ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 1 (2012). С. 71-81.

УДК 517.9

СИММЕТРИЙНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ ДВУХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А.А. КАСАТКИН

Аннотация. Исследуются точечные симметрии систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля. Найдена бесконечномерная алгебра L операторов, порождающих преобразования эквивалентности, и показано, что допускаемые операторы всегда образуют её подалгебру. Поэтому в основу классификации систем по точечным симметриям может быть положена оптимальная система подалгебр алгебры L. Построена оптимальная система одномерных подалгебр для L и полная оптимальная система для её конечномерной части L_6.

Ключевые слова: дробные производные, симметрии, оптимальная система подалгебр, групповая классификация.

1. Введение

В последние годы аппарат дробного интегро-дифференцирования [1] всё более интенсивно используется при построении математических моделей различных процессов. Уравнения с производными дробного порядка различных типов используются при моделировании процессов со сложными нелокальными зависимостями, стохастических эффектов со степенными законами распределения, в теории автоматического управления и т. д.

В работах [2, 3, 4] классические методы группового анализа дифференциальных уравнений [5] адаптируются для исследования уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля и Капуто.

В частности, в [2] показано, что в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, уравнения с производной порядка $0 < \alpha < 1$ имеют конечномерные группы допускаемых преобразований.

В работе [3] проведена классификации уравнений вида $D_x^\alpha y(x) = f(x, y)$ по допускаемым группам точечных преобразований и построены классы точных решений. В данной работе исследуются системы двух уравнений того же вида

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = f(t, u, v), \\ D^\alpha g(t) = g(t, u, v) \end{cases}$$

с дробной производной типа Римана-Лиувилля. Найдены преобразования эквивалентности системы, решена также задача поиска симметрий для известных функций f, g.

A.A. Kasatkin, Symmetry properties for systems of two ordinary fractional difeferential equations.

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО УГАТУ в рамках договора №11.G34.31.0042 по постановлению №220 Правительства РФ.

Поступила 30.12.2011.

Показано, что для системы (1) алгебра допускаемых операторов является некоторой подалгеброй в алгебре операторов L, порождающих преобразования эквивалентности. Поэтому задача классификации систем сводится к построению оптимальной системы подалгебр $\Theta(L)$ [6, 7].

2. Симметрии и преобразования эквивалентности

В работе рассматривается система двух дифференциальных уравнений с дробными производными

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = f(t,u,v), \\ D^\alpha g(t) = g(t,u,v). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь D^α – оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля по t:

$$D^\alpha u(t) \equiv D^m \left(I^{m-\alpha} u(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int\limits_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \tag{2}$$

при $0 < m-1 < \alpha \leqslant m, m \in \mathbb{N}$ ([1]).

Замена переменных

$$\bar{t} = \Phi(t,u,v),\ \ \bar{u} = \Psi^u(t,u,v),\ \ \bar{v} = \Psi^v(t,u,v) \tag{3}$$

является преобразованием эквивалентности для системы (2), если в новых переменных система имеет ту же самую форму:

$$\begin{cases} D^\alpha \bar{u}(\bar{t}) = \bar{f}(\bar{t},\bar{u},\bar{v}), \\ D^\alpha \bar{g}(\bar{t}) = \bar{g}(\bar{t},\bar{u},\bar{v}). \end{cases}$$

Функции $\bar{f}, \bar{g}$ при этом являются новыми функциями аргументов $\bar{t}, \bar{u}, \bar{v}$. Если же функции остаются теми же самыми, преобразование (3) называется *допускаемым преобразованием* системы (1).

Однопараметрическая группа преобразований может быть задана *инфинитезимальным оператором.* Для преобразований эквивалентности он имеет вид

$$X = \xi(t,u,v)\frac{\partial}{\partial t} + \eta^u(t,u,v)\frac{\partial}{\partial u} + \eta^v(t,u,v)\frac{\partial}{\partial v} + \nu^u(t,u,v,f,g)\frac{\partial}{\partial f} + \nu^v(t,u,v,f,g)\frac{\partial}{\partial g}. \tag{4}$$

Согласно результатам [2], действие инфинитезимальных преобразований

$$\bar{t} = t + a\xi + o(a), \qquad \bar{u} = u + a\eta^u + o(a), \qquad \bar{v} = v + a\eta^v + o(a)$$

на дробные производные определяется *формулой продолжения*:

$$D^\alpha_{\bar{t}} \bar{u}(\bar{t}) = D^\alpha_t u(t) + a\zeta^u_\alpha + o(a),$$

где ζ^u_α может быть записано в виде ряда

$$\zeta^u_\alpha = D^\alpha_t(\eta^u) - \alpha D_t(\xi) D^\alpha_t(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{n-\alpha}{n+1} D^{n-\alpha}_t(u) D^{n+1}_t(\xi). \tag{5}$$

Определяющие уравнения для поиска коэффициентов инфинитезимального оператора (4) преобразований эквивалентности имеют вид

$$(\zeta^u_\alpha - \nu^u)|_{D^\alpha u = f, D^\alpha v = g} = 0,$$
$$(\zeta^v_\alpha - \nu^v)|_{D^\alpha u = f, D^\alpha v = g} = 0,$$

где f и g считаются независимыми переменными.

По аналогии с алгоритмом построения координат допускаемых операторов, предложенным в [2, 3], будем искать симметрии и преобразования эквивалентности из следующего класса:

$$\begin{aligned}&\xi = \xi(t), \qquad \xi(0) = 0,\\ &\eta^u = p^{uu}(t)u + p^{uv}(t)v + q^u(t), \qquad \eta^v = p^{vu}(t)u + p^{vv}(t)v + q^v(t).\end{aligned} \tag{6}$$

В этом случае $D^\alpha(\eta^u), D^\alpha(\eta^v)$ в формуле продолжения (5) и в её аналоге для ζ^v_α могут быть представлены через дробные производные и интегралы $D^{\alpha-n}u, D^{\alpha-n}v$ с помощью обобщенного правила Лейбница (для дробного дифференцирования сложной функции в общем виде компактных формул не существует).

