ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 1 (2012). С. 53-62.

УДК 517.9

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА ЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. ГЮРСЕС, А.В. ЖИБЕР, И.Т. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. В работе рассматриваются кольца Ли характеристических векторных полей для уравнений в частных производных. Обсуждаются возможные приложения этого понятия в задачах классификации интегрируемых уравнений гиперболического типа с большим чем три числом характеристических направлений, а также к уравнениям эволюционного типа и к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В качестве примеров рассмотрены известные в математической физике модели, такие как, система уравнений „n“-волн, уравнение Кортевега-де Фриза, уравнение Бюргерса, первое уравнение Пенлеве.

Ключевые слова: характеристические векторные поля, характеристическое кольцо, эволюционные уравнения, система уравнений „n“-волн.

1. Введение

Понятие характеристического векторного поля для гиперболических уравнений впервые ввел в рассмотрение Э.Гурса в известной работе [1] в 1899 году. В этой работе он разработал весьма эффективный алгебраический подход к задаче классификации интегрируемых по Дарбу уравнений в частных производных. Интерес к этой теме возродился после работы [2], где было решена задача классификации интегрируемых по Дарбу систем экспоненциального типа. Здесь же было введено понятие характеристического кольца Ли и показано, что интегрируемость по Дарбу системы равносильна конечномерности ее характеристических колец по обоим направлениям. Характеристические кольца Ли для квадратичных систем рассматривались в работе [3]. Характеристические кольца уравнений солитонного типа исследовались в [3], [4]. В заметке [5] понятие хактеристического векторного поля было обобщено на дискретные уравнения.

После работ [4], [6], [7] стало ясно, что характеристические кольца Ли позволяют идентифицировать интегрируемые модели, поскольку для интегрируемых моделей пространства кратных коммутаторов характеристических операторов имеют минимальный рост. Это свойство характеристических векторных полей можно рассматривать в качестве классификационного критерия.

2. Характеристические кольца уравнений „n-волн“

Рассматривается система уравнений гиперболического типа в частных производных

$$(\frac{\partial}{\partial t}+a_i\frac{\partial}{\partial x})u^i=\phi_i(u^1,u^2,\dots,u^n),\quad i=1,2,\dots,n. \tag{1}$$

M. Gürses, A.V. Zhiber, I.T. Habibullin, Characteristic Lie rings of differential equations.

Работа поддержана РФФИ (гранты 10-01-00088-а, 11-01-97005-р-поволжье-а).

Поступила 25 ноября 2011 г.

Здесь a_i – произвольные постоянные и ϕ_i – произвольные функции. Когда функции ϕ_i являются квадратичными, то имеем систему уравнений n-волн [8]. Для определения двух характеристических направлений введем независимые переменные ξ и η так

$$\frac{\partial}{\partial t}+a_{i_0}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}+a_{i_1}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

В новых переменных система принимает вид

$$\begin{aligned} p_\xi &= f(p,q,r),\\ q_\eta &= \phi(p,q,r),\\ r_\xi &= r_\eta A+\psi(p,q,r), \end{aligned} \tag{2}$$

