

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗУСЛОВНОГО БАЗИСА ИЗ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СТЕПЕННЫМ ВЕСОМ

К.П. ИСАЕВ, К.В. ТРУНОВ

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о существовании безусловных базисов из экспонент в пространствах функций, локально интегрируемых на ограниченном интервале I вещественной оси, удовлетворяющих условию

$$\|f\| := \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)} dt} < \infty,$$

где $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале. При $I = (-1; 1)$, $h(t) = -\alpha \ln(1 - |t|)$, $\alpha > 0$ получена оценка снизу частоты показателей безусловного базиса.

Ключевые слова: ряды экспонент, безусловные базисы, базисы Рисса, степенные веса, гильбертово пространство.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть I — ограниченный интервал вещественной оси, $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале и $L^2(I, h)$ — пространство локально интегрируемых функций на I , удовлетворяющих условию

$$\|f\| := \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)} dt} < \infty.$$

Оно является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_I f(t) \bar{g}(t) e^{-2h(t)} dt.$$

Система элементов $\{e_k, k = 1, 2, \dots\}$ в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом (см. [2]), если она полна и найдутся числа $c, C > 0$, такие, что для любого набора чисел c_1, c_2, \dots, c_n выполняется соотношение

$$c \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\|^2 \leq C \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \|e_k\|^2.$$

Известно (см. [3],[4]), что если система $\{e_k, k = 1, 2, \dots\}$ — безусловный базис, то любой элемент пространства H единственным образом представляется в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k,$$

K.P. ISAEV, K.V. TRUNOV, ON THE DISTRIBUTION OF INDICATORS OF UNCONDITIONAL EXPONENTIAL BASES IN SPACES WITH A POWER WEIGHT.

© ИСАЕВ К.П., ТРУНОВ К.В. 2012.

Поступила 20 декабря 2011 г.

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-00233-а).

причем

$$c \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2 \leq C \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \|e_k\|^2.$$

В работе [12] введена следующая характеристика для непрерывных на плоскости функций u , измеряющая отклонение данной функции от гармонических функций. Для непрерывной функции u , для $z \in \mathbb{C}$ и положительного числа p через $\tau(u, z, p)$ обозначим супремум всех таких $r > 0$, для которых выполняется условие

$$\inf \left\{ \sup_{w \in B(z, r)} |u(w) - h(w)|, h \text{ гармонична в } B(z, r) \right\} \leq p.$$

Через $B(z, r)$ обозначен круг радиуса r с центром в точке z . Непосредственно из определения следует, что если $\tau(u, z_0, p) = \infty$ для некоторой точки z_0 , то $\tau(u, z, p) \equiv \infty$.

Из леммы 1.1 в работе [6] следует, что в случае, когда u — непрерывная субгармоническая функция, величина $\tau = \tau(u, \lambda, p)$ вполне определяется условием: если $H(z)$ — наименьшая гармоническая мажоранта функции u в круге $B(\lambda, \tau)$, то

$$\max_{z \in \overline{B(\lambda, \tau)}} (H(z) - u(z)) = 2p. \quad (1)$$

В работе [5] доказана следующая теорема (теорема 2.1)

Теорема 1. Если система $\{e^{z_j t}\}_{j=1}^{\infty}$ является безусловным базисом в пространстве $L_2(I, h)$, то существует целая функция L с простыми нулями в точках z_j , $j = 1, 2, \dots$, для которой выполняется соотношение

$$\frac{1}{P} K(z) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|L(z)|^2 K(z_j)}{|L'(z_j)|^2 |z - z_j|^2} \leq P K(z), z \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

где P — некоторая положительная постоянная и $K(z) = \|e^{zt}\|^2$.

Функция $\ln K(z)$ является субгармонической и непрерывной на всей плоскости.

В продолжении этой статьи через $\tau(z)$ будем обозначать функцию $\tau(\ln K(w), z, \ln(5P))$, где P — константа из соотношения (2). Итак,

$$\inf_h \left\{ \sup_{z \in \overline{B(\lambda, \tau(\lambda))}} |\ln K(z) - h(z)|, h \text{ гармонична в } B(\lambda, \tau(\lambda)) \right\} = \ln(5P),$$

Следующая теорема доказана в [7] (см. теорема 3, теорема 4 и ее следствие).