В результате определяющие уравнения расщепляются по переменным $D^{\alpha-n}u$, $D^{\alpha-n}v$, и решение полученной бесконечной системы уравнений даёт выражения для координат оператора (4):

$$\begin{cases}\xi = (C_1 + C_2 t)t,\\ \eta^u = (\alpha-1)C_2 tu + C_3 u + C_4 v + q^u(t),\\ \eta^v = (\alpha-1)C_2 tu + C_5 u + C_6 v + q^v(t),\\ \nu^u = -\alpha f C_1 - (\alpha+1)C_2 tf + C_3 f + C_4 g + D^\alpha q^u(t),\\ \nu^v = -\alpha g C_1 - (\alpha+1)C_2 tg + C_5 f + C_6 g + D^\alpha q^v(t),\end{cases} \tag{7}$$

где $C_1, \ldots, C_6$ – произвольные постоянные, а q^u, q^v – произвольные функции t.

При поиске допускаемых операторов вида

$$X = \xi(t,u,v)\frac{\partial}{\partial t} + \eta^u(t,u,v)\frac{\partial}{\partial u} + \eta^v(t,u,v)\frac{\partial}{\partial v},$$

определяющие уравнения принимают вид

$$(\zeta^u_\alpha - \xi f_t - \eta^u f_u - \eta^v f_v)|_{D^\alpha u = f(t,u,v), D^\alpha v = g(t,u,v)} = 0,$$
$$(\zeta^v_\alpha - \xi g_t - \eta^u g_u - \eta^v g_v)|_{D^\alpha u = f(t,u,v), D^\alpha v = g(t,u,v)} = 0.$$

Их решение с теми же ограничениями на класс симметрий (6) приводит к координатам ξ, η^u, η^v того же вида (7), но с дополнительными условиями

$$\begin{cases}(C_1 + C_2 t)tf_t + [(\alpha-1)C_2 tu + C_3 u + C_4 v + q^u(t)]f_u +\\ \qquad + [(\alpha-1)C_2 tv + C_5 u + C_6 v + q^v(t)]f_v =\\ \qquad\qquad = D^\alpha_t q^u(t) + (C_3 - \alpha C_1 - (\alpha+1)C_2 t)f + C_4 g,\\ (C_1 + C_2 t)tg_t + [(\alpha-1)C_2 tu + C_3 u + C_4 v + q^u(t)]g_u +\\ \qquad + [(\alpha-1)C_2 tv + C_5 u + C_6 v + q^v(t)]g_v =\\ \qquad\qquad = D^\alpha_t q^v(t) + (C_6 - \alpha C_1 - (\alpha+1)C_2 t)g + C_5 f.\end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, при заданных функциях $f(t,u,v), g(t,u,v)$ симметрии системы (1) могут быть найдены путём решения системы (8). Допускаемые операторы образуют подалгебру в алгебре Ли $L = L_6 + L_\infty$, где алгебра L_6 порождается базисными операторами

$$\begin{aligned}&X_1 = t\frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + (\alpha-1)tu\frac{\partial}{\partial u} + (\alpha-1)tv\frac{\partial}{\partial v},\\ &X_3 = u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_4 = v\frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_5 = u\frac{\partial}{\partial v}, \qquad X_6 = v\frac{\partial}{\partial v},\end{aligned} \tag{9}$$

а бесконечномерная алгебра L_∞ – операторами вида

$$X_{q^u} = q^u(t)\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_{q^v} = q^v(t)\frac{\partial}{\partial v}. \tag{10}$$

Отметим, что в рассматриваемом случае все возможные симметрии системы (1) могут быть получены из алгебры L, порождающей преобразования эквивалентности. При этом, если две системы вида (1) связаны преобразованием эквивалентности, то и их операторы получаются друг из друга этим же преобразованием (заменой переменных в дифференциальном операторе). Множество таких преобразований в алгебре Ли L соответствует группе *внутренних автоморфизмов* этой алгебры [5],

Таким образом, для решения задачи классификации уравнений по допускаемым группам преобразований (одно-, двупараметрическим и т.д) достаточно построить классы неподобных подалгебр алгебры L с точностью до преобразований эквивалентности, что в нашем случае равносильно задаче построения оптимальной системы подалгебр алгебры L (поиска неподобных подалгебр с точностью до внутренних автоморфизмов).

3. Оптимальная система подалгебр

Для построения оптимальной системы подалгебр $\Theta(L)$ удобно ввести базис

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = X_2, \quad Y_3 = X_3 - X_6, \quad Y_4 = X_4 \quad Y_5 = X_5 \quad Y_6 = X_3 + X_6.$$

Таблица коммутаторов принимает вид

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_{q^u}	Y_{q^v}
Y_1	0	Y_2	0	0	0	0	$\langle t\dot{q}^u\rangle_u$	$\langle t\dot{q}^v\rangle_v$
Y_2		0	0	0	0	0	$\langle t^2\dot{q}^u - (\alpha-1)tq^u\rangle_u$	$\langle t^2\dot{q}^v - (\alpha-1)tq^v\rangle_v$
Y_3			0	$-2Y_4$	$2Y_5$	0	$\langle -q^u\rangle_u$	$\langle q^v\rangle_v$
Y_4				0	$-Y_3$	0	0	$\langle -q^v\rangle_u$
Y_5					0	0	$\langle -q^u\rangle_v$	0
Y_6						0	$\langle -q^u\rangle_u$	$\langle -q^v\rangle_v$
Y_{ν^u}							0	0
Y_{ν^v}								0

Часть таблицы ниже главной диагонали достраивается в силу антисимметричности коммутатора. Здесь используются сокращённые обозначения операторов

$$\langle q\rangle_u = q\frac{\partial}{\partial u}, \quad \langle q\rangle_v = q\frac{\partial}{\partial v}.$$

Видно, что совокупность операторов $\{Y_{q^u}, Y_{q^v}\}$ с произвольными функциями $q^u(t), q^v(t)$ является бесконечным абелевым идеалом L_∞ в алгебре L, и алгебра имеет следующую структуру:

$$L = L_\infty \oplus \{Y_1, Y_2\} \oplus \{Y_3, Y_4, Y_5\} \oplus \{Y_6\}.$$

Подалгебры $\{Y_6\}$ и $\{Y_1, Y_2\}$ являются соответственно центром и идеалом в алгебре $L_6 = \{Y_1, \dots, Y_6\}$.