где $f=(f^1,f^2,\ldots,f^s)$, $\phi=(\phi^1,\phi^2,\ldots,\phi^l)$, $\psi=(\psi^1,\psi^2,\ldots,\psi^m)$, $p=(u^{i_1},u^{i_2},\ldots,u^{i_s})$, $q=(u^{j_1},u^{j_2},\ldots,u^{j_l})$, $r=(u^{k_1},u^{k_2},\ldots,u^{k_m})$, $A=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$, $\forall i\ \lambda_i\neq 0$, где $p=(p^1,p^2,\ldots,p^s)$, $q=(q^1,q^2,\ldots,q^l)$, $r=(r^1,r^2,\ldots,r^m)$. Обозначим через F ($\bar F$) множество локально-аналитических функций, зависимых от конечного числа переменных $p,q,r,q_1,r_1,q_2,r_2,\ldots,q_i,r_i,\ldots$ ($p,q,r,\bar p_1,\bar r_1,\bar p_2,\bar r_2,\ldots,\bar p_i,\bar r_i,\ldots$). Здесь $q_i=D^iq$, $r_i=D^ir$, $\bar p_i=\bar D^ip$, $\bar r_i=\bar D^ir$, $i=1,2,\ldots$, $D=\frac{d}{d\xi}$, $\bar D=\frac{d}{d\eta}$. Оператор полного дифференцирования $\bar D$ по переменной η на множестве F определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \bar D &= \sum_{i=1}^{s}\bar p_1^i\frac{\partial}{\partial p^i}+\sum_{i=1}^{l}\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q^i}+\sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i}r_1^i-\frac{1}{\lambda_i}\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r^i}+\\ &+ \sum_{i=1}^{l}D\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q_1^i}+\sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i}r_2^i-\frac{1}{\lambda_i}D\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r_1^i}+\ldots\\ &+ \sum_{i=1}^{l}D^n\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q_n^i}+\sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i}r_{n+1}^i-\frac{1}{\lambda_i}D^n\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r_n^i}+\ldots. \end{aligned} \tag{3}$$

Рассматривая векторные поля $X_i=\frac{\partial}{\partial p^i}$, $i=1,2,\ldots,s$ и

$$\begin{aligned} X_{s+1} &= \sum_{i=1}^{l}\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q^i}+\sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i}r_1^i-\frac{1}{\lambda_i}\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r^i}+\\ &+ \sum_{i=1}^{l}D\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q_1^i}+\sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i}r_2^i-\frac{1}{\lambda_i}D\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r_1^i}+\ldots\\ &+ \sum_{i=1}^{l}D^n\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q_n^i}+\sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i}r_{n+1}^i-\frac{1}{\lambda_i}D^n\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r_n^i}+\ldots, \end{aligned} \tag{4}$$

получаем, что $\bar D=\sum_{i=1}^{s}\bar p_1^iX_i+X_{s+1}$.

Определение 1. *Кольцо Ли R_ξ над полем F, порожденное векторными полями $X_1,X_2,...,X_{s+1}$, называется характеристическим кольцом Ли по направлению ξ системы уравнений* (1).

Аналогично определим характеристическое кольцо Ли R_η в направлении η. Последнее порождается следующими векторными полями

$$\begin{aligned} Y_i &= \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, l, \\ Y_{l+1} &= \sum_{i=1}^{s} f^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial p^i} + \sum_{i=1}^{m}[\lambda_i \bar{r}_1^i + \psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r^i} + \ldots \\ &+ \sum_{i=1}^{s} \bar{D}^n f^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial \bar{p}_n^i} + \sum_{i=1}^{m}[\lambda_i \bar{r}_{n+1}^i + \bar{D}^n\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial \bar{r}_n^i} + \ldots . \end{aligned} \tag{5}$$

В этом случае оператор полного дифференцирования D по переменной ξ на множестве $\bar{F}$ имеет вид $D = \sum_{i=1}^{l} q_1^i Y_i + Y_{l+1}$.

3. Эволюционные уравнения

3.1. Кольца Ли эволюционных уравнений. Рассмотрим уравнения эволюционного типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}). \tag{6}$$

Для определения векторных полей, порождающих кольцо Ли уравнения (6), будем исследовать вспомогательное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = F(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}), \tag{7}$$

где $F = Df$, D – оператор полного дифференцирования по переменной x. Определим оператор $\bar{D}$ в пространстве локально-аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных $u, u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots$ ($u_n = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$) по правилу

$$\bar{D} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u} + F\frac{\partial}{\partial u_1} + DF\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots + D^{n-1}F\frac{\partial}{\partial u_n} + \ldots .$$

Введем векторные поля

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = F\frac{\partial}{\partial u_1} + DF\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots + D^{n-1}\frac{\partial}{\partial u_n} + \ldots .$$

