ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 1 (2012). С. 88-106.

УДК 517.5

ПОЧТИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

А.С. КРИВОШЕЕВ

Аннотация. В работе изучается специальная последовательность экспоненциальных многочленов, показатели которых разбиты на относительно малые группы. Доказывается, что в любой выпуклой области комплексной плоскости она является почти экспоненциальной последовательностью. При помощи этого результата найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы указанная последовательность являлась базисом в замкнутом и инвариантном относительно оператора дифференцирования подпространстве пространства функций, аналитических в выпуклой области. Приводятся также два способа описание всего класса базисов в инвариантном подпространстве, элементы которых являются экспоненциальными многочленами.

Ключевые слова: экспоненциальный многочлен, инвариантное подпространство, аналитическая функция, выпуклая область, базис.

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $\{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ — последовательность выпуклых компактов, исчерпывающая область D, т.е. выполнено следующее: 1) $K_p \subset intK_{p+1}$ для всех $p \geq 1$ (int обозначает внутренность множества), 2) $D = \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p$. Пусть $H_M(z)$ обозначает опорную функцию множества M (точнее говоря, комплексно сопряженного с M множества):

$$H_M(z) = \sup_{w \in M} Re(zw), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда из условия 1) следует, что для каждого $p \geq 1$ существует число $\alpha_p > 0$ такое, что

$$H_{K_p}(z) + \alpha_p|z| \leqslant H_{K_{p+1}}(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

В работе [1] было введено следующее понятие. Последовательность функций $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$, аналитических в области D, называется почти экспоненциальной, если найдутся числа $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$, $|\lambda_m| \to \infty$ при $m \to \infty$, для которых выполнены два условия: 1) для каждого $p \geq 1$ существуют постоянная $a > 0$ и номер s такие, что

$$\sup_{w \in K_p} |e_m(w)| \leqslant a \exp(H_{K_s}(\lambda_m)), \quad m = 1, 2, \dots;$$

2) для каждого $p \geq 1$ существуют постоянная $b > 0$ и номер s такие, что

$$b \exp(H_{K_p}(\lambda_m)) \leqslant \sup_{w \in K_s} |e_m(w)|, \quad m = 1, 2, \dots$$

Отметим, что определение почти экспоненциальной последовательности привязано к конкретной выпуклой области D. Поэтому корректнее называть такую последовательность почти экспоненциальной в области D. Числа $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$ называются показателями функций $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$. Примерами почти экспоненциальных последовательностей служат,

A.S. Krivosheyev, An almost exponential sequence of exponential polynomials.

© Кривошеев А.С. 2012.

Поступила 5 июня 2011 г.

естественно, последовательности самих экспонент, а также последовательности экспоненциальных мономов $\{z^n\exp(\lambda_m z)\}_{m=1,n=1}^{\infty,k_m}$ при условии $k_m/|\lambda_m|\to 0$ (см. [1]). В работе [2] рассмотрена более общая последовательность функций $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$, составленная из линейных комбинаций экспоненциальных мономов, показатели которых разбиты на так называемые "относительно малые группы". Подобные последовательности возникают естественным образом при изучении классической задачи представления функций из пространства, инвариантного относительно действия некоторого линейного оператора, посредством собственных и присоединенных функций этого оператора. В работе [2] исследовались замкнутые подпространства W, инвариантные относительно оператора дифференцирования, в пространстве $H(D)$ функций, аналитических в выпуклой области D, с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из D. Если W нетривиальное ($W\neq H(D)$ и $W\neq\{0\}$) подпространство в $H(D)$, то спектр оператора дифференцирования в W является не более чем счетным множеством $\{\lambda_k\}$ (см. [2]). При этом если спектр бесконечен, то единственная его предельная точка ∞. Таким образом, собственными функциями оператора дифференцирования в W являются экспоненты с показателями λ_k. Присоединенными функциями будут соответственно экспоненциальные мономы $z^n\exp(\lambda_k z)$, где $n=1,\ldots,n_k-1$ (натуральное число n_k можно определить как кратность нуля некоторой целой функции экспоненциального типа, связанной с подпространством W [2]). В случае, когда множество $\{\lambda_k\}$ конечно, подпространство W совпадает с пространством решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (см., например, [3, глава 4]). Тогда согласно фундаментальному принципу Л. Эйлера, каждое решение такого уравнения является линейной комбинацией собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W. В связи с этим имеет смысл рассматривать лишь инвариантные подпространства $W\subset H(D)$, с бесконечным спектром $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для таких подпространств мы имеем бесконечную систему $\mathcal{E}=\{z^n\exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$ собственных и присоединенных функций. Если точки спектра достаточно отделены друг от друга (см. [4]), то при некоторых дополнительных условиях на спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и натуральные числа n_k, $k=1,2,\ldots$, (см. [4],[5]) в подпространстве W также имеет место фундаментальный принцип: каждая функция из W представляется рядом по системе $\mathcal{E}$, который сходится абсолютно и равномерно на компактах из области D. При "слипании"точек спектра такое представление невозможно [4]. Однако и в этом случае в подпространстве W может существовать базис, составленный из линейных комбинаций собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования, показатели которых разбиты на относительно малые группы (см., например, [6]).