Каждый из операторов $Z \in L$ порождает внутренний автоморфизм исследуемой алгебры L. Его можно построить как решение задачи Коши

$$\frac{d\bar{Y}}{ds} = [Z, \bar{Y}], \quad \bar{Y}\Big|_{s=0} = Y, \tag{11}$$

где операторы определяются своими координатами в заданном базисе:

$$\bar{Y} = \bar{k}^1 Y_1 + \ldots + \bar{k}^6 Y_6 + Y_{\bar{q}^u} + Y_{\bar{q}^v}, \quad \bar{k}^i = \bar{k}^i(s, k^1, \dots, k^6, q^u, q^v).$$

Отметим, что внутренний автоморфизм, построенный для операторов Z из центра, всегда является тождественным преобразованием в L_6.

Решая систему уравнений (11) для $Y_1, \ldots, Y_5$, получим внутренние автоморфизмы в виде преобразований координат оператора:

	$\bar{k}^1$	$\bar{k}^2$	$\bar{k}^3$	$\bar{k}^4$	$\bar{k}^5$	$\bar{k}^6$
A_1	k^1	a_1k^2	k^3	k^4	k^5	k^6
A_2	k^1	$k^2 - a_2k^1$	k^3	k^4	k^5	k^6
A_3	k^1	k^2	k^3	a_3k^4	k^5/a_3	k^6
A_4	k^1	k^2	$k^3 - a_4k^5$	$k^4 + 2a_4k^3 - a_4{}^2k^5$	k^5	k^6
A_5	k^1	k^2	$k^3 + a_5k^4$	k^4	$k^5 - 2a_5k^3 - a_5{}^2k^4$	k^6

Здесь a_i – произвольные параметры. Добавление дискретных автоморфизмов (преобразований эквивалентности $\bar{u} = -u$) позволяет не накладывать ограничение $a^3 > 0$. Преобразование обращения времени $\bar{t} = -t$ изменяет оператор Римана-Лиувилля и не рассматривается в качестве дискретного преобразования эквивалентности. Поэтому в дальнейшем принимается $a^1 > 0$.

Действие автоморфизмов $A_1 \ldots A_5, A_6$ на координаты q^u, q^v выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&A_1: \ \ \bar{q}^u = q^u(a_1t), \quad \bar{q}^v = q^v(a_1t),\\
&A_2: \ \ \bar{q}^u = (1-a_2t)^{\alpha-1}q^u\left(\frac{t}{1-at}\right), \quad \bar{q}^v = (1-a_2t)^{\alpha-1}q^u\left(\frac{t}{1-at}\right),\\
&A_3: \ \ \bar{q}^u = \tilde{a}_3q^u, \quad \bar{q}^v = q^v/\tilde{a}_3, \quad (\tilde{a}_3 = \pm\sqrt{|a_3|}, \tilde{a}_3a_3 > 0),\\
&A_4: \ \ \bar{q}^u = q^u - a_4q^v, \quad \bar{q}^v = q^v,\\
&A_5: \ \ \bar{q}^u = q^u, \quad \bar{q}^v = q^v - a_5q^u,\\
&A_6: \ \ \bar{q}^u = a_6q^u, \quad \bar{q}^v = a_6q^v, \quad a_6 > 0,
\end{aligned}$$

а комбинация автоморфизмов A_{ν^u}, A_{ν^v} имеет вид

$$\begin{aligned}
\bar{q}^u &= q^u - (k^1t + k^2t^2)\dot{\nu}^u + (k^3 + k^6 + (\alpha-1)k^2t)\nu^u + k^4\nu^v,\\
\bar{q}^v &= q^v + k^5\nu^u - (k^1t + k^2t^2)\dot{\nu}^v + (-k^3 + k^6 + (\alpha-1)k^2t)\nu^v.
\end{aligned} \tag{12}$$

Особенности построения автоморфизмов и оптимальной системы подалгебр для операторов с произвольными функциями проиллюстрированы, например, в работе [7].

Следуя методике [6], базисы искомых r-мерных подалгебр алгебры L записываются в виде матриц, строки которых – координаты базиса подалгебры в базисе Y. Элементы матрицы должны удовлетворять *условиям подалгебры* – требованию замкнутости относительно операции коммутирования. На множестве матриц рассматривается действие группы внутренних автоморфизмов A (линейные преобразования столбцов) и группы B преобразований базиса подалгебры (все линейные невырожденные преобразования строк). Неподобные относительно этих преобразований матрицы и определяют элементы оптимальной системы $\Theta(L)$. При классификации матриц преобразованиями A, B добиваемся максимально возможного числа нулевых координат и минимального числа произвольных постоянных.

Всегда можно построить оптимальную систему, удовлетворяющую дополнительному требованию *нормализованности* – вместе с каждой подалгеброй $K \in \Theta_A L$ в оптимальной системе должен содержаться её нормализатор $\mathrm{Nor}_L K \in \Theta_A L$. Нормализатором $\mathrm{Nor}_L K$ подалгебры K в L называется наибольшая подалгебра алгебры L, для которой K является идеалом, то есть для всех $X \in K$ и $Y \in \mathrm{Nor}_L K$ выполнено $[X, Y] \in K$.

Построение начинается с алгебры $L_4 = \{Y_3, Y_4, Y_5, Y_6\}$. В ней действуют только автоморфизмы A_3, A_4, A_5. Выражения $k^6, k^3k^3 - k^4k^5$ являются инвариантами группы внутренних автоморфизмов. В результате вычислений по описанному выше алгоритму получена нормализованная оптимальная система подалгебр $\Theta(L_4)$, приведённая в таблице 1. В таблицах используются сокращения $\{4-5+6\} = \{Y_4 - Y_5 + \gamma Y_6\}$, знак „=” в столбце Nor означает, что данная подалгебра самонормализована.