Определение 2. *Кольцо Ли R, порожденное векторными полями X_1 и X_2, называется характеристическим кольцом Ли уравнения* (6).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $\dim R < \infty$, то правая часть $F(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}})$ уравнения* (7) *является квазиполиномом по переменной u.*

Доказательство. Так как $[D, \bar{D}] = 0$, то, используя $[D, \bar{D}] = [D, \frac{\partial u}{\partial t}X_1 + X_2]$, имеем

$$[D, X_1] = 0, \qquad [D, X_2] = FX_1. \tag{8}$$

Теперь положим $X_3 = [X_1, X_2]$ и, используя тождество Якоби и соотношения (8), получаем

$$[D, X_3] = \frac{\partial F}{\partial u}X_1. \tag{9}$$

Определим последовательность векторных полей X_i, $i = 4, 5, \ldots$ следующим образом: $X_i = [X_1, X_{i-1}]$. Как и выше получаем, что

$$[D, X_i] = \frac{\partial^{i-2} F}{\partial u^{i-2}}X_1, \quad i = 4, 5, \ldots . \tag{10}$$

Пусть кольцо R конечномерно. Тогда найдется m такое, что векторные поля $X_2, X_3, \ldots, X_m$ линейно независимы, а

$$X_{m+1} = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i X_i, \tag{11}$$

где коэффициенты α_i, $i = 2, 3, \ldots, m$ являются функциями переменных u, u_1, u_2, ...

В силу (11) имеем $[D, X_{m+1}] = \sum_{i=2}^{m} D(\alpha_i)X_i + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i [D, X_i]$. Последнее, согласно (10), перепишем так

$$\frac{\partial^{m-1}F}{\partial u^{m-1}} X_1 = \sum_{i=2}^{m} D(\alpha_i)X_i + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \frac{\partial^{i-2}F}{\partial u^{i-2}} X_1.$$

Так как векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_m$ линейно независимы, то получаем, что

$$D(\alpha_i) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, m \tag{12}$$

и

$$\frac{\partial^{m-1}F}{\partial u^{m-1}} = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \frac{\partial^{i-2}F}{\partial u^{i-2}}. \tag{13}$$

Из этих уравнений следует, что α_i является постоянной и F – квазиполином по переменной u. Лемма доказана.

Замечание 1. Если кольцо Ли R эволюционного уравнения конечномерно, то правая часть $f(u, u_1, \ldots, u_n)$ есть решение согласно (13) следующего уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial u^{m-1}} \left(\sum_{i=0}^{n} u_{i+1} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \left(\frac{\partial^{i-2}}{\partial u^{i-2}} \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} \frac{\partial f}{\partial u_k} \right).$$

Приведем примеры колец Ли уравнений эволюционного типа.

Пример 1. Рассматриваем уравнение вида

$$u_t = u_x + u^2.$$

Подействовав оператором D, получаем, что $u_{xt} = u_{xx} + 2uu_x$.

Из соотношения

$$D_t F(u, u_1, u_2, \ldots) = (u_t \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial u_1} + Df \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots)F = (u_t X_1 + X_2)F$$

имеем

$$D_t = u_t X_1 + X_2, \tag{14}$$

где $f = u_{xx} + 2uu_x$.

Лемма 2. *Векторное поле* $Y = a_1(u, u_1, \ldots, u_{n_1})\frac{\partial}{\partial u_1} + a_2(u, u_1, \ldots, u_{n_2})\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots$ *коммутирует с оператором* D *если и только если* $Y = 0$.

Доказательство вытекает из формулы

$$[D, Y] = (Da_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + Da_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + Da_3 \frac{\partial}{\partial u_3} + \ldots) - a_1 \frac{\partial}{\partial u} - a_2 \frac{\partial}{\partial u_1} - a_3 \frac{\partial}{\partial u_2} - \ldots.$$

Согласно (14) и $[D, D_t] = 0$ имеем

$$fX_1 + u_t [D, X_1] + [D, X_2] = 0.$$

Последнее соотношение распадается на два уравнения $[D, X_1] = 0$ и $[D, X_2] = -fX_1$.