Пусть последовательность $\{\lambda_k\}$ разбита на группы U_m, $m=1,2,\ldots$. Сделаем перенумерацию членов этой последовательности. Точки λ_k, попавшие в группу U_m, будем обозначать $\lambda_{m,l}$, а их кратности (т.е. числа n_k) — $n_{m,l}$. Здесь первый индекс m совпадает с номером группы, а второй индекс меняется в пределах от 1 до M_m, где M_m — число точек спектра, попавших в группу U_m. Говорят, что группы U_m, $m=1,2,\ldots$, относительно малы, если выполнено следующее:

$$\lim_{m\to\infty}\max_{1\leqslant j,l\leqslant M_m}\frac{|\lambda_{m,j}-\lambda_{m,l}|}{|\lambda_{m,1}|}=0.$$

Заметим, что числа $\lambda_{m,1}$ здесь можно заменить любыми другими представителями $\lambda_{m,j}$ групп U_m. Это сразу следует из соотношения

$$\lim_{m\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant M_m}\frac{|\lambda_{m,j}|}{|\lambda_{m,1}|}\leqslant\lim_{m\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant M_m}\frac{|\lambda_{m,j}-\lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|}+\lim_{m\to\infty}\frac{|\lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|}=1.$$

В новых обозначениях система собственных и присоединенных функций выглядит следующим образом $\mathcal{E}=\{z^n\exp(\lambda_{m,l}z)\}_{m=1,l=1,n=0}^{\infty,M_m,n_{m,l}-1}$. Пусть N_m — число точек спектра, попавших в группу U_m, $m = 1, 2, \ldots$, с учетом их кратности, т.е. $N_m = \sum_{l=1}^{M_m} n_{m,l}$. По системе $\mathcal{E}$ построим систему функций $\tilde{\mathcal{E}} = \{e_{m,p}(z)\}_{m=1,p=1}^{\infty,N_m}$. Положим

$$e_{m,p}(z) = \frac{(p-1)!}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\lambda_{m,1}|=1} \frac{q_m(\lambda, z)d\lambda}{(\lambda-\lambda_{m,1})^p}, \quad p = 1, \ldots, N_m, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Здесь

$$q_m(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \frac{\exp(z\zeta)(\omega_m(\zeta) - \omega_m(\lambda))}{(\zeta-\lambda)\omega_m(\zeta)} d\zeta, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

Γ_m — контур, охватывающий точки $\lambda_{m,l}$, $l = 1, 2, \ldots, M_m$, группы U_m, и $\omega_m(\lambda)$ — многочлен с этими нулями с учетом их кратности и со старшим коэффициентом, равным единице, т.е.

$$\omega_m = \prod_{l=1}^{M_m} (\lambda - \lambda_{m,l})^{n_{m,l}}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Из (2), используя теорему о вычетах, получаем равенства

$$e_{m,p}(z) = \sum_{l=1}^{M_m} \sum_{n=0}^{n_{m,l}-1} c_{m,p,l,n} z^n \exp(\lambda_{m,l} z), \quad m = 1, 2, \ldots, \quad p = 1, 2, \ldots, N_m. \tag{3}$$

В работе [2] при условии, что последовательность $\tilde{\mathcal{E}}$ является почти экспоненциальной, получены необходимые и достаточные условия того, что $\tilde{\mathcal{E}} = \{e_{m,p}(z)\}_{m=1,p=1}^{\infty,N_m}$ — абсолютный и равномерный базис в подпространстве W. При этом же условии найдено описание всех возможных базисов в W вида (3), построенных по относительно малым группам U_m.