Табл. 1. Оптимальная система $\Theta(L_4)$

№	Подалгебра	Nor
4.1	$3,4,5,6$	$=$
3.1	$3,4,6$	$=$
3.2	$3,4,5$	4.1
2.1	$3,6$	$=$
2.2	$4-5,6$	$=$
2.3	$4,6$	3.1
2.4	$3+\beta 6,4$	3.1
1.1	$3+\gamma 6$	2.1
1.2	6	4.1
1.3	$4+6$	2.3
1.4	4	3.1
1.5	$4-5+\gamma 6$	2.2
	$\gamma \geq 0, \beta \in \mathbf{R}$	

Оптимальная система $\Theta(L_6)$ строится с использованием разложения $L_6 = J \oplus N$, где $N = L_4$ – подалгебра, $J = \{Y_1, Y_2\}$ – идеал. Для каждой подалгебры N_p из оптимальной системы $\Theta_{A_N}(N)$ (в нашем случае из таблицы 1) находится стабилизатор $A_p \subset A$ в L_6, то есть автоморфизмы L_6, которые не меняют эту подалгебру (но могут изменить вид соответствующей матрицы). Стабилизатор A_p в рассматриваемом случае включает A_1, A_2 и некоторые комбинации A_3, A_4, A_5.

Далее с помощью преобразований из A_p происходит упрощение произвольной подалгебры из $J \oplus N_p$ (N_p с произвольной добавленными операторами из идеала) и строится оптимальная система $\Theta_{A_p}(J \oplus N_p) = \{K_{p,q}\}$. Совокупность всех полученных для разных N_p подалгебр и составляет оптимальную систему $\Theta_A(L_6)$.

Построенная таким образом нормализованная оптимальная система с соответствующими номерами N_p и нормализаторов приведена в таблицах 2-5.

Разложение алгебры L на идеал L_∞ и подалгебру L_6 позволяет строить $\Theta(L)$ на базе оптимальной системы $\Theta(L_6)$ по той же методике. Автоморфизмы A_{ν^u}, A_{ν^v} вида (12) изменяют только составляющие $\langle q^u \rangle_u$ и $\langle q^v \rangle_v$ оператора Y. При выполнении для коэффициентов оператора хотя бы одного из условий

$$
\begin{aligned}
&k^1 \neq 0, \quad k^2 \neq 0,\\
&(k^6)^2 - (k^3)^2 - k^4 k^5 \neq 0,
\end{aligned}
$$

выбором функций $\nu^u(t)$, $\nu^v(t)$ можно обратить обратить в нуль произвольные функции q^u, q^v. Таким образом, только элементы 1.1 с $\gamma = 1$ и 1.4 оптимальной системы $\Theta(L_6)$ (а также нулевая подалгебра) порождают новые элементы $\Theta(L)$. Соответствующие подалгебры $1.18 - 1.20$ также приведены в таблице 2.

Аналогичным образом могут быть построены подалгебры большей размерности, содержащие $\langle q^u \rangle_u$ и $\langle q^v \rangle_v$. При этом условия подалгебры записываются в виде дифференциальных соотношений.

Для каждой подалгебры K из оптимальной системы путём совместного решения уравнений (8) с известными коэффициентами $C_1, \ldots C_6$ и функциями $q^u(t), q^v(t)$ можно найти все функции $f(t,u,v), g(t,u,v)$, при которых система (1) допускает заданные операторы. При этом произвольными элементами в этих функциях будут инварианты подалгебры K (как видно из структуры уравнений (8)). Все системы, допускающие подобные K алгебры операторов, приводятся к этому виду преобразованиями эквивалентности.

Результаты вычислений приведены в соответствующих столбцах таблиц 2-5, где F и G являются произвольными функциями инвариантов J_i. Для удобства записи в таблицах иногда используются полярные координаты r, ϕ: $u = r\cos\phi, u = v\sin\phi$.

4. Заключение

Построены преобразования эквивалентности системы (1), которые включают общее невырожденное линейное преобразование неизвестных функций u и v, растяжение независимой переменной t, прибавление фиксированных функций $q(t)$ к u и v и проективное преобразование специального вида.

Показано, что допускаемые операторы системы образуют подалгебру алгебры $L = L_\infty \oplus L_6$, порождающей преобразования эквивалентности, и задача классификации систем (1) по допускаемым группам точечных преобразований сводится к построению оптимальной системы подалгебр $\Theta(L)$.

Для построения $\Theta(L)$ применяются классические алгоритмы [6, 7]. В результате вычислена полная нормализованная оптимальная система подалгебр L_6 и оптимальная система одномерных подалгебр L.

Симметрии систем могут быть использованы для получения их решений. Системы вида (1) также возникают при построении классов решений уравнений с частными производными дробного порядка, например, методом инвариантных подпространств [8].