Введем операторы $X_3 = [X_1, X_2]$, $X_4 = [X_1, X_3]$, $X_5 = [X_2, X_3]$. Легко показать, что $[D, X_3] = -2u_1 X_1$ и $[D, X_4] = 0$. Из утверждения леммы следует, что $X_4 = 0$.

Так как оператор $X_3 = 2u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + 2u_2\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots$., то

$$[D, X_5] = (X_3 f)X_1 + [X_2, -2u_1X_1] = (4u_1u + 2u_2)X_1 + 2u_1X_3 - 2fX_1,$$

или $[D, X_5] = 2u_1X_3$.

Докажем, что базис кольца состоит из операторов X_1, X_2, X_3, X_5. Видно, что $[X_1, X_5] = 0$. Рассмотрим $X_7 = [X_2, X_5]$. Непосредственными вычислениями получим, что $[D, X_7] = -4u_1^2X_1+2u_1X_5+2fX_3$, поэтому $X_7 = 2u_1X_3+2uX_5$. Теперь рассмотрим оператор $X_8 = [X_3, X_5]$. Вычислим $[D, X_8]$:

$$[D, X_8] = -[X_5, [D, X_3]] + [X_3, [D, X_5]] = 2X_5(u_1)X_1 + 2X_3(u_1)X_3 = 4u_1X_3.$$

Сравнивая соотношения $[D, X_8] = 4u_1X_3$ и $[D, X_5] = 2u_1X_3$, имеем $X_8 = 2X_5$. Отсюда следует, что кольцо Ли данного уранения четырехмерно, и элементы X_1, X_2, X_3, X_5 линейно независимы.

Пример 2. Уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x.$$

Соответствующее уравнение (7) имеет вид

$$u_{xt} = u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2. \tag{15}$$

Характеристические векторные поля

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = (u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2)\frac{\partial}{\partial u_1} + (u_4 + 2uu_3 + 6u_1u_2)\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots + \\ +(u_{n+1} + 2uu_n + \ldots)\frac{\partial}{\partial u_n} + \ldots.$$

Здесь

$$X_3 = [X_1, X_2] = 2D - 2u_1X_1, \tag{16}$$

где $D = u_1\frac{\partial}{\partial u} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_n\frac{\partial}{\partial u_{n-1}} + \ldots$.

Из соотношения $[D, \bar{D}] = 0$ следует

$$[D, u_tX_1 + X_2] = (u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2)X_1 + u_t[D, X_1] + [D, X_2] = 0.$$

Тогда

$$[D, X_1] = 0 \quad \text{и} \quad [D, X_2] = -(u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2)X_1. \tag{17}$$

Используя (16) и (17), получаем

$$X_4 = [X_1, X_3] = [X_1, 2D - 2u_1X_1] = 0,$$
$$X_5 = [X_2, X_3] = [X_2, 2D - 2u_1X_1] =$$
$$= 2(u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2)X_1 - 2(u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2)X_1 + 2u_1X_3.$$

Откуда $X_4 = 0$, $X_5 = 2u_1X_3$. Таким образом, базис характеристического кольца уравнения Бюргерса состоит из операторов X_1, X_2, X_3.

Прмиер 3. Рассмотрим уравнение Кортевега-де Фриза $u_t = u_{xxx} + uu_x$. Уравнение (7) примет вид

$$u_{xt} = u_4 + uu_2 + u_1^2. \tag{18}$$

Для уравнения (18) нетрудно показать, что $X_4 = [X_1, X_3] = 0$, $X_5 = [X_2, X_3] = u_1X_3$. Следовательно, базис характеристического кольца Ли уравнения Кортевега-де Фриза состоит из операторов X_1, X_2, X_3.