Теорема 2. Пусть система $\{\exp(tz_i), i = 1, 2, \dots\}$, образует безусловный базис в пространстве $L_2(I, h)$. Тогда

- 1) в любом круге $B(z, 2\tau(z))$ содержится хотя бы один показатель z_i .
- 2) пусть $b = \frac{1}{20P^{\frac{1}{2}}}$. Тогда для любых i, j , $i \neq j$, выполняется неравенство

$$|z_i - z_j| \geq 2b \max(\tau(z_i), \tau(z_j)).$$

Первое утверждение этой теоремы ограничивает частоту показателей z_k снизу, а второе — сверху. На основе этих разнонаправленных оценок в работе [7] доказана теорема 5, которая применительно к рассматриваемой в данной статье ситуации может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 3. Пусть $h(t)$ — выпуклая функция на интервале $I = (-1, 1)$ и

$$\tilde{h}(x) = \sup_{t \in I} (xt - h(t))$$

— функция, сопряженная по Юнгу к ней. Предположим, что $\tilde{h} \in C^2(|x| > \text{const})$ и для любого положительного числа c функция $s(x) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{h}''(x)}}$ удовлетворяет условию

$$\left(\min_{y \in B(x, cs(x))} \tilde{h}''(y) \right) \left(\max_{y \in B(x, cs(x))} \tilde{h}''(y) \right)^{-1} \asymp 1, |x| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тогда в пространстве $L_2(I, h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Из условия (3) вытекает оценка роста функции

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|x| - \tilde{h}(x)}{\ln |x|} = +\infty,$$

которая равносильна соотношению

$$\lim_{|t| \rightarrow 1} \frac{h(t)}{-\ln(1 - |t|)} = +\infty,$$

или для любого $\alpha > 0$

$$(1 - |t|)^\alpha = O(e^{h(t)}), \quad |t| \rightarrow 1.$$

В данной работе мы исследуем вопрос о безусловных базисах из экспонент в пространствах с не более чем степенными весами, т.е. при условии, что для некоторого $\alpha > 0$

$$e^{h(t)} = O((1 - |t|)^\alpha), \quad |t| \rightarrow 1.$$

В качестве модельных пространств мы будем рассматривать пространства $L_2(I, h)$ при $I = (-1; 1)$, $h(t) = -\alpha \ln(1 - |t|)$ для $\alpha > 0$, которые обозначим через $L_2(\alpha)$.

Будет доказана следующая, более точная оценка частоты показателей безусловных базисов снизу.

Теорема 4. Пусть система $\{e^{z_k t}\}$ образует безусловный базис в пространстве $L_2(\alpha)$. Тогда существуют числа $\delta_1 = \delta_1(\alpha) \in (0, 1)$ и $\delta_2 = \delta_2(\alpha) > 0$, $M = M(\alpha) > 0$, такие, что при достаточно больших $|x_0|$ для любого y_0 в каждом прямоугольнике $Q = \{z = x + iy : \delta_1 x_0 \leq x \leq \delta_2 x_0, |y - y_0| \leq M|x_0|\}$ и $-Q$ находится хотя бы один показатель z_k .

То, что эта оценка более точная по сравнению с п.1 теоремы 2, следует из того, что величина $\tau(z)$ в этих пространствах сравнима с $|Re z|$. При $\alpha > \frac{1}{2}$ утверждение этой теоремы иными средствами доказано в работе [13].

2. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Система экспонент $\{e^{\lambda t}\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ полна в пространстве $L_2(I, h)$, поэтому преобразование Фурье-Лапласа функционалов $L : S \rightarrow \hat{S}(\lambda)$, определяемое формулой

$$\hat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda t}), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между сопряженным пространством $L_2^*(I, h)$ и некоторым линейным многообразием целых функций $\hat{L}_2(I, h)$. В этом линейном многообразии мы будем рассматривать наведенную структуру гильбертова пространства. А именно, если функционалы $S_1, S_2 \in L_2^*(I, h)$ порождаются функциями $f_1, f_2 \in L_2(I, h)$, то полагаем

$$(\hat{S}_1(\lambda), \hat{S}_2(\lambda))_{\hat{L}_2^*(I, h)} = (f_1, f_2)_{L_2(I, h)}.$$