Табл. 2. Оптимальная система $\Theta_1(L_6 \oplus L_\infty)$

№	Подалгебра	Nor	N_p	f, g	Инварианты
1.1	$3+\gamma 6$	4.2		$f = uF(t, v^{1+\gamma}u^{1-\gamma})$	$J_1 = t$
				$g = vG(t, v^{1+\gamma}u^{1-\gamma})$	$J_2 = v^{1+\gamma}u^{1-\gamma}$
1.2	6	6.1		$f = uF(t, v/u)$	$J_1 = t$
				$g = uG(t, v/u)$	$J_2 = v/u$
1.3	$4+6$	4.4		$f = v(F + G\ln v)$	$J_1 = t$
				$g = vG$	$J_2 = ve^{-u/v}$
1.4	4	5.1		$f = F(t, v) + uG(t, v)$	$J_1 = t$
				$g = vG(t, v)$	$J_2 = v$
1.5	$4-5+\gamma 6$	4.3		$f = uF - vG$	$J_1 = t$
				$g = vF + uG$	$J_2 = re^{\gamma\phi}$
1.6	1	5.3	0	$f = t^{-\alpha}F(u, v)$	$J_1 = u$
				$g = t^{-\alpha}G(u, v)$	$J_2 = v$
1.7	2	6.1	0	$f = t^{-2\alpha}uF$	$J_1 = u/v$
				$g = t^{-2\alpha}vG$	$J_2 = vt^{1-\alpha}$
1.8	$k1+3+\gamma 6$	3.8	1.1	$f = t^{-\alpha}uF$	$J_1 = u^k t^{-1-\gamma}$
				$g = t^{-\alpha}vG$	$J_2 = v^k t^{1-\gamma}$
1.9	$k1+6$	5.3	1.2	$f = v^{1-\alpha k}F$	$J_1 = vt^{-1/k}$
				$g = v^{1-\alpha k}G$	$J_2 = u/v$
1.10	$k1+4+6$	3.10	1.3	$f = t^{-\alpha}v(F + G\ln t)$	$J_1 = vt^{-1/k}$
				$g = kt^{-\alpha}vG$	$J_2 = ve^{-u/v}$
1.11	$1+4$	3.10	1.4	$f = t^{-\alpha}(F + G\ln t)$	$J_1 = v$
				$g = t^{-\alpha}G$	$J_2 = u - v\ln t$
1.12	$k1+\gamma 6+$	3.9	1.5	$f = t^{-\alpha}(uF - vG)$	$J_1 = t^{1/k}e^{\phi}$
	$+4-5$			$g = t^{-\alpha}(vF + uG)$	$J_2 = re^{\gamma\phi}$
1.13	$\pm 2+3+\gamma 6$	$3.12_{0,0}$	1.1	$f = t^{-1-\alpha}e^{\mp 1/t}F$	$J_1 = ut^{1-\alpha}e^{\pm(\gamma+1)/t}$
				$g = t^{-1-\alpha}e^{\mp 1/t}G$	$J_2 = vt^{1-\alpha}e^{\pm(\gamma-1)/t}$

№	Подалгебра	Nor	N_p	f, g	Инварианты
1.14	$\pm 2+6$	5.4_0	1.2	$f=t^{-2\alpha}uF$	$J_1=ut^{1-\alpha}e^{\pm 1/t}$
				$g=t^{-2\alpha}vG$	$J_2=u/v$
1.15	$\pm 2+4+6$	3.15_0	1.3	$f=t^{-2\alpha}v(F\mp G/t)$	$J_1=u/v\pm 1/t$
				$g=t^{-2\alpha}vG$	$J_2=vt^{1-\alpha}e^{\pm 1/t}$
1.16	$2+4$	$4.8_{-2,0}$	1.4	$f=t^{-2\alpha}v(F-G/t)$	$J_1=u/v+1/t$
				$g=t^{-2\alpha}vG$	$J_2=vt^{1-\alpha}$
1.17	$\pm 2+\gamma 6+$	$3.13_{0,0}$	1.5	$f=t^{-2\alpha}(uF-vG)$	$J_1=\phi\mp 1/t$
	$+4-5$			$g=t^{-2\alpha}(vF+uG)$	$J_2=rt^{1-\alpha}e^{\pm\gamma/t}$
1.18	$\langle q^u\rangle_u+\langle q^v\rangle_v$		0	$f=u\dfrac{D^\alpha q^u(t)}{q^u(t)}+F$	$J_1=t$
				$g=u\dfrac{D^\alpha q^v(t)}{q^u(t)}+G$	$J_2=q^v(t)-vq^u(t)$
1.19	$3+6+\langle q^v\rangle_v$		1.1_1	$f=uF$	$J_1=t$
				$g=\frac{1}{2}D^\alpha(q^v)\ln\lvert u\rvert+G$	$J_2=2v-q^v\ln\lvert u\rvert$
1.20	$4+\langle q^v\rangle_v$		1.4	$f=u\dfrac{D^\alpha q^v(t)}{q^v(t)}+F+v\dfrac{G}{q^v}$	$J_1=t$
				$g=\dfrac{D^\alpha q^v(t)}{q^v(t)}v+G$	$J_2=2uq^v(t)-v^2$

$k\neq 0, \gamma\geq 0,$ $4.8_{-2,0}$ – подалгебра 4.8 при $\delta=-2, \beta=0$.

Табл. 3. Оптимальная система $\Theta_2(L_6)$

№	Подалгебра	Nor	N_p	f, g	Инварианты
2.1	$3, 6$	4.2		$f=uF(t)$	$J_1=t$
				$g=vG(t)$	
2.2	$4-5, 6$	4.3		$f=uF(t)-vG(t)$	$J_1=t$
				$g=vF(t)+uG(t)$	
2.3	$4, 6$	5.1		$f=uF(t)+vG(t)$	$J_1=t$
				$g=vF(t)$	
2.4	$3+\beta 6, 4$	5.1		$f=uF(t)+v^{\frac{\beta+1}{\beta-1}}G(t)$	$J_1=t$
				$g=vF(t)$	
	$(\beta=1)$	5.1		$f=uF(t,v)$	$J_1=t$
				$g=vF(t,v)$	$J_2=v$
2.5	$1, 2$	6.1	0	$f=t^{-\alpha}u^{1/(1-\alpha)}F(u/v)$	$J_1=u/v$
				$g=t^{-\alpha}u^{1/(1-\alpha)}G(u/v)$	
2.6	$1, 3+\gamma 6$	3.8	1.1	$f=t^{-\alpha}uF(v^{1+\gamma}u^{1-\gamma})$	$J_1=v^{1+\gamma}u^{1-\gamma}$
				$g=t^{-\alpha}vG(v^{1+\gamma}u^{1-\gamma})$	
2.7	$1, 6$	5.3	1.2	$f=t^{-\alpha}uF(u/v)$	$J_1=u/v$
				$g=t^{-\alpha}uG(u/v)$	
2.8	$1, 4+6$	3.10	1.3	$f=t^{-\alpha}v(F+G\ln v)$	$J_1=ve^{-u/v}$
				$g=t^{-\alpha}vG$	
2.9	$1, 4$	4.6	1.4	$f=t^{-\alpha}(uF(v)+G(v))$	$J_1=v$
				$g=t^{-\alpha}vF(v)$	
2.10	$1, 4-5+\gamma 6$	3.9	1.5	$f=t^{-\alpha}(uF-vG)$	$J=re^{\gamma\phi}$
				$g=t^{-\alpha}(vF+uG)$	
2.11	$2, \beta 1+3+\gamma 6$	4.2	1.1	$f=t^{-2\alpha}(u/v)^{\alpha\beta/2}uF$	$J_1=u^{1-\gamma-\beta+\alpha\beta}\cdot$
				$g=t^{-2\alpha}(u/v)^{\alpha\beta/2}vG$	$\cdot v^{1+\gamma+\beta-\alpha\beta}$

