ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 1 (2012). С. 38-46.

УДК 517.53

ИТЕРАЦИИ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ С ПРАВИЛЬНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ МИНИМУМА МОДУЛЯ

А.М. ГАЙСИН, Ж.Г. РАХМАТУЛЛИНА

Аннотация. В статье речь идет о множестве Фату целой трансцендентной функции, т.е. о наибольшем открытом множестве комплексной плоскости, на котором семейство итераций заданной функции образует нормальное в смысле Монтеля семейство. Предполагается, что целая функция имеет бесконечный нижний порядок. Найдена в определенном смысле оптимальная пара условий (она сильнее, чем лакунарность по Фейеру) на показатели ряда, при выполнении которых каждая компонента множества Фату ограничена. Данный результат при более сильных достаточных условиях ранее был доказан Ю. Вангом и Ж.Г. Рахматуллиной.

Ключевые слова: целые функции, лакуны Фейера, итерации функций, множество Фату.

1. Определения и основные свойства

Пусть f — нелинейная целая функция комплексной переменной z. Определим естественные итерации функции f следующим образом:

$$f^0(z) = z, \;\; f^1(z) = f(z), \; \dots, \; f^{k+1}(z) = f(f^k(z)) \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{1}$$

Определение 1. *Класс N аналитических в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функций называется нормальным (по Монтелю) в D, если из любой последовательности $\{f_k\}$ функций из N можно выделить подпоследовательность $\{f_{k_p}\}$, обладающую свойством: либо $\{f_{k_p}(z)\}$, либо $\left\{\dfrac{1}{f_{k_p}(z)}\right\}$ сходятся всюду в D, причем равномерно на каждом компактном подмножестве области D* [1]. *В этом случае говорят, что последовательность $\{f_{k_p}\}$ сходится локально равномерно в D* [2].

Определение 2. *Множеством Фату $\mathcal{F}(f)$ (или множеством нормальности) функции $f(z)$ называется наибольшее открытое множество комплексной плоскости, на котором семейство итераций $\{f^k\}$, определяемых формулой (1), нормально (в смысле Монтеля). Дополнение множества Фату называется множеством Жюлиа $\mathcal{J}(f) = \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}(f)$.*

Множества Фату и Жюлиа целой функции f обладают следующими свойствами:

Свойство 1. *Множество Фату целой функции открыто, а множество Жюлиа — замкнуто.*

Свойство 2. *Множества $\mathcal{F}(f)$ и $\mathcal{J}(f)$ вполне инвариантны относительно f (то есть каждое из этих множеств совпадает как со своим образом, так и с полным прообразом)* [3], [4]*:*

$$1^\circ.\; f^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(f); \qquad 2^\circ.\; f^{-1}(\mathcal{J}(f)) = f(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(f).$$

Свойство 3. *Для любого $k > 0$ множество Фату (Жюлиа) k-кратной итерации функции f совпадает с множеством Фату (Жюлиа) самой функции f* [3], [4]*:*

$$3^\circ.\; \mathcal{F}(f^k) = \mathcal{F}(f); \qquad 4^\circ.\; \mathcal{J}(f^k) = \mathcal{J}(f).$$

A.M. Gaisin, Zh.G. Rakhmatullina, Iterations of the entire transcendental functions with regular behavior of the minimum of the modulus.

Поступила 18 декабря 2011 г.

Напомним еще одно определение. *Компонентой* K множества D называется любое его максимальное связное подмножество [5]. Справедливо утверждение: каждое множество D единственным образом может быть представлено как (конечное или бесконечное) объединение своих компонент.

Если f — многочлен степени не менее 2, то множество $\mathcal{F}(f)$ содержит компоненту $K = \{z\colon f^k(z) \to \infty\}$, которая не ограничена и вполне инвариантна [4]. Например, множеством Жюлиа функции $f(z) = z^2$ является единичная окружность: $\mathcal{J}(f) = \{z\colon |z| = 1\}$; а множество Фату состоит из двух компонент: ограниченной — $\{z\colon |z| < 1\}$ и неограниченной — $\{z\colon |z| > 1\}$.

