ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 1 (2012). С. 82-87.

УДК 517.53+517.98

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРОВ УНИЧТОЖЕНИЯ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОММУТАЦИОННЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ ВИГНЕРА

В.Э. КИМ

Аннотация. В работе рассматриваются линейные непрерывные операторы, действующие на пространстве всех целых функций с топологией равномерной сходимости и удовлетворяющие коммутационным соотношениям Вигнера. Эти операторы тесно связаны с обобщенными сверточными операторами Данкла. Изучается задача описания собственных функций этих операторов. Показано, что при определенных условиях, собственные функции исследуемого оператора могут быть описаны с помощью обобщенных сдвигов Данкла целых функций, принадлежащих ядру оператора. Также обсуждаются вопросы полноты систем собственных функций.

Ключевые слова: коммутационные соотношения, оператор Данкла, собственные функции, целые функции.

1. Введение

Как обычно, будем обозначать операторы рождения и уничтожения через a^+ и a соответственно. Через I обозначим единичный оператор. Для операторов A, B будем рассматривать коммутатор $[A,B] = AB - BA$ и антикоммутатор $[A,B]_+ = AB + BA$.

В 1950 году Вигнер [1] показал, что из уравнений движения квантовой механики могут вытекать не только классические коммутационные соотношения Гейзенберга $[a, a^+] = I$, но также и соотношения более общего характера, а именно:

$$[a, a^+] = I + 2\alpha R, \tag{1}$$

где $\alpha \geq 0$ – некоторая константа, R – некоторый абстрактный оператор, удовлетворяющий условиям: $[R, a]_+ = 0$, $[R, a^+]_+ = 0$, $R^2 = 1$, $R^{-1} = R$. Обозначим через $H(\mathbb{C})$ пространство всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Известно (см., например, [2]), что коммутационные соотношения (1) могут быть реализованы на пространстве $H(\mathbb{C})$ следующим образом:

$$a^+ f(z) = z f(z),\ a f(z) = \Lambda_\alpha f(z) = f'(z) + \alpha\Big(\frac{f(z) - f(-z)}{z}\Big),\ f \in H(\mathbb{C}). \tag{2}$$

Отметим, что оператор Λ_α известен как оператор Данкла. Подробные сведения об операторах Данкла можно найти, например, в обзоре [3].

V.E. Kim, Eigenfunctions of annihilation operators associated with Wigner's commutation relations.

© Ким В.Э. 2012 .

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-00572, 11-01-97019).

Поступила 14 июля 2011 г.

Пусть $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ — произвольная целая функция экспоненциального типа, $\varphi \not\equiv \text{const}$. В работе [4] изучались обощенные операторы свертки следующего вида:

$$M_{\alpha,\varphi}[f](z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Lambda_\alpha^n [f](z), \ f \in H(\mathbb{C}). \tag{3}$$

Сверточные операторы Данкла (3) включают в себя обычные операторы свертки на $H(\mathbb{C})$, соответствующие случаю $\alpha = 0$. Отметим, что $[M_{\alpha,\varphi}, \Lambda_\alpha] = 0$. Следовательно, коммутационные соотношения (1) могут быть реализованы на пространстве $H(\mathbb{C})$ следующими операторами:

$$a^+ f(z) = \Lambda_\alpha f(z), \ af(z) = \widetilde{M}_{\alpha,\varphi}, \ f \in H(\mathbb{C}),$$

где

$$\widetilde{M}_{\alpha,\varphi} f(z) = M_{\alpha,\varphi} f(z) - z f(z). \tag{4}$$

Операторы (4) являются линейными непрерывными операторами на $H(\mathbb{C})$.

Для $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначим через S_λ оператор сдвига на $H(\mathbb{C})$: $S_\lambda f(z) \equiv f(z+\lambda)$. Отметим, что операторы вида (4), соответствующие случаю $\alpha = 0$, обладают следующими интересными свойствами: **(A)** если $f \in \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{0,\varphi}$, $f \not\equiv 0$, то функция $S_\lambda f$ является собственной функцией оператора $\widetilde{M}_{0,\varphi}$, отвечающей собственному значению λ, т.е. выполняется $\widetilde{M}_{0,\varphi} S_\lambda f = \lambda S_\lambda f$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$; **(B)**: если $f \in \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{0,\varphi}$, $f \not\equiv 0$, то система сдвигов $\{S_\lambda f, \lambda \in \Lambda\}$ полна в $H(\mathbb{C})$, где $\Lambda \subset \mathbb{C}$ – любое множество, содержащее предельную точку.