Пример 4. Для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза $u_t = u_{xxx} + u^2u_x$ уравнение (7) имеет вид

$$u_{xt} = u_4 + u^2u_2 + 2uu_1^2.$$

Операторы X_1, X_2, $X_3 = [X_1, X_2]$, $X_4 = [X_1, X_3]$ образуют базис характеристического кольца Ли модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза.

3.2. Присоединенные алгебры Ли. Как следует из примеров, приведенных в разделе 3.1, характеристическое кольцо Ли определяет зависимость правой части $f = f(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n})$ уравнения (6) от переменной u. Здесь мы предполагаем ввести определение кольца Ли, которое бы учитывало также зависимость f от производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$. Для этого перепишем уравнение (6) в виде

$$u_t^1 = f^1(u^1, u^2, u^3, \dots, u^n), \tag{19}$$

полагая $u^1 = u$, $u^2 = u_x$, $u^3 = u_{xx}, \dots, u^n = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$.

Тогда из (19) последовательным дифференцированием по x получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} u_t^1 &= f^1(u^1, u^2, \dots, u^n),\\ u_t^2 &= f^2(u^1, u^2, \dots, u^n, u_x^n),\\ u_t^3 &= f^3(u^1, u^2, \dots, u^n, u_x^n, u_{xx}^n),\\ &\dots,\\ u_t^n &= f^n(u^1, u^2, \dots, u^n, u_x^n, u_{xx}^n, \dots, \frac{\partial^{n-1} u^n}{\partial x^{n-1}}). \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, мы от уравнения (6) переходим к эволюционной системе уравнений (20) относительно неизвестных функций $u^1, u^2, \dots, u^n$. Теперь, как и в разделе 3.1, для определения характеристического кольца Ли системы (20) рассмотрим систему вида

$$u_{xt}^i = F^i, \quad F^i = Df^i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{21}$$

Характеристическое кольцо Ли системы (20) задается оператором $\overline{D}$:

$$\overline{D} = \frac{\partial u^k}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial u^k} + F^k \frac{\partial}{\partial u_1^k} + DF^k \frac{\partial}{\partial u_2^k} + \dots,$$

а, именно, векторными полями

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}, \quad \dots, \quad X_n = \frac{\partial}{\partial u^n},$$
$$X_{n+1} = F^k \frac{\partial}{\partial u_1^k} + DF^k \frac{\partial}{\partial u_2^k} + \dots.$$

И, наконец, характеристическое кольцо Ли системы (20) мы будем называть присоединенным кольцом Ли эволюционного уравнения (6).

Так, для уравнения Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x$$

имеем $u_x = v$, $u_{xx} = w$. Тогда системы (20) и (21) принимают вид

$$\begin{aligned} u_t &= w + 2uv,\\ v_t &= w_x + 2u_x v + 2uv_x,\\ w_t &= w_{xx} + 4u_x v_x + 2u_{xx} v + 2uv_{xx}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} u_{xt} &= w_x + 2uv_x + 2u_x v,\\ v_{xt} &= w_{xx} + 2u_{xx} v + 2uv_{xx} + 4u_x v_x,\\ w_{xt} &= w_{xxx} + 6u_{xx} v_x + 6u_x v_{xx} + 2u_{xxx} v \end{aligned}$$

соответственно.

4. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Здесь рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du^i}{dy} = f_i(x, y, u^1, u^2, \ldots, u^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{22}$$

Для введения понятия характеристического кольца Ли для уравнений (22) будем предполагать, что решение $u^1, u^2, \ldots, u^n$ зависит от параметра x. Тогда дифференцированием по переменной x уравнений (22) получаем систему уравнений

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial x}. \tag{23}$$

Известно, что гиперболическая система (23) обладает парой характеристических колец Ли, а именно x – характеристическое кольцо Ли X порождается векторными полями

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}, \ldots, X_n = \frac{\partial}{\partial u^n},$$
$$X_{n+1} = \frac{\partial}{\partial y} + F_i \frac{\partial}{\partial u_1^i} + DF_i \frac{\partial}{\partial u_2^i} + D^2 F_i \frac{\partial}{\partial u_3^i} + \ldots,$$