Если f — трансцендентная целая функция, то множество $\mathcal{J}(f)$ всегда не ограничено, а множество $\mathcal{F}(f)$ может иметь либо бесконечно много неограниченных компонент, либо ровно одну, либо не иметь их вовсе [4]. Причем, имеем следующее

Свойство 4. *Любая неограниченная компонента множества $\mathcal{F}(f)$ целой трансцендентной функции f односвязна* [6].

2. Обзор результатов

Исследование итераций целых функций было начато в 1926 г. П. Фату [7]. Спустя почти 40 лет, И. Бейкер в своих работах [6], [8]–[12] получил результаты, оказавшие заметное влияние на развитие данной тематики. Так, Бейкером была доказана следующая

Теорема 1 ([13]). *Если множество Фату целой трансцендентной функции f содержит неограниченную инвариантную компоненту, то функция f растет быстрее целой функции порядка $1/2$ минимального типа.*

В [13] показано, что при достаточно больших положительных значениях параметра a множество Фату $\mathcal{F}(g)$ функции

$$g(z) = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\sin\sqrt{\sigma z}}{\sqrt{\sigma z}} + \sigma z + a\right), \qquad \sigma > 0,$$

(порядка $\rho = 1/2$ и типа σ) содержит неограниченную инвариантную компоненту. Другим примером может служить функция $F(z) = \cos\sqrt{\sigma^2 z + \frac{9}{4}\pi^2}$, $0 < \sigma < \sqrt{3\pi}$, порядка $\frac{1}{2}$ и типа σ, множество Фату $\mathcal{F}(F)$ которой также содержит неограниченную инвариантную компоненту [13], [14].

В 1981 году Бейкером был поставлен вопрос [13]: будет ли каждая компонента множества $\mathcal{F}(f)$ ограничена, если целая трансцендентная функция f имеет достаточно малый порядок роста? В силу теоремы 1 и приведенных примеров задачу Бейкера естественно рассматривать в классе целых трансцендентных функций порядка $\rho < 1/2$.

Сам Бейкер [13], а позже Сталлард [15], Андерсон и Хинканен [16] получили различные достаточные условия, при выполнении которых в указанном классе функций f множество $\mathcal{F}(f)$ не содержит неограниченных компонент. Эти условия следующие:

1) Бейкер, 1981 г., [13]: при $r \to \infty$

$$\ln M(r,f) = O\{(\ln r)^p\} \qquad (1 < p < 3),$$

где $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r}|f(z)|$;

2) Сталлард, 1993 г., [15]: существует $\varepsilon \in (0,1)$, что при $r \geqslant r_0$

$$\ln\ln M(r,f) < \frac{(\ln r)^{1/2}}{(\ln\ln r)^{\varepsilon}};$$

3) Сталлард, 1993 г., [15]: для целой функции f порядка $\rho < 1/2$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M(2r,f)}{\ln M(r,f)} = c,$$

где $c = c(f)$ — конечная постоянная, зависящая только от f (эта теорема точна: функция $g(z)$ из приведенного выше примера из [13] имеет порядок $\rho = 1/2$, и для нее (при $\sigma = 1$) условие Сталлард выполняется с постоянной $c = \sqrt{2}$. Однако $\mathcal{F}(f)$ содержит неограниченную компоненту);

4) Андерсон и Хинканен, 1998 г., [16]: для целой функции f порядка $\rho < 1/2$ существует $c > 0$, что при $x \geqslant x_0$
$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \geqslant \frac{1+c}{x}, \qquad \varphi(x) = \ln M(e^x, f).$$

Изучение класса целых трансцендентных функций вида
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \qquad p_n \in \mathbb{N}, \ \ 0 < p_n \uparrow \infty. \tag{2}$$
представляет особый интерес, поскольку наличие лакун обуславливает у таких функций ряд дополнительных свойств, позволяющих судить о компонентах множества $\mathcal{F}(f)$ в случае любого конечного и даже бесконечного порядка роста.