№	Подалгебра	Nor	N_p	f, g	Инварианты
2.12	$2, \beta 1 + 6$	6.1	1.2	$f = t^{-\alpha-\frac{\alpha}{\lambda}} u^{\frac{\beta+1}{\lambda}} F$ $g = t^{-\alpha-\frac{\alpha}{\lambda}} v^{\frac{\beta+1}{\lambda}} G$	$J_1 = u/v$ $\lambda = \beta + 1 - \alpha\beta$
	$\beta = 1/(\alpha - 1)$			$f = 0, \quad g = 0$	
2.13	$2, \beta 1 + 4 + 6$	4.4	1.3	$f = t^{-\alpha-\frac{\alpha}{\lambda}} v^{\frac{\beta+1}{\lambda}} (F + uG/v)$ $g = t^{-\alpha-\frac{\alpha}{\lambda}} v^{\frac{\beta+1}{\lambda}} G$	$J_1 = u/v$ $\lambda = \beta + 1 - \alpha\beta$
	$\beta = 1/(\alpha - 1)$			$f = t^{-2\alpha} e^{\frac{\alpha u}{(\alpha-1)v}} (vF + uG)$ $g = t^{-2\alpha} e^{\frac{\alpha u}{(\alpha-1)v}} vG$	$J_1 = vt^{1-\alpha}$
2.14	$2, 4$	5.1	1.4	$f = t^{-2\alpha}(vF + uG)$ $g = t^{-2\alpha} vG$	$J_1 = vt^{1-\alpha}$
2.15	$2, 1 + 4$	4.4	1.4	$f = t^{-2\alpha} e^{\alpha u/v}(vF + uG)$ $g = t^{-2\alpha} e^{\alpha u/v} vG$	$J_1 = vt^{1-\alpha} e^{(\alpha-1)u/v}$
2.16	$2, \beta 1 + 4 - 5 + \gamma 6$	4.3	1.5	$f = t^{-2\alpha} e^{-\alpha\beta\phi}(uF - vG)$ $g = t^{-2\alpha} e^{-\alpha\beta\phi}(vF + uG)$	$J = re^{\gamma\phi}$
2.17	$\gamma 1 + 3, \beta 1 + 6$	3.8	2.1	$f = t^{-\alpha} uF(t^2 u^{-\gamma-\beta} v^{\gamma-\beta})$ $g = t^{-\alpha} vG(t^2 u^{-\gamma-\beta} v^{\gamma-\beta})$	$J_1 = t^2 u^{-\gamma-\beta} v^{\gamma-\beta}$
2.18	$3, \pm 2 + 6$	$3.12_{0,0}$	2.1	$f = t^{-2\alpha} uF$ $g = t^{-2\alpha} vG$	$J_1 = uvt^{2-2\alpha} e^{\pm 2/t}$
2.19	$2 + 3, \beta 2 + 6$	$3.12_{0,0}$	2.1	$f = t^{-2\alpha} uF$ $g = t^{-2\alpha} vG$	$J_1 = u^{\beta+1} v^{\beta-1} t^{2\beta(1-\alpha)} e^{2/t}$
2.20	$\gamma 1 + 4 - 5, \beta 1 + 6$	3.9	2.2	$f = t^{-\alpha}(uF - vG)$ $g = t^{-\alpha}(vF + uG)$	$J_1 = tr^{-\beta} e^{\gamma\phi}$
2.21	$4 - 5, \pm 2 + 6$	$3.13_{0,0}$	2.2	$f = t^{-2\alpha}(uF - vG)$ $g = t^{-2\alpha}(vF + uG)$	$J_1 = rt^{1-\alpha} e^{1/(\beta t)}$
2.22	$2 + 4 - 5, \beta 2 + 6$	$3.13_{0,0}$	2.2	$f = t^{-2\alpha}(uF - vG)$ $g = t^{-2\alpha}(vF + uG)$	$J_1 = r^{\beta} t^{\beta(1-\alpha)} e^{-\phi+1/t}$
2.23	$4, k1 + 6$	4.6	2.3	$f = t^{-\alpha}(vF + uG)$ $g = t^{-\alpha} vG$	$J_1 = vt^{-1/k}$
2.24	$1 + 4, \beta 1 + 6$	3.10	2.3	$f = t^{-\alpha}(vF + uG)$ $g = t^{-\alpha} vG$	$J_1 = tv^{-\beta} e^{-u/v}$
2.25	$4, \pm 2 + 6$	$4.8_{0,0}$	2.3	$f = t^{-2\alpha}(vF + uG)$ $g = t^{-2\alpha} vG$	$J_1 = vt^{1-\alpha} e^{\pm 1/t}$
2.26	$2 + 4, \pm 2 + 6$	3.15_0	2.3	$f = t^{-2\alpha}(vF + uG)$ $g = t^{-2\alpha} vG$	$J_1 = vt^{1-\alpha} e^{\pm(1/t + u/v)}$
2.27	$2 + 4, 6$	$4.8_{-2,0}$	2.3	$f = t^{-2\alpha}(vF + uG)$ $g = t^{-2\alpha} vG$	$J_1 = u/v + 1/t$
2.28	$k1 + 3 + \beta 6, 4$	4.6	2.4	$f = t^{-\alpha}(t^{2/k} vF + uG)$ $g = t^{-\alpha} vG$	$J_1 = vt^{(1-\beta)/k}$
2.29	$\pm 2 + 3 + \beta 6, 4$	$4.8_{0,0}$	2.4	$f = t^{-2\alpha}(e^{\mp 2/t} vF + uG)$ $g = t^{-2\alpha} vG$	 $J_1 = vt^{1-\alpha} e^{\pm(\beta-1)/t}$
2.30	$(-2)1 + 3 + \beta 6,$ $2 + 4$	3.17	2.4	$f = t^{-\alpha-1} \left(\frac{u}{v} + \frac{1}{t}\right)^{\frac{\beta-3}{2}} \left(\left(\frac{u}{v} + \frac{1}{t}\right) F - G/t\right)$ $g = t^{-\alpha-1} \left(\frac{u}{v} + \frac{1}{t}\right)^{\frac{\beta-3}{2}} G$	 $J_1 = \frac{t^{2\alpha-2}}{v^2} \left(\frac{u}{v} + \frac{1}{t}\right)^{\beta-3+2\alpha}$
	$k \neq 0, \gamma \geq 0$				