а y – характеристическое кольцо Ли Y – полями

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial u_1^1}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial u_1^2}, \ldots, Y_n = \frac{\partial}{\partial u_1^n},$$
$$Y_{n+1} = \frac{\partial}{\partial x} + u_1^i \frac{\partial}{\partial u^i} + F_i \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1^i} + \overline{D} F_i \frac{\partial}{\partial \overline{u}_2^i} + \ldots,$$

где $D(\overline{D})$ – оператор полного дифференцирования по переменной $x(y)$, функции F_i – суть правые части уравнений (23), $u_k^i = D^k u^i$, $\overline{u}_k^i = \overline{D}^k u^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теперь x и y – характеристические кольца Ли системы (23) будем называть кольцами Ли системы дифференциальных уравнений (22).

Исследование системы (22) основано на рассмотрении кольца X. Отметим, что если $\dim X < \infty$, то правые части f_i системы (22) являются квазиполиномами переменных $u^1, u^2, \ldots, u^n$.

В качестве примера рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_y = f(y, u). \tag{24}$$

Нетрудно показать, что если характеристическое кольцо Ли уравнения (24) конечномерно, то правая часть $f(y, u)$ – квазиполином по переменной u.

Например, размерность кольца Ли уравнения

$$u_y = \alpha_0(y) + \alpha_1(y) u + \alpha_2 u^2 \tag{25}$$

равна 4 и если u-решение уравнения (25), зависящее от параметра x, то выражение $\frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2}\frac{u_{xx}^2}{u_x^2}$ не зависит от y, то есть

$$\frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2}\frac{u_{xx}^2}{u_x^2} = f(x).$$

Приведем пример уравнения Риккати (25) с кольцом Ли размерности 3. Таким примером является уравнение

$$u_y = \alpha_1(y) u + u^2. \tag{26}$$

Для решения уравнения Риккати (26), зависящего от параметра x, справедливо соотношение

$$\frac{u_{xx}}{u_x} - 2\frac{u_x}{u} = f(x).$$

Замечание 2. Другой способ определения характеристического кольца Ли системы (22) основан на замене вида

$$u^i = \frac{\partial v^i}{\partial x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда система (22) примет вид

$$\frac{\partial^2 v^i}{\partial x \partial y} = f_i\left(x, y, \frac{\partial v^1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial v^n}{\partial x}\right). \tag{27}$$

Всюду ниже x- и y-характеристические кольца Ли системы гиперболических уравнений (27) будем называть характеристическими кольцами Ли исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (22).

В заключение рассмотрим в качестве примера уравнение Пенлеве I

$$u_{yy} = 6u^2 + y. \tag{28}$$

Уравнение (28) можно записать в виде системы уранений

$$u_y = v, \quad v_y = 6u^2 + y$$

или, полагая

$$u = p_x, \quad v = q_x,$$

будем иметь

$$p_{xy} = q_x, \quad q_{xy} = 6p_x^2 + y. \tag{29}$$

Тогда $x-$характеристическое кольцо Ли X системы (29) порождается векторными полями

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial p}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial q},$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial y} + q_1\frac{\partial}{\partial p_1} + (6p_1^2 + y)\frac{\partial}{\partial q_1} + q_2\frac{\partial}{\partial p_2} + 12p_1p_2\frac{\partial}{\partial q_2} + \ldots.$$

Ясно, что размерность кольца X равна трем, при этом $x-$интегралы

$$\omega = \omega(y, p_1, q_1) \quad \text{и} \quad w = w(y, p_1, q_1) \quad (\overline{D}\omega = 0, \, \overline{D}w = 0)$$

определяются из уравнения в частных производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + q_1\frac{\partial}{\partial p_1} + (6p_1^2 + y)\frac{\partial}{\partial q_1}\right)F = 0.$$

Отметим, что $\omega = const$ и $w = const$ задают интегралы исходного уравнения (28).