Исследование множеств Фату $\mathcal{F}(f)$ для функций вида (2) теснейшим образом связано с целым рядом классических задач. В течение всего XX века появилось огромное количество статей, касающихся значений Пикара, борелевских и асимптотических значений, направлений Жюлиа, проблем о связи максимума и минимума модуля, а также распределения значений целых функций с различными лакунарными условиями. Приведем результаты исследований множества Фату функций вида (2).

Говорят, что целая функция вида (2) имеет лакуны Фабри, если $n = o(p_n)$ при $n \to \infty$, и лакуны Фейера, если
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty.$$

Ю. Ванг в работе [17] доказал следующие теоремы:

Теорема 2 ([17])**.** *Пусть f — целая функция вида* (2)*,*
$$\rho_* = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r} \quad и \quad \rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}$$
— ее нижний порядок и порядок соответственно. Если $0 < \rho_* \leqslant \rho < \infty$, и функция f имеет лакуны Фабри, то каждая компонента множества $\mathcal{F}(f)$ ограничена.

Теорема 3 ([17])**.** *Пусть целая функция f вида* (2) *удовлетворяет условию: существует $T_0 > 1$, такое, что*
$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(r^{T_0}, f)}{\ln M(r,f)} > T_0. \tag{3}$$
Если при некотором $\eta > 0$
$$p_n > n \ln n (\ln\ln n)^{2+\eta} \qquad (n \geqslant n_0), \tag{4}$$
то каждая компонента множества $\mathcal{F}(f)$ ограничена.

Отметим, что в теореме 2 условие (3) явно не фигурирует, а требуется, что $0 < \rho_*$ и $\rho < \infty$. Однако, легко проверяется, что в этом случае левая часть в оценке (3) равна $+\infty$. Так что в теореме 2 при $T_0 \geqslant q\,\dfrac{\rho}{\rho_*}$ $(q > 1)$ условие (3) выполняется автоматически.

Далее, для всякой целой функции f и для любого $T > 1$ из теоремы Адамара о трех окружностях следует, что [18]
$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(r^T)}{\ln M(r)} \geqslant T. \tag{5}$$

В теореме 3 речь идет о целых функциях произвольного роста (возможны ситуации $\rho_* = 0$ и $\rho = \infty$), поэтому в отличие от теоремы 2 приходится постулировать выполнение более сильной оценки, чем (5).

Что касается условия (4), то при этом условии в [19] Хейманом показано, что для любой целой функции f вида (2) при $r \to \infty$ вне некоторого множества нулевой логарифмической плотности
$$\ln M(r) = (1 + o(1)) \ln m(r). \tag{6}$$
При доказательстве теоремы 3 данная оценка используется по существу. Так что условие Хеймана (4) в теореме 3 продиктовано именно оценкой (6).

Условие (4) может быть заменено на более слабое. В работе [20] доказана

Теорема 4. *Пусть f — целая трансцендентная функция, заданная лакунарным степенным рядом (2), для которой при некотором $T_0 > 1$ верна оценка (3). Если $n = o(p_n)$ при $n \to \infty$ и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \ln \frac{p_n}{n} < \infty, \tag{7}$$

то каждая компонента множества $\mathcal{F}(f)$ ограничена.

Дело в том, что равенство (6) остается верным и при выполнении условия (7) [21]. В остальном доказательства теорем 3 и 4 почти не отличаются.

Цель статьи — показать, что теорема 3 верна в самой общей ситуации, а именно, условие (7) может быть существенно ослаблено. Оказывается, последнее условие можно заменить на пару оптимальных условий, при выполнении которых для любой функции вида (2) справедлива оценка типа (6).

Данная пара условий является критерием выполнения оценки типа (6) и состоит из условия Фейера и некоторого условия на концентрацию точек p_n в терминах

$$\delta_n = \int_1^{p_n} \frac{\mu(p_n;t)}{t} dt,$$

где $\mu(p_n;t)$ — число точек $p_k \neq p_n$ из отрезка $\{x\colon |p_n - x| \leqslant t\}$.