В связи с этим, вызывает интерес следующий вопрос: сохраняются ли эти свойства в случае $\alpha > 0$? В работе доказывается, что при некоторых дополнительных ограничениях, аналог свойства **(A)** имеет место при $\alpha > 0$, а именно: собственные функции оператора (4) могут быть описаны как обобщенные сдвиги Данкла целых функций из ядра оператора (4).

2. Системы обобщенных сдвигов

Известно (см., например, [4]), что имеется единственная целая функция $E_\alpha(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n,\alpha} z^n$, удовлетворяющая условиям:

$$\Lambda_\alpha E_\alpha = E_\alpha, \ E_\alpha(0) = 1. \tag{5}$$

Условимся обозначать через $\mathbb{Z}_+$ множество всех целых положительных чисел, а через $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ — множество всех целых неотрицательных чисел. Из (2) видно, что $\Lambda_\alpha[z^n] = \psi(n) z^{n-1}$, где $\psi(n) = n + \alpha(1 - (-1)^n)$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Отметим, что выполняются (см., например, [5]) следующие соотношения:

$$\psi(0) = 0; \ \psi(n) = \frac{c_{n-1,\alpha}}{c_{n,\alpha}}, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{6}$$

Таким образом, оператор (2) действует на целую функцию $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ следующим образом:

$$\Lambda_\alpha[f](z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{c_{n-1,\alpha}}{c_{n,\alpha}} z^{n-1}. \tag{7}$$

Из (7) видно, что оператор (2) является частным случаем оператора обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева [6].

Из (5) и (6) вытекает, что коэффициенты ряда Тейлора функции $E_\alpha(z)$ имеют следующий вид:

$$c_{0,\alpha} = 1, \ c_{n,\alpha} = \frac{1}{\psi(1)\psi(2)\cdots\psi(n)}, \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

С помощью оператора (2) введем на $H(\mathbb{C})$ оператор обобщенного сдвига

$$S_{\alpha,\lambda}[f](z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,\alpha}\Lambda_{\alpha}^{n}[f](z)\lambda^n,\ z,\lambda \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

Оператор (8) действует линейно и непрерывно из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$ (см., например, [4]). Отметим, что $S_{0,\lambda}[f](z) \equiv f(z+\lambda)$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть задано произвольное $\alpha \geq 0$. Пусть целая функция f такова, что для нее выполняется следующее равенство:*

$$\Lambda_{\alpha}^{n}[zf(z)] = \psi(n)\Lambda_{\alpha}^{n-1}[f(z)] + z\Lambda_{\alpha}^{n}[f(z)],\ \forall\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{9}$$

Тогда выполняется:

$$\widetilde{M}_{\alpha,\varphi}S_{\alpha,\lambda}f - S_{\alpha,\lambda}\widetilde{M}_{\alpha,\varphi}f = \lambda S_{\alpha,\lambda}f,\ \forall\lambda \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Доказательство. Отметим, что оператор (3) удовлетворяет (см., например, [4]) следующим коммутационным соотношениям:

$$[M_{\alpha,\varphi}, S_{\alpha,\lambda}] = 0,\ \forall\lambda \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Возьмем произвольное $\lambda \in \mathbb{C}$. Из (6), (8) и (9) получаем:

$$S_{\alpha,\lambda}[zf(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,\alpha}\psi(n)\Lambda_{\alpha}^{n-1}[f](z)\lambda^n + z\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,\alpha}\Lambda_{\alpha}^{n}[f](z)\lambda^n =$$

$$= \lambda\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1,\alpha}\Lambda_{\alpha}^{n-1}[f](z)\lambda^{n-1} + zS_{\alpha,\lambda}[f](z) = (\lambda+z)S_{\alpha,\lambda}[f](z).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\lambda}\widetilde{M}_{\alpha,\varphi}f &= S_{\alpha,\lambda}M_{\alpha,\varphi}f - (z+\lambda)S_{\alpha,\lambda}f,\\ \widetilde{M}_{\alpha,\varphi}S_{\alpha,\lambda}f &= M_{\alpha,\varphi}S_{\alpha,\lambda}f - zS_{\alpha,\lambda}f. \end{aligned} \tag{12}$$

Из (11) и (12) получаем (10). □

Отметим, что при $\alpha = 0$ равенство (9) выполняется для любой целой функции f. Таким образом, из теоремы 1 вытекает, в частности, свойство **(A)** для оператора $\widetilde{M}_{0,\varphi}$. При $\alpha > 0$ равенство (12) не будет, вообще говоря, выполняться для произвольной целой функции. В следующей теореме устанавливается класс целых функций, для которых (9) выполняется при любом $\alpha \geq 0$.