Нетрудно убедиться в том, что функция

$$K(\lambda, z) = \int_I e^{\lambda t + \bar{z}t - 2h(t)} dt, \quad \lambda, z \in \mathbb{C}$$

является воспроизводящим ядром в пространстве $\hat{L}_2(I, h)$, т.е.

$$(F(\lambda), K(\lambda, z)) = F(z), \quad F \in \hat{L}_2(I, h).$$

В работе [14] доказано, что в пространстве $\hat{L}_2(I, h)$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|F\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(x + iy)|^2 e^{-2\tilde{h}(x)} \rho_{\tilde{h}}(x) d\tilde{h}'(x) dy, \quad (4)$$

где

$$\tilde{h}(x) = \sup_{t \in I} (xt - h(t)), \quad x \in \mathbb{R},$$

— сопряженная по Юнгу к функции $h(t)$, а число $\rho = \rho_{\tilde{h}}(x)$ определяется как супремум всех $t > 0$, для которых

$$\int_{x-t}^{x+t} |\tilde{h}'_+(y) - \tilde{h}'_+(x)| dy \leq 1.$$

В [5] показано, что норму пространства $\widehat{L}_2(I, h)$ эквивалентным образом можно записать в следующей форме

$$\|F\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)} d\tilde{h}'(x) dy, \quad (5)$$

где $K(z) = K(z, z)$.

Поскольку преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм пространств $L_2^*(I, h)$ и $\widehat{L}_2(I, h)$, то безусловная базисность системы экспонент $\{e^{tz_k}\}$ в пространстве $L_2(I, h)$ равносильна утверждению, что множество показателей $\{z_k\}$ является множеством единственности для пространства $\widehat{L}_2(I, h)$, и для любой функции $F \in \widehat{L}_2(I, h)$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|F(z_k)|^2}{K(z_k)} \leq \|F\|^2 \leq P \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|F(z_k)|^2}{K(z_k)}, \quad (6)$$

где P — некоторая положительная постоянная.

Вычислим введенные выше характеристики для пространства $L_2(\alpha)$.

Лемма 1. *Если*

$$K_{\alpha}(z) = \|e^{zt}\|_{L_2(\alpha)}^2 = K_{\alpha}(z, z) = \int_{-1}^1 e^{2\operatorname{Re}zt} (1-|t|)^{2\alpha} dt,$$

$$h_{\alpha}(t) = -\alpha \ln(1-|t|), \quad \rho_{\alpha}(x) = \rho_{\tilde{h}_{\alpha}}(x), \quad \tau_{\alpha}(z, p) = (\ln K_{\alpha}(w), z, p),$$

то

$$\tilde{h}_{\alpha}(x) = |x| - \alpha \ln|x| + a_{\alpha}, \quad |x| \geq X(\alpha),$$

$$\tau_{\alpha}(z, p) \asymp |\operatorname{Re}z| + 1, \quad |\operatorname{Re}z| \rightarrow \infty, \quad \rho_{\alpha}(x) = \sqrt{1 - e^{-\frac{1}{2\alpha+1}x}}, \quad x > X(\alpha),$$

$$\ln K_{\alpha}(x) = 2|x| - (2\alpha+1) \ln|x| + b_{\alpha} + o(1), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

где

$$b_{\alpha} = \ln \frac{1}{2^{2\alpha+1}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{2\alpha} dy.$$

Поскольку функции $\tilde{h}_{\alpha}(x), \rho_{\alpha}(x)$ положительны и непрерывны, то, в частности выполняются соотношения

$$e^{\tilde{h}_{\alpha}(x)} \asymp e^{|x| - \alpha \ln(|x|+1)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{h}_{\alpha}''(x) \asymp (|x|+1)^{-2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\rho_{\alpha}(x) \asymp (|x|+1), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$K_{\alpha}(x) \asymp e^{2|x| - (2\alpha+1) \ln(|x|+1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Функция $K(x)$ — четная, поэтому вычисления проведем для $x > 0$. Асимптотическое представление для $\ln K_{\alpha}(x)$ следует из соотношения

