}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{x-z} - \frac{x}{x^2+1}\right) d\nu(x).$$

Из условия (20) вытекает, что

$$\nu(\mathbb{R}) < +\infty,$$

так что предел $\lim\limits_{y\to+\infty} \Theta(iy)$ существует; обозначим его через $\Theta(\infty)$. Имеем $|\Theta(\infty)| = 1$ и $1 - \overline{\Theta(\infty)}\Theta \in L^2(\mathbb{R})$, причем

$$\|1 - \overline{\Theta(\infty)}\Theta\|_{L^2(\mathbb{R})} = |1 - \Theta(\infty)| \cdot \sqrt{\nu(\mathbb{R})}.$$

Условие (20) равносильно тому, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (1+|t|)^{q-2} d\nu(t) < \infty.$$

Формула

$$(Lf)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(x+i)} f\left(\frac{x-i}{x+i}\right)$$

осуществляет унитарное отображение пространства $L^2(\mathbb{T})$ на $L^2(\mathbb{R})$, при котором пространство Харди $H^2(\mathbb{D})$ переходит в пространство Харди $H^2(\mathbb{C}_+)$. При таком преобразовании включение (23) переходит в соотношение

$$M_{1-\overline{\Theta(\infty)}\Theta}|_{\mathcal{K}} \in \mathfrak{S}_p, \tag{24}$$

где $\mathcal{K} = H^2(\mathbb{C}_+) \ominus e^{itz}H^2(\mathbb{C}_+)$. Пространство Пэли–Винера $\mathcal{P}W_a$ состоит из всех целых функций экспоненциального типа не выше a, сужение которых на вещественную прямую принадлежит $L^2(\mathbb{R})$; при этом, согласно классической теореме Пэли–Винера, $\mathcal{P}W_a = e^{-iaz}H^2(\mathbb{C}_+)\ominus e^{iaz}H^2(\mathbb{C}_+)$. Тогда включение (24) эквивалентно вопросу о том, будет ли вложение пространства Пэли–Винера $\mathcal{P}W_{t/2}$ в пространство $L^2(\mathbb{R}, w(t)dt)$ на прямой с весом $w(t) = |1-\overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|^2$ принадлежать $\mathfrak{S}_p$. Этот вопрос был решен в работе [9], где получен следующий результат:

Теорема (О.Г. Парфенов). *Для всякого $p > 0$ оператор вложения $\mathcal{J}$ пространства $\mathcal{P}W_a$, $a > 0$, в пространство $L^2(\mathbb{R}, w(t)dt)$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{N}_p(w) = \sum_k \Big(\int_k^{k+1} w(x)dx\Big)^{p/2} < \infty. \tag{25}$$

Из доказательства теоремы Парфенова немедленно следует оценка (см. также [10], где аналогичный результат получен для общих модельных пространств):

$$\|\mathcal{J}\|^p_{\mathfrak{S}_p} \le \mathfrak{N}_p(w).$$

Этап 4. Применение теоремы Парфенова. Из включения $(1-\xi)^{-q} \in L^1(\mu)$ следует, что функционал Φ,

$$\Phi(g) = \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1-\overline{\theta(1)}\theta(\xi)}{1-\xi}\right)^q g(\xi)d\xi, \qquad g \in K_\theta,$$

ограничен на K_θ, и $|\Phi(g)| \le C(q)\mathfrak{M}_q(\mu)\|g\|_2$. Отметим, что для $q \in \mathbb{N}$ значение $\Phi(g)$ совпадает с радиальным пределом $g^{(q-1)}(1)$ производной порядка $q-1$ функции g в точке $z = 1$.