Теорема 2. *Пусть $f \in H(\mathbb{C})$ является четной функцией. Тогда соотношение (9) выполняется для функции f при любом $\alpha \geq 0$.*

Справедливость теоремы 2 вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $f \in H(\mathbb{C})$. Тогда при любом $\alpha \geq 0$ и для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполняется соотношение*

$$\Lambda_{\alpha}^{n}[zf(z)] = \psi(n)\Lambda_{\alpha}^{n-1}[f(z)] + z\Lambda_{\alpha}^{n}[f(z)] - \alpha(1-(-1)^n)\Lambda_{\alpha}^{n-1}[f(z)-f(-z)].$$

Прежде чем привести доказательство леммы 1, докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 2. *При любых $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $\alpha > 0$ выполняется:*

$$\psi(n+k) = \psi(n) + \psi(k) - \alpha(1-(-1)^n)(1-(-1)^{k+n-1}). \tag{13}$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\alpha > 0$. Возможны 4 случая: 1) n — четное число, k — нечетное; тогда $n+k$ — нечетное, $\psi(n) = n$, $\psi(k) = k+2\alpha$, $\psi(n+k) = n+k+2\alpha = \psi(n)+\psi(k)$; 2) n — нечетное, k — четное; тогда $n+k$ — нечетное, $\psi(n) = n+2\alpha$, $\psi(k) = k$, $\psi(n+k) = n+k+2\alpha = \psi(n)+\psi(k)$; 3) n — четное, k — четное; тогда $n+k$ — четное, $\psi(n) = n$, $\psi(k) = k$, $\psi(n+k) = n+k = \psi(n)+\psi(k)$; 4) n — нечетное, k — нечетное; тогда $n+k$ — четное, $\psi(n) = n+2\alpha$, $\psi(k) = k+2\alpha$, $\psi(n+k) = n+k = \psi(n)+\psi(k)-4\alpha$. Таким образом, если хотя бы одно из чисел n и k является четным, то $\psi(n+k) = \psi(n)+\psi(k)$, в противном случае $\psi(n+k) = \psi(n)+\psi(k)-4\alpha$. Исходя из этого, получаем следующую формулу:

$$\psi(n+k) = \psi(n)+\psi(k) - \alpha(1-(-1)^n)(1-(-1)^k). \tag{14}$$

Покажем, что (14) эквивалетно (13). Действительно,

$$\begin{aligned}(1-(-1)^n)(1-(-1)^k) &= (1-(-1)^n)(1-(-1)^k\cdot(-1)^{2n}) =\\ &= (1-(-1)^n)(1-(-1)^{k+n}\cdot(-1)^n) =\\ &= 1-(-1)^{k+n}\cdot(-1)^n-(-1)^n+(-1)^{k+n}\cdot(-1)^{2n} =\\ &= 1-(-1)^n+(-1)^{k+n}(1-(-1)^n) =\\ &= (1-(-1)^n)(1+(-1)^{k+n}) = (1-(-1)^n)(1-(-1)^{k+n-1}).\end{aligned}$$

□

Приведем теперь доказательство леммы 1.

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Тогда $zf(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k-1} z^k$. Из (6) и (7) получаем:

$$\begin{aligned}\Lambda_\alpha^n[zf(z)] &= \sum_{k=n}^{\infty} a_{k-1}\frac{c_{k-n,\alpha}}{c_{k,\alpha}} z^{k-n} =\\ &= \sum_{k=n}^{\infty} a_{k-1} z^{k-n}\psi(k-n+1)\psi(k-n+2)\cdots\psi(k) =\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n-1} z^k\psi(k+1)\psi(k+2)\cdots\psi(k+n).\end{aligned}$$