В связи с этим естественно возникает задача выяснения условий, при которых система $\tilde{\mathcal{E}} = \{e_{m,p}(z)\}_{m=1,p=1}^{\infty,N_m}$ является почти экспоненциальной последовательностью. Цель данной работы — показать, что при выполнении равенства

$$\mathcal{N} = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{N_m}{|\lambda_{m,1}|} = 0 \tag{4}$$

последовательность $\tilde{\mathcal{E}}$ будет почти экспоненциальной.

В работе [2] доказывается (следствие из леммы 5), что при $\mathcal{N} = 0$ для каждого $j \geq 1$ существуют постоянная C_j и номер $s > j$ такие, что

$$\sup_{w \in K_j} |e_{m,p}(w)| \leqslant C_j \exp H_{K_s}(\lambda_{m,1}), \quad m = 1, 2, \ldots, \quad p = 1, \ldots, N_m.$$

Это означает, что для системы $\tilde{\mathcal{E}} = \{e_{m,p}(z)\}_{m=1,p=1}^{\infty,N_m}$ выполнен пункт 1) из определения почти экспоненциальной последовательности. В дальнейшем мы покажем, что при $\mathcal{N} = 0$ для $\tilde{\mathcal{E}}$ выполнен и пункт 2). При доказательстве этого факта мы будем опираться на теорему 1 из работы [2].

Нам понадобятся некоторые дополнительные определения и обозначения. Для выпуклой области D и каждого $s = 1, 2, \ldots$ определим банахово пространство целых функций экспоненциального типа

$$P_s = \{f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_s = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |f(\lambda)| \exp(-H_{K_s}(\lambda)) < \infty\},$$

и через $\mathcal{P}_D$ обозначим индуктивный предел пространств $\mathcal{P}_s$. Отметим (см., например, [3]), что преобразование Лапласа $L(\mu)(\lambda) = (\mu, \exp \lambda z)$ устанавливает алгебраический и топологический изоморфизм между пространством $\mathcal{P}_D$ и пространством $H^*(D)$ — линейных непрерывных функционалов на $H(D)$.

Для каждого $s = 1, 2, \dots$ введем еще банахово пространство комплексных последовательностей

$$R_s = \{b = \{b_{m,j}\} : \|b\|_s = \sup_{m,j}(|b_{m,j}| \exp(-H_{K_s}(\lambda_{m,1}))) < \infty\}.$$

Здесь $m = 1, 2, \dots$ и $j = 1, \dots, N_m$. Пусть $R(D)$ — индуктивный предел пространств R_s. Для целой функции $f(\zeta)$ положим

$$q_m(\lambda, f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \frac{f(\zeta)(\omega_m(\zeta) - \omega_m(\lambda))}{(\zeta - \lambda)\omega_m(\zeta)} d\zeta, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где контур Γ_m и многочлен $\omega_m(\zeta)$ такие же, как и выше. Эта формула определяет известный интерполяционный многочлен степени не более чем $N_m - 1$, который в точках $\lambda_{m,l}$ вместе со своими производными до порядка $n_{m,l} - 1$ включительно принимает значения, совпадающие с соответствующими значениями функции $f(\zeta)$ и ее производных, т.е.

$$q_m^{(n)}(\lambda_{m,l}, f) = f^{(n)}(\lambda_{m,l}), \quad l = 1, 2, \dots, M_m, \quad n = 0, 1, \dots, n_{m,l} - 1.$$

Разложим $q_m(\lambda, f)$ по мономам $(\lambda - \lambda_{m,1})^j$:

$$q_m(\lambda, f) = \sum_{j=0}^{N_m - 1} q_{m,j}(f) \frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^j}{j!}, \quad m = 1, 2, \dots$$

В работе [2] (лемма 5) показывается, что для любой функции f из пространства $\mathcal{P}_D$ последовательность чисел $q(f) = \{q_{m,j-1}(f)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ принадлежит пространству $R(D)$.