Оказывается, условие лакунарности по Фейеру является и необходимым для того, чтобы для любой целой функции f вида (2) каждая компонента множества $\mathcal{F}(f)$ была ограничена.

Для доказательства основного результата нам понадобится следующая лемма, которая доказана Бейкером [13] с применением теоремы Шоттки.

Лемма 1 ([13]). *Пусть аналитическая в области D функция g из некоторого семейства G не принимает значений 0 и 1. Если D_0 — компактное связное подмножество в D, на котором $|g(z)| \geqslant 1$ для всех $g \in G$, то существуют постоянные U, V, зависящие только от D_0 и D, такие, что для любых z, z' из D_0 и для всех функций $g \in G$ верна оценка*

$$|g(z')| < U|g(z)|^V.$$

Нам потребуется также следующая теорема из [22] (формулировка дается применительно к степенным рядам вида (2) и в несколько упрощенном виде).

Теорема 5 ([22]). *Пусть выполняются условия:*

$$\text{1)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty; \qquad \text{2)}\ \ \int_1^{\infty} \frac{c(t)}{t^2} dt < \infty, \tag{8}$$

где

$$c(t) = \max_{p_n \leqslant t} q_n, \qquad q_n = -\ln |q'(p_n)|, \qquad q(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{p_k^2}\right).$$

Тогда существует множество $E \subset [0, \infty)$ конечной логарифмической меры, такое, что для любой окружности $C(r) = \{z\colon |z| = r\}$ найдется измененная «окружность» $C^*(r)$, обладающая свойствами:

1. *Если $\operatorname{mes} e$ — длина дуги $e \subset C(r)$, то*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\left[C(r) \cap C^*(r)\right]}{r} = 2\pi;$$

2. $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \max_{z\in C^*(r)} \ln \frac{r}{|z|} = 0$;
3. *при $r \to \infty$ вне E*

$$\ln M(r,f) = (1 + o(1)) \ln m^*(r),$$

где $m^*(r) = \min\limits_{z\in C^*(r)} |f(z)|$.

Для того чтобы для любой функции f была справедлива теорема 5, выполнение пары условий (8) и необходимо [23].

Основным результатом статьи является

Теорема 6. *Пусть f — целая трансцендентная функция, заданная лакунарным степенным рядом (2), для которой при некотором $T_0 > 1$ верна оценка (3). Если выполняется пара условий (8), то каждая компонента множества $\mathcal{F}(f)$ ограничена.*

Показано, что для любой целой функции f вида (2), для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty,$$

существует компонента множества $\mathcal{F}(f)$, содержащая луч $[0, \infty)$.

3. Доказательство теоремы 6

Согласно условию (3) при некотором $T_1 > T_0 > 1$ верна оценка

$$\frac{\ln M(r^{T_0}, f)}{\ln M(r, f)} \geqslant T_1, \qquad r \geqslant x_0. \tag{9}$$

Пусть $T_0 < T < T_1$, а $q > 1$ такое, что $qT < T_1$. Тогда $(1-\varepsilon)T_1 \geqslant qT$ при некотором $\varepsilon > 0$.

По теореме 5 по выбранному таким образом $\varepsilon > 0$ существует множество $E \subset [0, \infty)$ конечной логарифмической меры, что

$$m^*(r) > M(r, f)^{1-\varepsilon} \tag{10}$$

при $r \in [0, \infty) \setminus E$, $m^*(r)$ — минимум модуля функции f по кривой, близкой (в смысле теремы 5) к окружности $|z| = r$.