Из последнего равенства и (13) получаем:

$$\Lambda_\alpha^n[zf(z)] = \Sigma_1 + \psi(n)\Sigma_2 - \alpha(1-(-1)^n)\Sigma_3, \tag{15}$$

где $\Sigma_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k+n-1} z^k \psi(k)\psi(k+1)\cdots\psi(k+n-1)$,

$$\Sigma_2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n-1} z^k \psi(k+1)\psi(k+2)\cdots\psi(k+n-1),$$

$$\Sigma_3 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n-1} z^k (1-(-1)^{k+n-1})\psi(k+1)\psi(k+2)\cdots\psi(k+n-1).$$

Отметим, что суммирование в Σ_1 начинается с $k=1$ в силу того, что $\psi(0)=0$. Имеем:

$$\Sigma_1 = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^{k-n+1}\psi(k-n+1)\psi(k-n+2)\cdots\psi(k) = z\Lambda_\alpha^n[f(z)];$$

$$\Sigma_2 = \sum_{k=n-1}^{\infty} a_k z^{k-n+1}\psi(k-n+2)\psi(k-n+3)\cdots\psi(k) = \Lambda_\alpha^{n-1}[f(z)]; \qquad (16)$$

$$\Sigma_3 = \sum_{k=n-1}^{\infty} a_k(1-(-1)^k)z^{k-n+1}\psi(k-n+2)\cdots\psi(k) = \Lambda_\alpha^{n-1}[f(z)-f(-z)].$$

Из (15) и (16) вытекает утверждение леммы. □

Сформулируем теперь основной результат статьи.

Теорема 3. *Пусть заданы произвольные $\alpha \geq 0, \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Пусть функция $f \in H(\mathbb{C})$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $f \in \ker \widetilde{M}_{\alpha,\varphi}$ для некоторой φ, 2) f — четная функция, 3) $S_{\alpha,\lambda}f \not\equiv 0$. Тогда функция $S_{\alpha,\lambda}f$ является собственной функцией оператора $\widetilde{M}_{\alpha,\varphi}$, отвечающей собственному значению λ.*

Доказательство. Так как f — четная функция, то из теорем 1 и 2 следует, что для f выполняется соотношение (10). Из (10), учитывая, что $f \in \ker \widetilde{M}_{\alpha,\varphi}$, получаем: $\widetilde{M}_{\alpha,\varphi}S_{\alpha,\lambda}f = \lambda S_{\alpha,\lambda}f$. □

Следствие 1. *Пусть заданы произвольные $\alpha \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Пусть функция $f \in H(\mathbb{C})$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 3 и условию $f(\lambda)\neq 0$. Тогда функция $S_{\alpha,\lambda}f$ является собственной функцией оператора $\widetilde{M}_{\alpha,\varphi}$, отвечающей собственному значению λ.*

Доказательство. Докажем, что из условия $f(\lambda)\neq 0$ вытекает условие 3) теоремы 3. Пусть $f(\lambda)\neq 0$. Предположим, что условие 3) теоремы 3 не выполняется. Следовательно, функция f удовлетворяет уравнению $S_{\alpha,\lambda}f \equiv 0$. Тогда согласно [7, гл. III, §3] функцию f можно представить в виде:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{|\mu_k|<q_n} \sum_{j=0}^{m_k-1} p_{kj} z^j E_\alpha^{(j)}(\mu_k z), \qquad (17)$$

где $\{\mu_k\}$ — нули функции $E_\alpha(\lambda z)$, m_k — кратность корня μ_k, $\{q_n\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, p_{kj} — некоторые константы. Из представления (17) следует, что $f(\lambda)=0$, что противоречит исходному предположению. □

Приведем несколько примеров функций, удовлетворяющих условиям теоремы 3.

Пример 1. Пусть $\varphi(z)=z$. В этом случае $\widetilde{M}_{\alpha,\varphi} = \Lambda_\alpha - zI$. Тогда функция $f(z)=e^{z^2/2}$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 3. Кроме того, согласно следствию 1, функция f удовлетворяет условию 3) теоремы 3 при любом $\lambda\in\mathbb{C}$.