Пусть $B(z, r)$ и $S(z, r)$ обозначают соответственно открытый круг и окружность с центром в точке z и радиуса r. Чтобы использовать теорему 1 из работы [2], как указывалось выше, нам необходимо доказать следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $h(z)$ — положительно однородная порядка один и непрерывная в комплексной плоскости функция. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что выполнено неравенство*

$$\sup_{\lambda \in B(z, \delta|z|)} h(\lambda) \leqslant \inf_{\lambda \in B(z, \delta|z|)} h(\lambda) + \varepsilon \inf_{\lambda \in B(z, \delta|z|)} |\lambda|, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности функции $h(z)$ на окружности $S(0, 1)$ найдется $\delta \in (0, 1/2)$ такое, что для любого $z \in S(0, 1)$ и всех $\lambda, w \in B(z, \delta)$ выполнено неравенство

$$|h(\lambda) - h(w)| \leqslant \varepsilon/2.$$

Отсюда с учетом однородности функции $h(z)$ получаем:

$$\sup_{\lambda \in B(z, \delta|z|)} h(\lambda) = |z| \sup_{\lambda \in B(z/|z|, \delta)} h(\lambda) \leqslant |z| \inf_{\lambda \in B(z/|z|, \delta)} (h(\lambda) + \varepsilon/2) = |z| \inf_{\lambda \in B(z/|z|, \delta)} h(\lambda) +$$

$$+ 2^{-1}\varepsilon|z| \leqslant \inf_{\lambda \in B(z, \delta|z|)} h(\lambda) + 2^{-1}(1 - \delta)^{-1}\varepsilon \inf_{\lambda \in B(z, \delta|z|)} |\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\lambda\in B(z,\delta|z|)} h(\lambda) + \varepsilon \inf_{\lambda\in B(z,\delta|z|)} |\lambda|, \quad z\in\mathbb{C}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть D — выпуклая область, и последовательность $\{\lambda_{m,l}\}$ разбита на относительно малые группы U_m. Предположим, что $N_m/|\lambda_{m,1}| \leqslant 2^{-m}$ и $|\lambda_{m+1,1}| \geq 2|\lambda_{m,1}|$, $m = 1,2,\ldots$ Тогда для каждой последовательности $b = \{b_{m,j}\}$ из пространства $R(D)$ существует функция $f \in \mathcal{P}_D$ такая, что $b_{m,j} = q_{m,j-1}(f)$, $m = 1,2,\ldots$, $j = 1,\ldots,N_m$.*

Доказательство. Пусть последовательность $b = \{b_{m,j}\}$ принадлежит $R(D)$. Тогда по определению пространства $R(D)$ существует номер s такой, что

$$\|b\|_s = \sup_{m,j}(|b_{m,j}| \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1}))) < \infty,$$

т.е. для некоторой постоянной $C > 0$ выполнены неравенства

$$|b_{m,j}| \leqslant C\exp(-H_{K_s}(\lambda_{m,1})), \quad m = 1,2,\ldots, \quad j = 1,\ldots,N_m. \tag{5}$$

Построение целой функции, существование которой утверждается в лемме, мы произведем в два этапа. На первом этапе для каждой группы U_m, $m = 1,2,\ldots$, будет построен многочлен P_m, удовлетворяющий необходимой оценке сверху, и такой, что $q_{m,j-1}(P_m) = b_{m,j}$, $j = 1,\ldots,N_m$. На втором этапе, несколько подправив, указанные многочлены, мы осуществим их "склеивание"до требуемой целой функции.