Далее, функция f — трансцендентная, поэтому $M(r, f)$ растет быстрее любой степени r^N. Пусть $R_1 > 0$ такое, что

$$M(r, f) > 2r^{qT} \;\text{ при }\; r \geqslant R_1.$$

Имея это в виду, рассмотрим последовательность $\{R_n\}$, где $R_{n+1} = M(R_n, f)$ $(n \geqslant 1)$. Ясно, что $R_n \uparrow \infty$ при $n \to \infty$, причем $J_n \subset I_n$, где

$$J_n = [R_n^T, \tfrac{1}{2} R_n^{qT}], \qquad I_n = [R_n, R_{n+1}] \qquad (q > 1,\ T > 1).$$

Так как при $n \to \infty$

$$\ln\text{-mes}\, J_n = \ln \frac{R_n^{qT}}{2R_n^T} = -\ln 2 + (q-1)T \ln R_n \to \infty,$$

а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\text{-mes}\,(E \cap J_n) < \infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \ln\text{-mes}\,(E \cap J_n) = 0.$$

Значит, при $n \geqslant n_1$ каждый отрезок J_n содержит точку ρ_n, не принадлежащую E. Так что, если учесть оценки (9), (10), получим

$$m^*(\rho_n) > M(\rho_n, f)^{1-\varepsilon} \geqslant [M(R_n^T, f)]^{1-\varepsilon} > M(R_n, f)^{(1-\varepsilon)T_1}, \qquad n \geqslant n_1.$$

Так как $(1-\varepsilon)T_1 \geqslant qT$, то при $n \geqslant n_1$

$$m^*(\rho_n) > M(R_n, f)^{qT} = R_{n+1}^{qT}, \tag{11}$$

где $q > 1,\ T > 1$.

Наша задача — показать, что каждая компонента множества $\mathcal{F}(f)$ ограничена. Предположим противное. Пусть $\mathcal{F}(f)$ имеет неограниченную компоненту D. Тогда по свойству 4 она односвязна.

Далее воспользуемся некоторыми идеями Бейкера. Поскольку D — компонента $\mathcal{F}(f)$, и она не ограничена, то существует номер $n_2 \geqslant n_1$, такой, что $D \cap A_n \neq \varnothing$ при всех $n \geqslant n_2$, где $A_n = \{z \colon |z| = R_n\}$.

Введем в рассмотрение также окружности

$$C_n = \{z\colon |z| = \rho_n\}, \qquad B_n = \{z\colon |z| = R_n^{qT}\} \qquad (q > 1,\ T > 1).$$

Напомним, что $R_n^T \leqslant \rho_n \leqslant \frac{1}{2} R_n^{qT}$, $R_n < R_n^T < R_n^{qT} < R_{n+1}$.

Пусть $n \geqslant n_2$. Так как множество D связно, и $D \cap A_n \neq \varnothing$, то в D найдется кривая γ, соединяющая некоторую точку $a_n \in A_n$ с какой-то точкой $b_{n+1} \in B_{n+1}$ (Рис. 1). Так как $m^*(\rho_n) \to \infty$ при $n \to \infty$ (это видно из оценки (11)), то $f(D)$ — неограниченное связное подмножество $\mathcal{F}(f)$, содержащее континуум $f(\gamma)$. Здесь

$$m^*(\rho_n) = \min_{z \in C_n^*} |f(z)|,$$

где C_n^* — близкая (в смысле теоремы 5) к C_n «окружность». Согласно теореме 5

$$\frac{\rho_n}{|z|} \to 1 \tag{12}$$

при $n \to \infty$ равномерно по z из C_n^*.