Пример 2. Пусть $\varphi(z)=z^3$. В этом случае $\widetilde{M}_{\alpha,\varphi} = \Lambda_\alpha^3 - zI$. Найдем четное целое решение f уравнения $\Lambda_\alpha^3[f](z) - zf(z) = 0$. Так как f — четная функция, то последнее уравнение можно заменить следующим дифференциальным уравнением:

$$f'''(z) + 2\alpha\frac{zf''(z)-f'(z)}{z^2} - zf(z) = 0.$$

Тогда в качестве искомого решения можно взять, например, обобщенную гипергеометрическую функцию $f(z) = {}_0F_2(\{\},\{\frac{1}{2},\frac{3}{4}+\frac{\alpha}{2}\},\frac{z^4}{64})$. Эта функция удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 3. Также, согласно следствию 1, функция f удовлетворяет условию 3) теоремы 3 по крайней мере для тех $\lambda\in\mathbb{C}$, при которых $f(\lambda)\neq 0$.

3. Замечание о полноте собственных функций

Как уже отмечалось во введении, в случае $\alpha = 0$ оператор $\widetilde{M}_{\alpha,\varphi}$ обладает свойством полноты собственных функций (свойство **(B)**). Это свойство было доказано автором в работе [8]. Согласно признаку Годфруа-Шапиро [9, с. 6], из этого свойства вытекает гиперцикличность оператора $\widetilde{M}_{0,\varphi}$. Напомним, что линейный непрерывный оператор Φ на топологическом векторном пространстве X называется гиперциклическим, если существует такой элемент $x \in X$, что его орбита $\{\Phi^n x,\ n = 0, 1, 2, ...\}$ плотна в X. Подробное изложение теории гиперциклических операторов можно найти, например, в монографии [9].

Отметим, что аналог свойства **(B)** имеет место для случая $\varphi(z) = z$ и при $\alpha > 0$. Действительно, для этого случая свойство **(B)** означает полноту в $H(\mathbb{C})$ системы обобщенных сдвигов $\{S_{\lambda,\alpha}e^{z^2/2}, \lambda \in \Lambda\}$, где $\Lambda \subset \mathbb{C}$ — любое множество, содержащее предельную точку. Последнее, как нетрудно видеть, эквивалетно полноте в $H(\mathbb{C})$ системы $\{\Lambda_\alpha^n(e^{z^2/2}),\, n = 0, 1, \cdots\}$. Заметим, что $\Lambda_\alpha^n(e^{z^2/2}) = e^{z^2/2}P_{n,\alpha}(z)$, где $P_{n,\alpha}$ — многочлен степени n. Система многочленов $P_{n,\alpha}$, очевидно, полна в $H(\mathbb{C})$. Следовательно, полна и система $\{\Lambda_\alpha^n(e^{z^2/2}),\, n = 0, 1, \cdots\}$. Таким образом, согласно признаку Годфруа-Шапиро, оператор $\widetilde{M}_{\alpha,\varphi}$ является гиперциклическим оператором на пространстве $H(\mathbb{C})$ для случая $\varphi(z) = z$.

В связи с вышеизложенным, сформулируем следующую открытую проблему: изучить вопрос о полноте собственных функций оператора $\widetilde{M}_{\alpha,\varphi}$ для других функций φ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E.P. Wigner *Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations?* // Phys. Rev. V. 77. 1950. P. 711–712.
2. S.B. Sontz *How the μ-deformed Segal-Bargmann space gets two measures* // Banach Center Publications. V. 89. 2010. P. 265–274.
3. M. Rösler *Dunkl operators: theory and applications* // Lect. Notes Math. V. 1817. 2003. P. 93–135.
4. J.J. Betancor, M. Sifi, K. Trimeche *Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operators on* $\mathbb{C}$ // Acta Math. Hungar. V. 106. 2005. P. 101–116.
5. Ким В.Э. *Гиперцикличность и хаотичность операторов обобщенной свертки, порождаемых операторами Гельфонда-Леонтьева* // Матем. заметки. Т. 85, № 6. 2009. С. 849–856.
6. Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф. *Об одном обобщении ряда Фурье* // Матем. сб. Т. 63, № 3. 1951. С. 477–500.
7. Леонтьев А.Ф. *Обобщения рядов экспонент*, М.: Наука. 1981. 320 с.
8. V.E. Kim *Commutation relations and hypercyclic operators*, arXiv:1102.5011.
9. F. Bayart, E. Matheron *Dynamics of linear operators*, Cambridge University Press. 2009. 337 p.

Виталий Эдуардович Ким,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: kim@matem.anrb.ru