Таким образом, ограниченный функционал Φ на K_θ порождается функцией $\big(\frac{1-\overline{\theta(1)}\theta(\xi)}{1-\xi}\big)^q \in H^2(\mathbb{D})$. Строго говоря, функция $\big(\frac{1-\overline{\theta(1)}\theta(\xi)}{1-\xi}\big)^q$ не принадлежит пространству K_θ, но нетрудно показать, что норма ее проекции на подпространство θH^2 оценивается через норму ее проекции на K_θ. Поэтому

$$\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{1-\overline{\theta(1)}\theta(\xi)}{1-\xi}\right|^{2q} dm(\xi) \le \omega(\mathfrak{M}_q(\mu)), \tag{26}$$

где $\omega(r) \to 0$ при $r \searrow 0$ (на самом деле $\omega(r) \le C(q)r$, но явная форма функции ω не имеет для нас значения). Сделав замену переменной, получаем

$$\int_{\mathbb{R}} |1-\overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|^{2q}(|t|+1)^{2q-2}dt < \infty.$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера, найдем

$$\int_k^{k+1} |1-\overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|^2 dt$$

$$\leq \left(\int_k^{k+1} |1-\overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|^{2q}(|t|+1)^{2q-2} dt \right)^{1/q} \left(\int_k^{k+1} \frac{dt}{(|t|+1)^2} \right)^{1/q'}$$

$$\leq \frac{C^{1/q}}{(|k|+1)^{2/q'}}.$$

Предположим, что $p > q'$; тогда

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_k^{k+1} |1-\overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|^2 dt \right)^{p/2} \leq C^{p/2q} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(|k|+1)^{p/q'}} < \infty.$$

Таким образом, учитывая оценку (26), при $p > q'$ получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_k^{k+1} |1-\overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|^2 dt \right)^{p/2} \leq \omega(\mathfrak{M}_q(\mu)),$$

с некоторой функцией ω, $\omega(r) \searrow 0$ при $r \searrow 0$. Теперь, применяя теорему Парфенова, получаем включение (24). Предложение 9 полностью доказано. $\square$

В рассматриваемой здесь модели коциклических возмущений соотношение $W_t - I \in \mathfrak{S}_p$ равносильно включению $\varphi_t(\tilde V) - \varphi_t(\tilde S) \in \mathfrak{S}_p$. В заключении параграфа отметим, что разность $\varphi_t(\tilde V) - \varphi_t(\tilde S)$ не может принадлежать классу ядерных операторов $\mathfrak{S}_1$ одновременно для всех $t \geq 0$.

Предложение 10. *Для класса коциклических возмущений, описываемого предложением 5, из включения $\varphi_t(\tilde V) - \varphi_t(\tilde S) \in \mathfrak{S}_1$ для всех $t \geq 0$ следует, что θ — унимодулярная константа.*

Доказательство. Из доказательства предложения 9 вытекает, что включение $\varphi_t(\tilde V) - \varphi_t(\tilde S) \in \mathfrak{S}_1$ равносильно тому, что $\mathfrak{N}_1(|1-\overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|^2) < \infty$ (см. (25)). Отсюда следовало бы, что

$$\int_{\mathbb{R}} |1-\overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|\, dt \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_k^{k+1} |1-\overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)|^2\, dt \right)^{1/2} < \infty,$$

и, значит, функция $1-\overline{\Theta(\infty)}\Theta$ принадлежит пространству Харди H^1. Но тогда $\int_{\mathbb{R}} \big(1-\overline{\Theta(\infty)}\Theta(t)\big)\, dt = 0$, что невозможно, так как $\operatorname{Re}(1-\overline{\Theta(\infty)}\Theta) > 0$ почти везде на $\mathbb{R}$ для любой непостоянной внутренней функции Θ. $\square$

6. Случай произвольной спектральной кратности

Пусть U — унитарная часть в разложении Вольда–Колмогорова (13) произвольного когенератора коциклического возмущения. Любой унитарный оператор U может быть представлен в виде не более чем счетной суммы

$$U = \oplus_k U_k,$$

в которой операторы U_k унитарно эквивалентны операторам умножения в подходящих пространствах $L^2(\mu_k)$, где μ_k — меры на окружности $\mathbb{T}$,

$$(U_k f)(z) = z f(z), \quad f \in L^2(\mu_k).$$

Умножая на положительные веса, быстро убывающие при приближении к точке 1, можно выбрать меры μ_k таким образом, чтобы условие

$$\sum_k \left(\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu_k(\xi)}{|1-\xi|^q} \right)^{1/q} < \infty \tag{27}$$