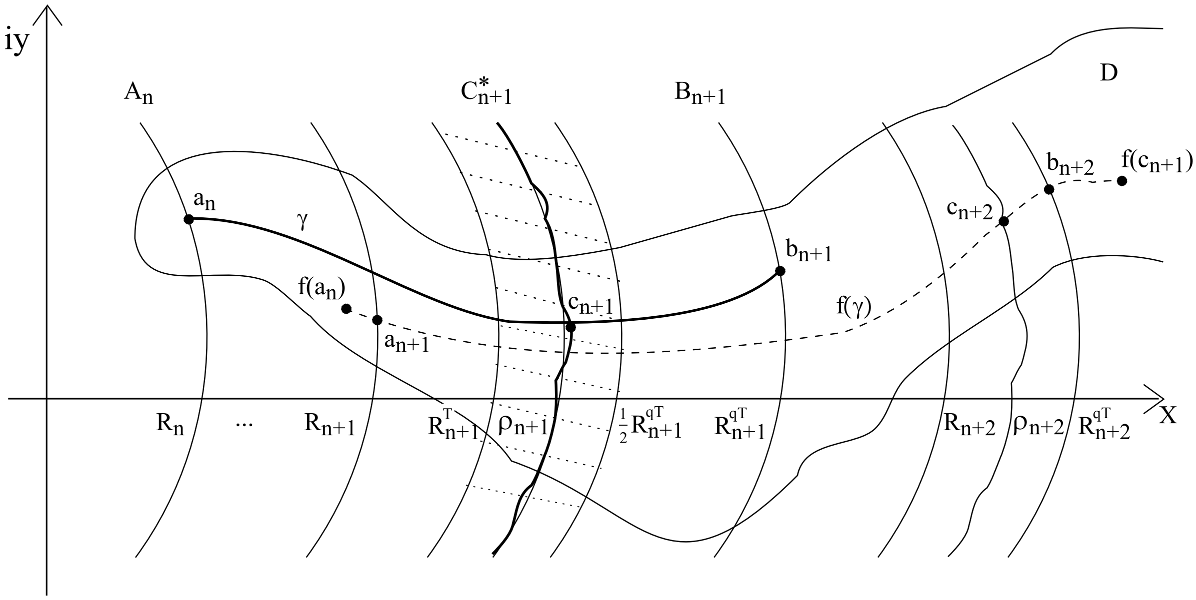

Рис. 1. Неограниченная компонента $D \subset \mathcal{F}(f)$

Пусть c_n — точка кривой γ, через которую проходит C_n^*. Ясно, что при $n \geqslant n_3 > n_2$ γ содержит также и некоторую точку c_{n+1} измененной окружности C_{n+1}^*, причем $|c_{n+1}| < R_{n+1}^{qT}$ (это следует из того, что $R_{n+1}^T \leqslant \rho_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} R_{n+1}^{qT}$, если учесть (12)).

Так как a_n — точка γ, $|a_n| = R_n$, то $|f(a_n)| \leqslant M(R_n, f) = R_{n+1}$. С другой стороны, из (11) следует, что

$$|f(c_{n+1})| \geqslant m^*(\rho_{n+1}) > R_{n+2}^{qT}.$$

Следовательно, кривая $f(\gamma)$ содержит дугу $\gamma^{(1)}$, соединяющую некоторую точку $a_{n+1}^{(1)} \in A_{n+1}$ с точкой $b_{n+2}^{(1)}$ окружности B_{n+2}. При этом $\gamma^{(1)}$ содержит некоторую точку $c_{n+2}^{(1)}$ измененной окружности C_{n+2}^*. Продолжая рассуждать по индукции, получим, что $f^k(D)$ является неограниченным связным подмножеством $\mathcal{F}(f)$, содержащим дугу $\gamma^{(k)}$ кривой $f^k(\gamma)$, которая соединяет точки $a_{n+k}^{(k)} \in A_{n+k}$ и $b_{n+k+1}^{(k)} \in B_{n+k+1}$ и содержит точку $c_{n+k+1}^{(k)} \in C_{n+k+1}^*$, где n ($n \geqslant n_3$) фиксировано, $k \geqslant 1$. Более того,

$$\min_{z \in \gamma^{(k)}} |f^k(z)| = |f(z_k)| \geqslant R_{n+k},$$

где z_k — некоторая точка γ.

Семейство $\{f^k\}$ нормально в D. Следовательно, существует подпоследовательность $\{f^{k_p}\}$, которая сходится локально равномерно в D. Не нарушая общности, будем считать, что $z_{k_p} \to z_0 \in \gamma$.