Табл. 4. Оптимальная система $\Theta_3(L_6)$

№	Подалгебра	Nor	N_p	f, g
3.1	$3,4,6$	5.1		$f = uF(t), \quad g = vF(t)$
3.2	$3,4,5$	6.1		$f = uF(t), \quad g = vF(t)$
3.3	$1,2,3+\gamma 6$	4.2	1.1	$f = t^{-\alpha}u^{\frac{1}{1-\alpha}}C_1\,(u/v)^{\frac{\alpha(\gamma+1)}{2(\alpha-1)}}$
				$g = t^{-\alpha}v^{\frac{1}{1-\alpha}}C_2\,(u/v)^{\frac{\alpha(\gamma-1)}{2(\alpha-1)}}$
3.4	$1,2,6$	6.1	1.2	$f = 0, \quad g = 0$
3.5	$1,2,4+6$	4.4	1.3	$f = t^{-\alpha}v^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{u}{v}}(C_2u + C_1v)$
				$g = t^{-\alpha}v^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{u}{v}}C_2v$
3.6	$1,2,4$	5.1	1.4	$f = t^{-\alpha}v^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(C_2u + C_1v)$
				$g = t^{-\alpha}v^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}C_2v$
3.7	$1,2,4-5+\gamma 6$	4.3	1.5	$f = t^{-\alpha}(re^{\gamma\phi})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(C_1u - C_2v)$
				$g = t^{-\alpha}(re^{\gamma\phi})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(C_1v + C_2u)$
3.8	$1,3,6$	$=$	2.1	$f = C_1t^{-\alpha}u, \qquad g = C_2t^{-\alpha}v$
3.9	$1,4-5,6$	$=$	2.2	$f = t^{-\alpha}(C_1u - C_2v)$
				$g = t^{-\alpha}(C_2u + C_1v)$
3.10	$1,4,6$	4.6	2.3	$f = t^{-\alpha}(C_2u + C_1v), \quad g = t^{-\alpha}C_2v$
3.11	$1,3+\beta 6,4$	4.6	2.4	$f = t^{-\alpha}(C_2u + C_1v^{\frac{\beta+1}{\beta-1}}), \quad g = t^{-\alpha}C_2v$
	$\beta = 1$			$f = uF(v), \quad g = vF(v)$
3.12	$2,\gamma 1+3,\beta 1+6$	4.2	2.1	$f = t^{-\alpha}\left(t^2u^{-\gamma-\beta}v^{\gamma-\beta}\right)^{-\alpha/(\beta+1-\alpha\beta)/2}C_1u$
				$g = t^{-\alpha}\left(t^2u^{-\gamma-\beta}v^{\gamma-\beta}\right)^{-\alpha/(\beta+1-\alpha\beta)/2}C_2v$
	$\beta = 1/(\alpha-1)$			$f = 0, \quad g = 0$
3.13	$2,\gamma 1+4-5,\beta 1+6$	4.3	2.2	$f = t^{-\alpha}\left(tr^{-\beta}e^{\gamma\phi}\right)^{-\alpha/(\beta+1-\alpha\beta)}(C_1u - C_2v)$
				$g = t^{-\alpha}\left(tr^{-\beta}e^{\gamma\phi}\right)^{-\alpha/(\beta+1-\alpha\beta)}(C_1v + C_2u)$
	$\beta = 1/(\alpha-1)$			$f = 0, \quad g = 0$
3.14	$2,1+4,\beta 1+6$	4.4	2.3	$f = t^{-2\alpha}(vt^{1-\alpha})^{\alpha\beta/\lambda}e^{\alpha/\lambda\cdot u/v}(C_2u + C_1v)$
				$g = t^{-2\alpha}(vt^{1-\alpha})^{\alpha\beta/\lambda}e^{\alpha/\lambda\cdot u/v}C_2v,\ \lambda = \beta + 1 - \alpha\beta$
	$\beta = 1/(\alpha-1)$			$f = 0, \quad g = 0$
3.15	$2,4,\beta 1+6$	5.1	2.3	$f = t^{-\alpha-\alpha/\lambda}v^{\alpha\beta/\lambda}(C_2u + C_1v)$
				$g = t^{-\alpha-\alpha/\lambda}v^{\alpha\beta/\lambda}C_2v, \quad \lambda = \beta + 1 - \alpha\beta$
	$\beta = 1/(\alpha-1)$			$f = 0, \quad g = 0$
3.16	$2,4,\delta 1+3+\beta 6$	5.1	2.4	$f = t^{-2\alpha}(C_1u + C_2v(vt^{1-\alpha})^{2/\lambda})(vt^{1-\alpha})^{\alpha\delta/\lambda}$
				$g = t^{-2\alpha}C_2v(vt^{1-\alpha})^{\alpha\delta/\lambda}$
	$\beta = 1, \delta = 0$			$f = t^{-2\alpha}uF(vt^{1-\alpha}), \quad g = t^{-2\alpha}vF(vt^{1-\alpha})$
	$\beta = -1 + 2/\alpha, \delta = -2/\alpha$			$f = t^{-2\alpha}vF(vt^{1-\alpha}), \quad g = 0$
	$\beta = 1 + \alpha\delta - \delta$			$f = 0, \quad g = 0$
3.17	$(-2)1+3,2+4,6$	$=$	3.1	$f = t^{-\alpha-1}(v+tu)^{-\alpha}(C_1v^{\alpha}(v+tu) - C_2v^{\alpha+1})$
				$g = C_2t^{-\alpha}v^{\alpha+1}(v+tu)^{-\alpha}$
3.18	$\delta 1+3,4,\beta 1+6$	4.6	3.1	$f = t^{-\alpha}\left(C_1t^{\frac{2}{\delta+\beta}}v^{\frac{\delta-\beta}{\delta+\beta}} + C_2u\right), \quad g = t^{-\alpha}C_2v$
	$\delta + \beta = 0$			$f = t^{-\alpha}uF(tv^{-\beta}), \quad g = t^{-\alpha}vF(tv^{-\beta})$
3.19	$3,4,\pm 2+6$	$4.8_{0,0}$	3.1	$f = t^{-2\alpha}C_1u + C_2e^{\pm 2/t}/(vt^2)$
				$g = t^{-2\alpha}C_1v$
3.20	$\pm 2+3,4,\beta 2+6$	$4.8_{0,0}$	3.1	$f = t^{-2\alpha}\left(C_1u + C_2v\left(v^{-\beta}t^{(\alpha-1)\beta}e^{-1/t}\right)^{\frac{2}{\beta\pm 1}}\right)$
				$g = t^{-2\alpha}C_1v$
	$\beta = \pm 1$			$f = t^{-\alpha}uF(vt^{1-\alpha}e^{\mp 1/t})$
				$g = t^{-\alpha}vF(vt^{1-\alpha}e^{\mp 1/t})$