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{2xt} (1-|t|)^{2\alpha} dt &= \int_{-1}^0 e^{2xt} (1+t)^{2\alpha} dt + e^{2x} \int_0^1 e^{-2x(1-t)} (1-t)^{2\alpha} dt = \\ &= O(1) + \frac{e^{2x}}{(2x)^{2\alpha+1}} \int_0^{2x} e^{-y} y^{2\alpha} dy = \frac{e^{2x+b_{\alpha}}}{x^{2\alpha+1}} (1+o(1)), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Функция $\tilde{h}_{\alpha}(x)$ для больших x вычисляется непосредственно по определению. Выражения для $\tau_{\alpha}, \rho_{\alpha}$ вычислены в работе [13]. \square

Лемма 2. Для $\delta_1, \delta_2, M > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}_+$ через $Q(x_0, \delta_1, \delta_2, M)$ обозначим прямоугольник

$$Q = \{x + iy : \delta_1 x_0 \leq x \leq \delta_2 x_0, |y| \leq Mx_0\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать достаточно малое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, достаточно большие $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, $M = M(\delta_1, \delta_2, \varepsilon) > 0$ так, что при $x_0 > X(\delta_1, \delta_2, \varepsilon)$ будет выполняться соотношение

$$\int_{\mathbb{C} \setminus Q(x_0, \delta_1, \delta_2, M)} |K_\alpha(x + iy, x_0)|^2 e^{-2\tilde{h}_\alpha(x)} \rho_\alpha(x) d\tilde{h}'_\alpha(x) dy \leq \varepsilon K_\alpha(x_0, x_0).$$

Доказательство. Возьмем положительное x_0 и представим ось абсцисс в виде объединения промежутков

$$I_1 = \{x : x > \delta_2 x_0\}, \quad I_2 = \{x : -\delta_1 x_0 \leq x < \delta_1 x_0\},$$

$$I_3 = \{x : -2x_0 < x < -\delta_1 x_0\}, \quad I_4 = \{x : x \leq -2x_0\},$$

$$I = \{x : \delta_1 x_0 \leq x \leq \delta_2 x_0\}.$$

Тогда дополнение к прямоугольнику $Q(x_0, \delta_1, \delta_2, M)$ разложится на объединение двух полуплоскостей $Q_1 = I_1 \times \mathbb{R}$ и $Q_4 = I_4 \times \mathbb{R}$, двух вертикальных полос $Q_2 = I_2 \times \mathbb{R}$ и $Q_3 = I_3 \times \mathbb{R}$ и двух полуполос $Q_+ = I \times \{y > Mx_0\}$, $Q_- = I \times \{y < -Mx_0\}$. Заметим, что функция $K_\alpha(x + iy, x_0)$ при фиксированном x является преобразованием Фурье функции $e^{(x+x_0)t-2h_\alpha(t)}$ и по теореме Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_\alpha(x + iy, x_0)|^2 dy = 2\pi \int_{-1}^1 e^{2(x+x_0)t-4h_\alpha(t)} dt.$$

Как доказано в работе [15], для любой выпуклой функции $u(t)$ выполняется соотношение

$$\int_{-1}^1 e^{yt-u(t)} dt \asymp \frac{e^{\tilde{u}(y)}}{\rho_{\tilde{u}}(y)}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Отсюда по лемме 1 имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_\alpha(x + iy, x_0)|^2 dy \asymp \frac{e^{4\tilde{h}_\alpha(\frac{x+x_0}{2})}}{\rho_\alpha(\frac{x+x_0}{2})} \asymp \frac{e^{4\tilde{h}_\alpha(\frac{x+x_0}{2})}}{(|x+x_0|+1)},$$

значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_\alpha(x + iy, x_0)|^2 e^{-2\tilde{h}_\alpha(x)} \rho_\alpha(x) dy \prec \frac{x_0(|x|+1)e^{4\tilde{h}_\alpha(\frac{x+x_0}{2})-2\tilde{h}_\alpha(x)-2\tilde{h}_\alpha(x_0)}}{|x+x_0|+1} K_\alpha(x_0).$$