было выполнено для всех $q > 0$. Определим внутренние функции θ_k, связанные с мерами μ_k формулой (15). Условие (27) гарантирует, что произведение $\prod_k \theta_k$ сходится к внутренней функции θ. Положим

$$\hat{\theta}_n = \prod_{k=1}^{n-1} \theta_k$$

и определим когенератор $\tilde{V}$ по формуле

$$\tilde{V} = \tilde{S} + \sum_n (\cdot, \hat{\theta}_n g_n)\hat{\theta}_n(1-\theta_n) - (\cdot, \overline{z})(1 - \overline{\theta(1)}\theta),$$

где

$$g_n(z) = \frac{\theta_n(z) - \theta(0)}{z(1-\theta_n(0))}.$$

Доказательство теоремы 1. Оператор $V = \tilde{V}|_K$ является диагональным по отношению к ортогональному разложению $K = \oplus_k \hat{\theta}_k K_{\theta_k} \oplus \theta K$. Из условия (27) и предложения 8 вытекает, что

$$\varphi_t(V) - \varphi_t(S) \in \mathfrak{S}_1, \qquad t \geq 0.$$

То же самое условие (27) и предложение 9 гарантируют включение

$$\varphi_t(\tilde{V}) - \varphi_t(\tilde{S}) \in \mathfrak{S}_p, \qquad t \geq 0,$$

для $p > q'$. Поскольку, по выбору мер, условие (27) выполнено для сколь угодно больших значений q, имеем $\varphi_t(\tilde{V}) - \varphi_t(\tilde{S}) \in \mathfrak{S}_p$ при любом $p > 1$. □

Доказательство теоремы 2. Пусть U — когенератор произвольной полугруппы унитарных операторов, являющейся унитарной частью в разложении Вольда–Колмогорова коциклического возмущения. Тогда найдется такой оператор Δ, принадлежащий всем классам $\mathfrak{S}_p$ для $p > 1$, что возмущение $U + \Delta$ будет иметь сингулярный спектр (см. [11]). При этом

$$\varphi_t(U+\Delta) - \varphi_t(U) \in \mathfrak{S}_p,\ t \geq 0.$$

Подробное доказательство последнего утверждения приведено в [5] (доказательство теоремы 1.3). Теперь для завершения доказательства достаточно применить теорему 1. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. W. Arveson *Continuous analogues of Fock space* // Mem. Amer. Math. Soc. V. 80. 1989. P. 1–66.
2. Амосов Г.Г. *О марковских возмущениях группы унитарных операторов, ассоциированной со случайным процессом со стационарными приращениями* // Теория вероятностей и ее применения. Т. 49. 2004. С. 145-–155.
3. Амосов Г.Г., Баранов А.Д. *О дилатации сжимающих коциклов и коциклических возмущениях группы сдвигов на прямой* // Матем. заметки. Т. 79. 2006. С. 3—18.
4. Амосов Г.Г., Баранов А.Д. *О дилатации сжимающих коциклов и коциклических возмущениях группы сдвигов на прямой, II* // Матем. заметки. Т. 79. 2006. С. 779—780.
5. Амосов Г.Г., Баранов А.Д., Капустин В.В. *О возмущениях изометрической полугруппы сдвигов на полупрямой* // Алгебра и анализ. Т. 22. 2010. С. 1—20.
6. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве* Мир. Москва. 1970. 431 С.

7. Никольский Н.К. *Лекции об операторе сдвига* Наука. Москва. 1980. 383 С.
8. D.N. Clark *One-dimensional perturbations of restricted shifts* // J. Anal. Math. V. 25. 1972. P. 169–191.
9. Парфенов О.Г. *Весовые оценки преобразования Фурье* // Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 222. 1995. С. 151-162.
10. Баранов А.Д. *Вложение модельных подпространств класса Харди: компактность и идеалы Шаттена–фон Неймана* // Известия РАН. Сер. матем. Т. 73:6. 2009. С. 3—28.
11. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов*, Мир. Москва. 1972. 740 С.

Григорий Геннадьевич Амосов,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: gramos@mi.ras.ru

Антон Дмитриевич Баранов,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Старый Петергоф, Университетский пр., 28,
198504, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: anton.d.baranov@gmail.com

Владимир Владимирович Капустин,
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А.Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kapustin@pdmi.ras.ru