Перейдем к первому этапу. Положим

$$P_m(\lambda) = \sum_{j=0}^{N_m-1} b_{m,j+1}\frac{(\lambda-\lambda_{m,1})^j}{j!}, \quad m = 1,2,\ldots$$

Для каждого $m = 1,2,\ldots$ имеем:

$$q_m(\lambda, P_m) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m} \frac{P_m(\zeta)(\omega_m(\zeta)-\omega_m(\lambda))}{(\zeta-\lambda)\omega_m(\zeta)}d\zeta.$$

Это равенство определяет многочлен степени не более чем $N_m - 1$, который в точках $\lambda_{m,l}$ вместе со своими производными до порядка $n_{m,l} - 1$ включительно принимает значения, совпадающие с соответствующими значениями многочлена $P_m(\lambda)$ и его производных. Поскольку $P_m(\lambda)$ также имеет степень не выше чем $N_m - 1$, а число точек $\lambda_{m,l}$ в группе U_m с учетом их кратностей $n_{m,l}$ равно N_m, то многочлены $q_m(\lambda, P_m)$ и $P_m(\lambda)$ совпадают. Тогда из определений многочлена $P_m(\lambda)$ и чисел $q_{m,j}(P_m)$ легко получаем равенства

$$b_{m,j} = q_{m,j-1}(P_m), \quad m = 1,2,\ldots, \quad j = 1,\ldots,N_m. \tag{6}$$

Теперь мы найдем оценки сверху для модулей многочленов $P_m(\lambda)$. По условию $a_m = |\lambda_{m,1}|/N_m \geq 2^m$. Учитывая, что $j! \geq j^j/3^j$ при всех $j \geq 1$, и функция $4x^{-1}\ln(3x)$ убывает при $x > 1$, для всех $m = 1,2,\ldots$ и $4j = 0,1,\ldots,N_m - 1$ имеем:

$$\frac{\ln(|\lambda_{m,1}|^j/j!)}{|\lambda_{m,1}|} \leqslant \frac{\ln(3^j|\lambda_{m,1}|^j/j^j)}{|\lambda_{m,1}|} = \frac{j\ln(3|\lambda_{m,1}|/j)}{|\lambda_{m,1}|} \leqslant \frac{N_m\ln(3|\lambda_{m,1}|/N_m)}{|\lambda_{m,1}|} = \frac{\ln(3a_m)}{a_m} = \varepsilon(m),$$

где $\varepsilon(m) \to 0$ при $m \to \infty$. Отсюда получаем

$$\frac{|\lambda_{m,1}|^j}{j!} \leqslant \exp(\varepsilon(m)|\lambda_{m,1}|), \quad m = 1,2,\ldots, \quad j = 0,\ldots,N_m - 1.$$

Таким образом, для всех $m = 1, 2, \dots$ и $\lambda \in B(\lambda_{m,1}, |\lambda_{m,1}|)$ верна оценка

$$|P_m(\lambda)| \leqslant \sum_{j=0}^{N_m-1} |b_{m,j+1}| \frac{|(\lambda-\lambda_{m,1})^j|}{j!} \leqslant \sum_{j=0}^{N_m-1} |b_{m,j+1}| \frac{|\lambda_{m,1}|^j}{j!} \leqslant \exp(\varepsilon(m)|\lambda_{m,1}|) \sum_{j=0}^{N_m-1} |b_{m,j+1}|.$$

Отсюда с учетом (5) получаем:

$$|P_m(\lambda)| \leqslant CN_m \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1}) + \varepsilon(m)|\lambda_{m,1}|), \quad m = 1, 2, \dots, \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, |\lambda_{m,1}|).$$

Так как $N_m/|\lambda_{m,1}| \to 0$, то можно считать, что для некоторого номера m_0 верны неравенства

$$N_m \leqslant \exp(2^{-1}\alpha_s|\lambda_{m,1}|), \quad m \geq m_0,$$

где α_s — постоянная из формулы (1). Кроме того, $\varepsilon(m) \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому можно также считать, что

$$2\varepsilon(m) \leqslant \alpha_s, \quad m \geq m_0.$$

Следовательно, из предыдущего и (1) получаем:

$$|P_m(\lambda)| \leqslant C\exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1}) + \alpha_s|\lambda_{m,1}|) \leqslant C\exp(H_{K_{s+1}}(\lambda_{m,1})),$$

$$m \geq m_0, \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, |\lambda_{m,1}|).$$