В полуплоскости Q_1 получим оценку при $\delta_2 \rightarrow \infty$ равномерно по x_0

$$\int_{Q_1} |K_\alpha(x + iy, x_0)|^2 e^{-2\tilde{h}_\alpha(x)} \rho_\alpha(x) dy d\tilde{h}'_\alpha(x) \prec K_\alpha(x_0) \int_{\delta_2}^{\infty} \frac{dy}{(y+1)y} = o(K_\alpha(x_0)).$$

Если $\delta_1 \leq \frac{1}{2}$ и $|x| \leq \delta_1 x_0$, то имеем

$$\frac{x_0(|x|+1)e^{4\tilde{h}_\alpha(\frac{x+x_0}{2})-2\tilde{h}_\alpha(x)-2\tilde{h}_\alpha(x_0)}}{|x+x_0|+1} \prec \frac{x_0(x_0+1)^{2\alpha}(|x|+1)^{2\alpha+1}}{(|x+x_0|+1)^{4\alpha+1}} \prec \frac{(|x|+1)^{2\alpha+1}}{(|x+x_0|+1)^{2\alpha}},$$

поэтому в полосе Q_2 имеем при $\delta_1 \rightarrow 0$ равномерно по $x_0 > 1$

$$\int_{Q_2} |K_\alpha(x + iy, x_0)|^2 e^{-2\tilde{h}_\alpha(x)} \rho_\alpha(x) dy d\tilde{h}'_\alpha(x) \prec \frac{K_\alpha(x_0)}{x_0^{2\alpha}} \int_{-\delta_1 x_0}^{\delta_1 x_0} (|x|+1)^{2\alpha-1} dx = o(K_\alpha(x_0)).$$

При фиксированном $\delta_1 \leq \frac{1}{2}$ для $-2x_0 \leq x \leq -\delta_1 x_0$ получим

$$\frac{x_0(|x|+1)e^{4\tilde{h}_\alpha(\frac{x+x_0}{2})-2\tilde{h}_\alpha(x)-2\tilde{h}_\alpha(x_0)}}{|x+x_0|+1} \prec e^{-2\delta_1 x_0} (x_0+1)^{4\alpha+2},$$

поэтому в полосе Q_3 при $x_0 \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_{Q_3} |K_\alpha(x + iy, x_0)|^2 e^{-2\tilde{h}_\alpha(x)} \rho_\alpha(x) dy d\tilde{h}'_\alpha(x) \prec K_\alpha(x_0) e^{-2\delta_1 x_0} (x_0+1)^{4\alpha+3} = o(K_\alpha(x_0)).$$

При фиксированном $\delta_1 \leq \frac{1}{2}$ для $x \leq -2x_0$ имеем

$$\frac{x_0(|x| + 1)e^{4\tilde{h}_\alpha(\frac{x+x_0}{2}) - 2\tilde{h}_\alpha(x) - 2\tilde{h}_\alpha(x_0)}}{|x + x_0| + 1} \prec e^{-4x_0}(x_0 + 1)^{2\alpha+1}(|x| + 1)^{-2\alpha},$$

поэтому в полосе Q_4 при $x_0 \rightarrow \infty$ верна оценка

$$\int_{Q_4} |K_\alpha(x+iy, x_0)|^2 e^{-2\tilde{h}_\alpha(x)} \rho_\alpha(x) dy d\tilde{h}'_\alpha(x) \prec K_\alpha(x_0) e^{-4x_0} (x_0+1)^{2\alpha+1} \int_{2x_0}^{+\infty} (|x|+1)^{-2\alpha-2} dx = o(K_\alpha(x_0)).$$

Выбрав нужным образом δ_1 и δ_2 , перейдем к оценкам интегралов по полуполосам Q_\pm . Для этого будем пользоваться следующим представлением для воспроизводящего ядра при $z = x + iy \neq w = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned} K_\alpha(z, w) &= \int_{-1}^1 e^{zt + \bar{w}t - 2h_\alpha(t)} dt = \int_{-1}^1 e^{2(xt - h_\alpha(t))} d \frac{e^{(\bar{w} - \bar{z})t}}{\bar{w} - \bar{z}} = \\ &= \frac{2}{\bar{w} - \bar{z}} \int_{-1}^1 e^{zt + \bar{w}t - 2h_\alpha(t)} (x - h'_\alpha(t)) dt. \end{aligned}$$