Далее $y-$характеристическое кольцо Ли Y системы уранений (29) задается векторными полями

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial p_1}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial q_1},$$

$$Y_3 = \frac{\partial}{\partial x} + p_1\frac{\partial}{\partial p} + q_1\frac{\partial}{\partial q} + q_1\frac{\partial}{\partial \overline{p}_1} + (6p_1^2 + y)\frac{\partial}{\partial \overline{q}_1} + (6p_1^2 + y)\frac{\partial}{\partial \overline{p}_2} +$$
$$+(12p_1q_1 + 1)\frac{\partial}{\partial \overline{q}_2} + (12p_1q_1 + 1)\frac{\partial}{\partial \overline{p}_3} + (12q_1^2 + 72p_1^3 + 12yp_1)\frac{\partial}{\partial \overline{q}_3} + \ldots.$$

Легко видеть, что векторные поля

$$Y_1,\ [Y_1, Y_3],\ [Y_1, [Y_1, Y_3]],\ [Y_1, [Y_1, [Y_1, Y_3]]], \dots$$

линейно независимы. Таким образом, $\dim Y = \infty$. Однако система ураенний (29) имеет $y-$интеграл $\overline{\omega} = \overline{p}_1 - q$. Вычислим высшие $y-$симметрии

$$f = f(x, y, p, q, \overline{p}_1, \overline{q}_1, \overline{p}_2, \overline{q}_2, \dots, \overline{p}_n, \overline{q}_n),$$
$$g = g(x, y, p, q, \overline{p}_1, \overline{q}_1, \overline{p}_2, \overline{q}_2, \dots, \overline{p}_m, \overline{q}_m),$$
$$(p_\tau = f, \quad q_\tau = g)$$

для уравнений (29).

Определяющая система уравнений имеет вид

$$D\overline{D}f = Dg, \quad D\overline{D}g = 12p_1 Df. \tag{30}$$

Пусть порядок по перемнным $p, q, \overline{p}_1, \overline{q}_1, \overline{p}_2, \overline{q}_2, \dots$ функций Df и Dg равны n и m соответственно. Тогда из (30) следует, что $n + 1 = m$ и $m + 1 = n$, поэтому

$$Df = F(x, y, p_1, q_1), \quad Dg = G(x, y, p_1, q_1). \tag{31}$$

Далее

$$\begin{gathered} Df(x, y, p, q, \overline{p}_1, \overline{q}_1, \overline{p}_2, \overline{q}_2, \dots, \overline{p}_n, \overline{q}_n) = \frac{\partial f}{\partial x} + p_1 \frac{\partial f}{\partial p} + q_1 \left(\frac{\partial}{\partial \overline{p}_1} + \frac{\partial}{\partial q}\right) f + \\ +(6p_1^2 + y)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{p}_2} + \frac{\partial}{\partial \overline{q}_1}\right) f + (12p_1q_1 + 1)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{p}_3} + \frac{\partial}{\partial \overline{q}_2}\right) f + \dots . \end{gathered} \tag{32}$$

Теперь из (31) и (32) получаем соотношения:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial p} = \alpha_0(x, y), \quad \left(\frac{\partial}{\partial \overline{p}_1} + \frac{\partial}{\partial q}\right) f = \alpha_1(x, y),$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{p}_2} + \frac{\partial}{\partial \overline{q}_1}\right) f = \alpha_2(x, y), \dots, \left(\frac{\partial}{\partial \overline{p}_n} + \frac{\partial}{\partial \overline{q}_{n-1}}\right) f = \alpha_n(x, y).$$

Откуда нетрудно получить, что

$$f = \beta(x, y) + \beta_0(y)p + \beta_1(y)\overline{p}_1 + \dots + \beta_n(y)\overline{p}_n + h(y, \overline{\omega}, \overline{\omega}_1, \dots, \overline{\omega}_{n-1}). \tag{33}$$