Увеличивая при необходимости постоянную $C > 0$, можно считать, что

$$|P_m(\lambda)| \leqslant C\exp(H_{K_{s+1}}(\lambda_{m,1})), \quad m \geq 1, \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, |\lambda_{m,1}|). \tag{7}$$

Перейдем теперь ко второму этапу, в результате которого и будет построена требуемая в лемме целая функция f. Прежде всего, заметим, что ряд, составленный из обратных величин модулей точек $\lambda_{m,l}$ с учетом их кратностей $n_{m,l}$, сходится. Действительно, имеем:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{M_m} \frac{n_{m,l}}{|\lambda_{m,l}|} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{m,1}|} \sum_{l=1}^{M_m} \frac{n_{m,l}|\lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,l}|} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{m,1}|} \sum_{l=1}^{M_m} \frac{n_{m,l}}{b_m} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{m,1}|b_m} \sum_{l=1}^{M_m} n_{m,l} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{|\lambda_{m,1}|b_m},$$

где $b_m = \min_{1\leqslant l\leqslant M_m} |\lambda_{m,l}|/|\lambda_{m,1}|$. Поскольку группы U_m относительно малы, то

$$b_m = \min_{1\leqslant l\leqslant M_m} \frac{|\lambda_{m,l} - \lambda_{m,1} + \lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|} \geq \min_{1\leqslant l\leqslant M_m} \frac{|\lambda_{m,1}| - |\lambda_{m,l} - \lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|} =$$

$$= \min_{1\leqslant l\leqslant M_m} \left(1 - \frac{|\lambda_{m,l} - \lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|}\right) = 1 - \max_{1\leqslant l\leqslant M_m} \frac{|\lambda_{m,l} - \lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|} \geq 1 - \max_{1\leqslant j,l\leqslant M_m} \frac{|\lambda_{m,j} - \lambda_{m,l}|}{|\lambda_{m,1}|} =$$

$$= 1 - \delta(m) \to 1, \quad m \to \infty.$$

Отсюда с учетом условия леммы получаем:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{M_m} \frac{n_{m,l}}{|\lambda_{m,l}|} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{|\lambda_{m,1}|b_m} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m b_m} < \infty.$$

Сходимость этого ряда означает, что каноническая целая функция φ множества $\{\lambda_{m,l}, n_{m,l}\}$ имеет экспоненциальный минимальный тип (см. [7, теорема 3.9]). Эта функция обращается в ноль только в точках $\lambda_{m,l}$ с кратностью $n_{m,l}$ и определяется формулой

$$\varphi(\lambda) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{M_m} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{m,l}}\right)$$

(если какая-то из точек $\lambda_{k,j}$ совпадает с началом координат, то сомножитель $(1 - \lambda/\lambda_{k,j})$ в этом произведении надо заменить на сомножитель $\lambda^{n_{k,j}}$). Тогда по теореме 2.3 из книги [7] плотность нулевого множества функции $\varphi(\lambda)$ равна нулю. Отсюда легко следует, что это множество является правильно распределенным (см. [7, гл. I, § 6, п. 3]). Отметим, что в силу минимальности типа функции $\varphi(\lambda)$ ее индикатриса роста (см. [7, гл. I, § 5, п. 4]) тождественно равна нулю. Поэтому согласно теореме 6.2 из книги [7] выполнено соотношение

$$\lim_{|\lambda| \to \infty, \lambda \notin E} \frac{\ln |\varphi(\lambda)|}{|\lambda|} = 0, \tag{8}$$

где E — множество кругов $B(\xi_p, r_p)$ нулевой линейной плотности, т.е.

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} \sum_{|\xi_p| < r} r_p = 0. \tag{9}$$

Отметим, что множество E покрывает нулевое множество функции $\varphi(\lambda)$, и на его границе выполнено соотношение (8). Для построения требуемой целой функции нам понадобится подобное покрытие, обладающее еще и дополнительным свойством: каждая связная компонента покрытия содержит лишь одну группу U_m нулей φ. К построению такого покрытия множества $\{\lambda_{m,l}\}$ мы сейчас и приступим.