По неравенству Коши-Буняковского отсюда получим

$$|K_\alpha(z, w)|^2 \leq \frac{4}{|w - z|^2} \int_{-1}^1 e^{2xt - 2h_\alpha(t)} |x - h'_\alpha(t)| dt \cdot \int_{-1}^1 e^{2x_0t - 2h_\alpha(t)} |x_0 - h'_\alpha(t)| dt.$$

Функция $h'_\alpha(t)$ меняет знак только в точке $t = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{2xt - 2h_\alpha(t)} |x - h'_\alpha(t)| dt &\leq \int_{-1}^1 e^{2xt - 2h_\alpha(t)} |x| dt - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2xt} de^{-2h_\alpha(t)} \leq \\ &\leq |x| K_\alpha(x) + 1 + x K_\alpha(x) \leq 3K_\alpha(x) |x|, \end{aligned}$$

когда $K_\alpha(x) \geq 1$. Из последних двух оценок следует.

$$|K_\alpha(z, w)|^2 \leq \frac{36|x||x_0|}{|w - z|^2} K_\alpha(x) K_\alpha(x_0).$$

Отсюда и из оценок в лемме 1 получим

$$\begin{aligned} \int_{Q_+} |K_\alpha(x + iy, x_0)|^2 e^{-\tilde{h}_\alpha(x)} \rho_\alpha(x) dy d\tilde{h}_\alpha(x) &\leq \\ &\leq 36K_\alpha(x_0)x_0 \int_I \int_{Mx_0}^\infty \frac{x}{((x - x_0)^2 + y^2)(x + 1)^2} dy dx \prec \frac{1}{M} K_\alpha(x_0). \end{aligned}$$

Таким образом, выбирая число M достаточно большим, мы можем считать интеграл по полуполосе Q_+ достаточно малым. Также оценивается интеграл по полуполосе Q_- . \square

Лемма 2 доказана. Легко видеть, что точно также доказывается следующая лемма.

Лемма 3. Для $\delta_1, \delta_2, M > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}_+$, $y_0 \in \mathbb{R}$ через $Q(x_0, y_0, \delta_1, \delta_2, M)$ обозначим прямоугольник

$$Q = \{x + iy : \delta_1 x_0 \leq x \leq \delta_2 x_0, |y - y_0| \leq Mx_0\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать достаточно малое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, достаточно большие $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, $M = M(\delta_1, \delta_2, \varepsilon) > 0$ так, что при $x_0 > X(\delta_1, \delta_2, \varepsilon)$ будет выполняться соотношение

$$\int_{\mathbb{C} \setminus Q(x_0, y_0, \delta_1, \delta_2, M)} |K_\alpha(x + iy, x_0 + iy_0)|^2 e^{-2\tilde{h}_\alpha(x)} \rho_\alpha(x) d\tilde{h}'_\alpha(x) dy \leq \varepsilon K_\alpha(x_0, x_0).$$

3. ОЦЕНКА СНИЗУ ЧАСТОТЫ ПОКАЗАТЕЛЕЙ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Пусть система $\{\exp(z_j t)\}$ образует безусловный базис в пространстве $L_2(\alpha)$. Тогда, как уже отмечалось во втором параграфе, система $K_\alpha(z, z_j)$ образует безусловный базис в пространстве $\widehat{L}_2(\alpha)$, то есть для некоторого числа P выполняется соотношение (6). В этом соотношении норму можно считать определенной по формуле (5). Возьмем достаточно малое положительное ε , степень малости определим позже. По этому числу ε на основе леммы 3 найдем числа $\delta_1 \in (0, \frac{1}{2})$, δ_2 и M , для которых выполняется утверждение леммы 3.

Предположим, что для некоторых $x_0 \in \mathbb{R}_+$, y_0 в прямоугольнике $Q := Q(x_0, y_0, \delta_1 + \frac{1}{4}, \delta_2 + \frac{1}{4}, M + \frac{1}{4})$ нет показателей z_j .