Табл. 5. Оптимальные системы $\Theta_{4,5,6}(L_6)$

№	Подалгебра	Nor	N_p	f	g
4.1	$3,4,5,6$	6.1		$f=uF(t)$	$g=vF(t)$
4.2	$1,2,3,6$	$=$	2.1	$f=0$	$g=0$
4.3	$1,2,4-5,6$	$=$	2.2	$f=0$	$g=0$
4.4	$1,2,4,6$	5.1	2.3	$f=0$	$g=0$
4.5	$1,2,3+\beta 6,4$	5.1	2.4	$f=0$	$g=0$
	$\beta=1$			$f=Ct^{-\alpha}uv^{\alpha/(1-\alpha)}$	$g=Ct^{-\alpha}v^{1/(1-\alpha)}$
	$\beta=2/\alpha-1$			$f=Ct^{-\alpha}v^{1/(1-\alpha)}$	$g=0$
4.6	$1,3,4,6$	4.6	3.1	$f=Ct^{-\alpha}u$	$g=Ct^{-\alpha}v$
4.7	$1,3,4,5$	5.3	3.2	$f=Ct^{-\alpha}u$	$g=Ct^{-\alpha}v$
4.8	$2,\delta 1+3,4,\beta 1+6$	5.1	3.1	$f=0$	$g=0$
	$\delta=-\beta$			$f=Ct^{-\alpha-\alpha/\lambda}v^{\alpha\beta/\lambda}$	$g=Ct^{-\alpha-\alpha/\lambda}uv^{(\beta+1)/\lambda}$
	$\delta=\beta-2(\beta+1)/\alpha$			$f=Ct^{-\alpha-\alpha/\lambda}v^{(\beta+1)/\lambda}$	$g=0, \quad \lambda=\beta+1-\alpha\beta$
4.9	$2,3,4,5$	6.1	3.2	$f=Ct^{-2\alpha}u$	$g=Ct^{-2\alpha}v$
4.10	$k1+6,3,4,5$	5.3	4.1	$f=Ct^{-\alpha}u$	$g=Ct^{-\alpha}v$
4.11	$\pm 2+6,3,4,5$	5.4_0	4.1	$f=Ct^{-2\alpha}u$	$g=Ct^{-2\alpha}v$
5.1	$1,2,3,4,6$	$=$	3.1	$f=0$	$g=0$
5.2	$1,2,3,4,5$	6.1	3.2	$f=0$	$g=0$
5.3	$1,3,4,5,6$	$=$	4.1	$f=Ct^{-\alpha}u$	$g=Ct^{-\alpha}v$
5.4	$\beta 1+6,2,3,4,5$	6.1	4.1	$f=0$	$g=0$
	$(\beta=0)$			$f=Ct^{-2\alpha}u$	$g=Ct^{-2\alpha}v$
6.1	$1,2,3,4,5,6$	$=$	4.1	$f=0$	$g=0$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.
2. Газизов Р.К., Касаткин А.А., Лукащук С.Ю. *Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка* // Вестник УГАТУ. 2007. Т.9, № 3 (21). С. 125-–135.
3. *Group-Invariant Solutions of Fractional Differential Equations.* Nonlinear Science and Complexity, Springer. 2011. P. 51–59.
4. R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, S.Yu. Lukashchuk *Symmetry properties of fractional diffusion equations.* // Physica Scripta. IOP. 2009. T 136, 014016.
5. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1978. 400 с.
6. Овсянников Л.В. *Об оптимальных системах подалгебр* // Докл. РАН. 1993. Т. 333, №6. С. 702–704.
7. Хабиров С. В. *Симметрийный анализ модели несжимаемой жидкости с вязкостью и теплопроводностью, зависящими от температуры.* Препринт института механики УНЦ РАН. Уфа: Гилем, 2004. 37 с.
8. V. Galaktionov, S. Svirshchevskii *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics.* Chapman & Hall/CRC applied mathematics and nonlinear science series. 2009.

Алексей Александрович Касаткин,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: alexei_kasatkin@mail.ru