Так как $|f(z_{k_p})| \to \infty$ при $k_p \to \infty$, то последовательность $\{f^{k_p}\}$ сходится к бесконечности равномерно на γ. Значит, для любого $s > 0$ при $k_p \geqslant N(s) > n_3$

$$\min_{z\in\gamma} |f^{k_p}(z)| \geqslant s. \tag{13}$$

Рассмотрим семейство функций $G = \{g_{k_p}\}_{k_p \geqslant N}$, где

$$g_{k_p}(z) = \frac{f^{k_p}(z) - a}{b - a},$$

a, b — произвольные, но фиксированные точки из множества Жюлиа $\mathcal{J}(f)$, такие, что $a \neq b$. Значение N выберем позже.

Убедимся, что при некотором N семейство функций G удовлетворяет условиям леммы 1, если в качестве области D взять рассматриваемую нами неограниченную компоненту множества $\mathcal{F}(f)$ и положить $D_0 = \gamma$.

Так как по свойствам 2, 3 для всех $k \geqslant 1$, для любых $a, b \in \mathcal{J}(f)$ при $z \in D \subset \mathcal{F}(f)$ итерации $f^k(z)$ не принимают значений a, b, то функции $g_{k_p}(z)$ не принимают значений 0 и 1 в D при всех $p \geqslant 1$. Кроме того, выбрав в (13) $s_0 = s_{(a,b)} \stackrel{\text{def}}{=} |a| + |b - a|$, получим, что при $k_p \geqslant N(s_0) > n_3$

$$|g_{k_p}(z)| = \frac{|f^{k_p}(z) - a|}{|b - a|} \geqslant \frac{\big||f^{k_p}(z)| - |a|\big|}{|b - a|} \geqslant 1, \qquad z \in \gamma.$$

Таким образом, семейство функций G удовлетворяет условиям леммы 1 при $N = N(s_0)$. Значит, существуют постоянные U, V, зависящие только от γ и D, что

$$|g_{k_p}(z')| < U|g_{k_p}(z)|^V \tag{14}$$

для всех $z, z' \in \gamma$.

Проверяется, что для всех $z \in \gamma$

$$A|f^{k_p}(z)| \leqslant |g_{k_p}| \leqslant B|f^{k_p}(z)|,$$

где

$$A = \frac{1}{s_0}, \quad B = \frac{|a| + s_0}{s_0|b - a|}, \quad s_0 = |a| + |b - a|. \tag{15}$$

Следовательно, для всех $z, z' \in \gamma$ при $k_p \geqslant N$

$$|f^{k_p}(z')| < U^*|f^{k_p}(z)|^V, \qquad U^* = \frac{UB^V}{A}.$$

Пусть $k_p \geqslant N$, z, z' — точки γ, такие, что:

$$1) \quad f^{k_p}(z) = a^{(k_p)}_{n+k_p}, \qquad a^{(k_p)}_{n+k_p} \in A_{n+k_p};$$

$$2) \quad f^{k_p}(z') = c^{(k_p)}_{n+k_p+1}, \qquad c^{(k_p)}_{n+k_p+1} \in C^*_{n+k_p+1}.$$

Тогда при $k_p \geqslant N$

$$M(R_{n+k_p}, f) = R_{n+k_p+1} < |c^{(k_p)}_{n+k_p+1}| = |f^{k_p}(z')| < U^*|f^{k_p}(z)|^V = U^*|a^{(k_p)}_{n+k_p}|^V = U^* R^V_{n+k_p},$$

что противоречит тому, что f — трансцендентная функция, так как $R_{n+k_p} \to \infty$ при $k_p \to \infty$.

Теорема доказана.

4. О существенности условия Фейера

Условие *1)* из (8) для справедливости теоремы 6 и необходимо. Действительно, для любой последовательности $\{p_n\}$, такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty,$$

существует целая функция

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}$$

с вещественными коэффициентами, ограниченная на вещественной оси [24], [25]. Значит, имеется открытое связное множество $D \supset \mathbb{R}$, на котором функция f также ограничена. Пусть $|f(z)| \leqslant 1$ при $z \in D$. Так как для вещественных x все итерации $f^k(x)$ вещественны, то $|f^k(x)| \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$. Очевидно,