Аналогичная формула справедлива для функции g:

$$g = \gamma(x, y) + \gamma_0(y)p + \gamma_1(y)\overline{p}_1 + \dots + \gamma_m(y)\overline{p}_m + H(y, \overline{\omega}, \overline{\omega}_1, \dots, \overline{\omega}_{m-1}). \tag{34}$$

Так как функции $f = h(y, \overline{\omega}, \overline{\omega}_1, \dots, \overline{\omega}_{n-1}$ и $g = H(y, \overline{\omega}, \overline{\omega}_1, \dots, \overline{\omega}_{m-1}$ являются симметриями системы (29) при любых h и H, то из формул (33) и (34) получаем, что

$$f = \beta(x, y) + \sum_{k=0}^{n} \beta_k(y)\overline{p}_k, \quad g = \gamma(x, y) + \sum_{k=0}^{m} \gamma_k(y)\overline{p}_k \tag{35}$$

также являются симметриями.

Подставляя (35) в определяющее уравнение (29), убеждаемся, что

$$f = f(y), \quad q = g(y).$$

Таким образом, $y-$симметрии уравнений (29) вычисляются по формулам

$$f = h(y, \overline{\omega}, \overline{\omega}_1, \dots, \overline{\omega}_{n-1}), \quad g = H(y, \overline{\omega}, \overline{\omega}_1, \dots, \overline{\omega}_{m-1}).$$

Заключение

Хорошо известно, что интегрируемые уравнения характеризуются наличием бесконечной последовательности высших симметрий. Этот фундаментальный факт лежит в основе современной теории интегрируемости (см., например, [9]–[11]). В настоящей работе обсуждается альтернативный подход к интегрируемости, использующий понятие характеристического кольца Ли, ассоциированного с уравнением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Goursat, *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre*, Annales de la faculté des Sciences de l'Université de Toulouse 2^e série, tome 1, n^0 1 (1899) pp.31–78.
2. Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана* // Препринт БФАН СССР, Уфа. 1981. 23 с.
3. Жибер А.В., Мукминов Ф.Х. *Квадратичные системы, симметрии, характеристические и полные алгебры* // Задачи математической физики и асимптотики их решений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР. 1991. С. 14–32.
4. Жибер А.В., Муртазина Р.Д. *Характеристические алгебры Ли для уравнения* $u_{xy} = f(u, u_x)$ // ФПМ. Гамильтоновы и лагранжевы системы. Алгебры Ли. Т. 12. № 7. 2006. С. 65–78.
5. Habibullin I.T. *Characteristic algebras of fully discrete hyperbolic type equations* // Symmetry Integrability Geom.: Methods Appl. V. 1. Paper 023. 2005.9 pages.
6. I. T. Habibullin, E. V. Gudkova *Classification of integrable discrete Klein-Gordon models* // Physica Scripta. 83. 045003. 2011. arXiv : nlin/1011.3364.
7. Хабибуллин И.Т., Гудкова Е.В. *Алгебраический метод классификации* S*–интегрируемых дискретных моделей* // Теоретическая и математическая физика. Т. 167. № 3. 2011. С. 407–419.
8. Zakharov V. E., Manakov S. V. *The theory of resonance interaction of wave packets in nonlinear media* // Soviet Physics JETP. V. 42. 1975. P. 842.
9. А.В. Михайлов, А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов, Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем, УМН 42:4 (1987) 3–53.
10. Михайлов А.В., Шабат А.Б., Соколов В.В. *Симметрийный подход к классификации интегрируемых уравнений* // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Киев: Наукова думка. 1990. С. 213-279.
11. M.Gürses, A.Karasu, and R.Turhan *Nonautonomous Svinolupov Jordan KdV Systems* // J.Phys.A. V.34. 2001. P. 5707–5711.

Метин Гюрсес,
Билкентский университет,
06800, Билкент, Анкара, Турция
E-mail: gurses@fen.bilkent.edu.tr

Анатолий Васильевич Жибер,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: zhiber@mail.com

Исмагил Талгатович Хабибуллин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: habibullinismagil@gmail.com