По лемме 1 величины $\tau_\alpha(z)$ и $\rho_\alpha(z)$ сравнимы с $|\operatorname{Re} z| + 1$. Учитывая пункт 1 теоремы 2, можно утверждать, что найдется число $\sigma > 0$, такое, что круги $B_j = B(z_j, \sigma(|\operatorname{Re} z_j| + 1))$ попарно не пересекаются и лежат вне прямоугольника Q . По определению величины τ_α в каждом круге B_j существует гармоническая функция H_j , отстоящая от функции $\ln K_\alpha$ не более чем на $\ln(5P)$. По свойствам субгармонических функций для любой целой функции F выполняется неравенство

$$|F(z_j)|^2 e^{-2H_j(z_j)} \leq \frac{1}{\pi \sigma^2 (|\operatorname{Re} z_j| + 1)^2} \int_{B_j} |F(z)|^2 e^{-2H_j(z)} dm(z),$$

где $dm(z)$ — плоская мера Лебега. Поскольку в круге B_j $|\operatorname{Re} z_j| + 1 \asymp |\operatorname{Re} z| + 1$, то

$$|F(z_j)|^2 e^{-2H_j(z_j)} \prec \int_{B_j} \frac{|F(x + iy)|^2}{K(x)(|x| + 1)^2} dx dy \prec \int_{B_j} \frac{|F(x + iy)|^2}{K(x)} d\tilde{h}'(x) dy.$$

Просуммируем эти оценки по всем j :

$$\sum_j \frac{|F(z_j)|^2}{K(z_j)} \prec \int_{\mathbb{C} \setminus Q} \frac{|F(x + iy)|^2}{K(x)} d\tilde{h}'(x) dy.$$

Применим эту оценку к функции $F(z) = K_\alpha(z, x_0 + iy_0)$. Получим по лемме 3, что за счет выбора размеров прямоугольника Q можно считать выполненным неравенство

$$\sum_j \frac{|F(z_j)|^2}{K(z_j)} \leq \varepsilon K_\alpha(x_0, x_0) = \varepsilon \|K_\alpha(z, x_0 + iy_0)\|^2.$$

Если $\varepsilon < \frac{1}{P}$, то это противоречит условию (6).

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бари Н.К. *О базисах в гильбертовом пространстве* // ДАН. 1946. Т. 54. С. 383–386.
2. Никольский Н.К., Павлов Б.С., Хрущев С.В. *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. I.* // Препринт ЛОМИ. С. 8–80.
3. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Москва, Наука. 1965. 448 с.
4. Никольский Н.К. *Лекции об операторе сдвига.* Москва, Наука. 1980.
5. Башмаков Р.А. *Системы экспонент в весовых гильбертовых пространствах на \mathbb{R}* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 2006 г.
6. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций* // Сиб. мат. ж. 1985. Т. 26. № 4. С. 159–175.
7. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *О безусловных базисах из экспонент в гильбертовых пространствах* // Уфимский мат. журнал. Т. 3, № 1. 2011. С. 3–15.
8. Левин Б.Я. *Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа* // Матем. физика и функц. анализ. ФТИНТ АН УССР. 1969. Вып. 1. С. 136–146.
9. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. № 3. С. 657–702.

10. Исаев К.П. *Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках* // Уфимский мат. журнал. Т. 2, № 1. 2010. С. 1–86.
11. A. Borichev, Yu. Lyubarskii *Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces* // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 9 (2010). P. 449–461.
12. Башмаков Р.А., Путинцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Целые функции типа синуса и их применение* // Алгебра и анализ. 22:5. 2010. С. 49–68.
13. К.Р. Isaev, R.S. Yulmukhametov *Lower estimate of frequency of indicators of unconditional exponential bases in spaces with a power weight* // Eurasian Mathematical Journal [принята в печать].
14. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства* // Матем. заметки. 1990. Т. 48, №5. С. 80–87.
15. Напалков В.В., Башмаков Р.А., Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическое поведение интегралов Лапласа и геометрические характеристики выпуклых функций* // ДАН. 2007. Т. 413, № 1. С. 20–22.

Константин Петрович Исаев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: orbit81@list.ru

Трунов Кирилл Владимирович,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: trounovkv@mail.ru