Прежде всего заметим, что круги $B(\lambda_{m,1}, 4^{-1}|\lambda_{m,1}|)$, $m = 1, 2, \ldots$, попарно не пересекаются. Действительно, по условию леммы $|\lambda_{m+1,1}| \geq 2|\lambda_{m,1}|$, $m = 1, 2, \ldots$ Поэтому расстояние между центрами соседних кругов имеет следующую оценку снизу:

$$|\lambda_{m+1,1} - \lambda_{m,1}| \geq |\lambda_{m+1,1}| - |\lambda_{m,1}| \geq \frac{|\lambda_{m+1,1}|}{4} + \frac{6|\lambda_{m,1}|}{4} - |\lambda_{m,1}| > \frac{|\lambda_{m+1,1}|}{4} - \frac{|\lambda_{m,1}|}{4}.$$

Отсюда следует, что эти круги не пересекаются. Поскольку последовательность модулей центров является возрастающей, то и любые два круга не пересекаются.

Выберем теперь возрастающую подпоследовательность натуральных чисел $m(6) < m(7) < \ldots < m(k) < \ldots$ такую, что выполнены следующие два условия: 1) для каждого $k \geq 6$ группа U_m при $m \geq m(k)$ целиком лежит в круге $B(\lambda_{m,1}, k^{-1}|\lambda_{m,1}|)$, 2) для каждого $k \geq 6$ и всех $m = m(k), m(k)+1, \ldots, m(k+1)-1$ существует число τ_m из отрезка $[k^{-1}, (k-1)^{-1}]$ такое, что окружность $S(\lambda_{m,1}, \tau_m|\lambda_{m,1}|)$ не пересекает множество E.

Первое условие будет выполнено, поскольку группы U_m относительно малы, т.е.

$$\max_{1 \leqslant l \leqslant M_m} \frac{|\lambda_{m,1} - \lambda_{m,l}|}{|\lambda_{m,1}|} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Выполнение второго условия обеспечивается соотношением (9). Действительно, относительная длина отрезка $[k^{-1}|\lambda_{m,1}|, (k-1)^{-1}|\lambda_{m,1}|]$, т.е. величина

$$\frac{|(k-1)^{-1}|\lambda_{m,1}| - k^{-1}|\lambda_{m,1}||}{|\lambda_{m,1}|} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

для каждого фиксированного $k \geq 6$ постоянна при $m \to \infty$. В то же время, в силу (9), относительная сумма радиусов всех кругов $B(\xi_p, r_p)$, имеющих непустое пересечение с кругом $B(\lambda_{m,1}, (k-1)^{-1}|\lambda_{m,1}|)$, стремится к нулю при $m \to \infty$.

Можно считать, что первый номер $m(6)$ выбран настолько большим, что выполнено неравенство

$$\frac{|\lambda_{m(6),1}|}{5} + 1 \leqslant \frac{|\lambda_{m(6),1}|}{4}.$$

Тогда круги $B(\lambda_{m,1}, 1 + \tau_m|\lambda_{m,1}|)$, $m \geq m(6)$, попарно не пересекаются.

Положим $\Omega_m = B(\lambda_{m,1}, \tau_m|\lambda_{m,1}|)$, $m \geq m(6)$. По построению множество Ω_m целиком содержит группу U_m, и его вздутие $\Omega_m + B(0,1)$ не пересекается с множествами $\Omega_j + B(0,1)$ для всех $j \neq m$, $j \geq m(6)$. В частности $\Omega_m + B(0,1)$ не содержит точек любой группы U_j, $j \neq m$, $j \geq m(6)$. Увеличивая при необходимости номер $m(6)$, можно считать, что для всех $m \geq m(6)$ множество $\Omega_m + B(0,1)$ не содержит также ни одной точки группы U_j при $j < m(6)$. Тогда для каждого $m < m(6)$ мы можем выбрать открытое множество Ω_m таким образом, что Ω_m целиком содержит группу U_m, и множества $\overline{\Omega}_j$, $j < m(6)$, попарно не пересекаются между собой и имеют пустое пересечение с множествами $\Omega_k + B(0,1)$, $k \geq m(6)$.