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Пусть K — любой компакт из D. Тогда для $z \in K$ имеем:

$$|f(z)| \leqslant 1,$$
$$|f^2(z)| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n [f(z)]^{p_n}\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |f(z)|^{p_n} \leqslant a,$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$|f^k(z)| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n [f^{k-1}(z)]^{p_n}\Big| \leqslant a.$$

Таким образом, семейство $\{f^k\}$ нормально в D. Отсюда следует, что $\mathbb{R} \subset D \subset \mathcal{F}(f)$. Это означает, что множество $\mathcal{F}(f)$ содержит неограниченную компоненту.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монтель П. *Нормальные семейства аналитических функций* М.-Л.: ОНТИ, 1936. 238 с.
2. Хейман У.К. *Мероморфные функции* М.: Мир, 1966. 287 с.
3. Milnor J. *Dynamics in one complex variable: Introductory lectures* Friedr. Vieweg & Sohn. Braunschweig. 1999.
4. Еременко А.Э., Любич М.Ю. *Динамика аналитических преобразований* // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. Вып. 3. С. 1–70.
5. Бицадзе А.В. *Основы теории аналитических функций комплексного переменного* М.: Наука, 1984. 320 с.
6. I.N. Baker *The domains of normality of an entire function* // An. Acad. Sci. Fen. Ser. A. I. Math. 1975. V. 1. P. 277–283.
7. P. Fatou *Sur l'itération des fonctions transcendantes entières* // Acta Math. 1926. T. 47. P. 337–370.
8. I.N. Baker *Multiply connected domains of normality in iteration theory* // Math. Zeitschr. 1963. V. 81. P. 206–214.
9. I.N. Baker *Wandering domains in the iteration of entire functions* // Proc. London Math. Soc. 1984. V. 49. P. 563–576.
10. I.N. Baker*Repulsive fixpoints of entire functions* // Math. Zeitschr. 1968. V. 104. P. 252–256.
11. I.N. Baker*Completely invariant domains of entire functions* // Math. essays dedicated to A. J. Mac-Intyre. Athens, Ohio: Ohio Univ. Press. 1970.
12. I.N. Baker*Limit functions and sets of non-normality in iteration theory* // An. Acad. Sci. Fen. Ser. A. I Math. 1970. V. 467. P. 2–11.
13. I.N. Baker*The iteration of polynomials and transcendental entire functions* // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1981. V. 30. P. 483–495.
14. P. Bhattacharyya*Iteration of analytic functions* // Ph.D. thesis. University of London. 1969.
15. G.M. Stallard *The iteration of entire functions of small growth* // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1993. V. 114. P. 43–55.
16. J.M. Anderson, A. Hinkkanen *Unbounded domains of normality* // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. P. 3243–3252.
17. Yu. Wang *On the Fatou set of an entire function with gaps* // Tohoku Math. J. 2001. V. 53. N. 1. P. 163–170.
18. Титчмарш Е. *Теория функций* М.: Наука, 1980. 463 с.
19. W.K. Hayman *Angular value distribution of power series with gaps* // Proc. London Math. Soc. 1972. V. (3) 24. P. 590–624.
20. Рахматуллина Ж.Г. *Множество Фату целой функции с лакунами Фейера* // Уфим. матем. журн. 2011. Т. 3. N. 3. С. 120–126.
21. Гайсин А.М. *Об одной теореме Хеймана* // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. N. 3. С. 501–516.
22. Гайсин А.М., Рахматуллина Ж.Г. *Поведение минимума модуля ряда Дирихле на системе отрезков* // Уфим. матем. журн. 2010. Т. 2. N. 3. С. 37–43.
23. Гайсин А.М. *Оценки роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых* // Матем. сб. 2003. Т. 194. N. 8. С. 55–82.

24. A.J. Macintyre *Asymptotic paths of integral functions with gap power series* // Proc. London. Math. Soc. 1952. V. (3) 2. P. 286–296.
25. Юсупова Н.Н. *Асимптотика рядов Дирихле заданного роста* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Башкирский гос. ун-т. Уфа. 2009.

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: gaisinam@mail.ru

Жанна Геннадьевна Рахматуллина,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: rakhzha@gmail.com