Фиксируем произвольное число $\varepsilon \in (0,1)$. Так как граница $\partial\Omega_m$ множества Ω_m для всех $m \geq m(6)$ не содержит точек E, то, в силу (8), найдется постоянная $a > 0$ такая, что

$$|\varphi(\lambda)| \geq a\exp(-\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in \partial\Omega_m, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Функция $\varphi(\lambda)$ имеет экспоненциальный минимальный тип. Тогда по теореме 1.2 из книги [7] этим же свойством обладает и ее производная $\varphi'(\lambda)$. Поэтому существует постоянная $b > 0$, для которой выполнены неравенства

$$|\varphi(\lambda)| \leqslant b\exp(\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

$$|\varphi'(\lambda)| \leqslant b\exp(\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{12}$$

Пусть $w \in \partial\Omega_m$ и $\lambda \in B(w, \exp(-3\varepsilon|\lambda_{m,1}|))$. По формуле для первообразной с учетом (12) получаем:

$$|\varphi(\lambda) - \varphi(w)| = |\int\limits_w^\lambda \varphi'(\xi)d\xi| \leqslant \max_{\xi\in[w,\lambda]} |\varphi'(\xi)||\lambda - w| \leqslant b \max_{\xi\in[w,\lambda]} \exp(\varepsilon|\xi|)|\lambda - w| \leqslant$$

$$\leqslant b\exp(\varepsilon(|w| + 1))\exp(-3\varepsilon|\lambda_{m,1}|) = b\exp(\varepsilon(|w| + 1 - 3|\lambda_{m,1}|)).$$

Отсюда с учетом (10) имеем:

$$|\varphi(\lambda)| \geq |\varphi(w)| - b\exp(\varepsilon(|w| + 1 - 3|\lambda_{m,1}|)) \geq a\exp(-\varepsilon|w|) - b\exp(\varepsilon(|w| + 1 - 3|\lambda_{m,1}|)) =$$

$$= \exp(-\varepsilon|w|)(a - b\exp(\varepsilon(2|w| + 1 - 3|\lambda_{m,1}|)).$$

По построению для всех $m \geq m(6)$ верно включение $\Omega_m \subset B(\lambda_{m,1}, 5^{-1}|\lambda_{m,1}|)$. Следовательно, верно неравенство $|w - \lambda_{m,1}| \leqslant 5^{-1}|\lambda_{m,1}|$. Тогда из предыдущего получаем:

$$|\varphi(\lambda)| \geq \exp(-\varepsilon|w|)(a - b\exp(\varepsilon(12|\lambda_{m,1}|/5 + 1 - 3|\lambda_{m,1}))) =$$

$$= \exp(-\varepsilon|w|)(a - b\exp(\varepsilon(-3|\lambda_{m,1}|/5 + 1))), \quad \lambda \in B(w, \exp(-3\varepsilon|\lambda_{m,1}|)),$$

где $w \in \partial\Omega_m$ и $m \geq m(6)$. Выберем номер $m_0 \geq m(6)$ такой, что для всех $m \geq m_0$ выполнено неравенство: $b\exp(\varepsilon(-3|\lambda_{m,1}|/5 + 1)) \leqslant a/2$. Учитывая, что $|\lambda - w| \leqslant \exp(-3\varepsilon|\lambda_{m,1}|) < 1$ и $\varepsilon \in (0,1)$, получаем:

$$|\varphi(\lambda)| \geq (2e)^{-1}a\exp(-\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in B(w, \exp(-3\varepsilon|\lambda_{m,1}|)), \quad w \in \partial\Omega_m, \quad m \geq m_0.$$

По построению множества $\overline{\Omega_m + B(0, \exp(-3\varepsilon|\lambda_{m,1}|))}$, $m \geq m(6)$, попарно не пересекаются между собой и не пересекаются также с множествами $\overline{\Omega_j}$, $j < m(6)$. Поэтому найдется постоянная $\gamma > 0$ такая, что множества $\overline{\Omega_m + B(0, \exp(-3\varepsilon|\lambda_{m,1}|))}$ уже для всех $m \geq 1$ попарно не пересекаются. Поскольку все нули функции φ лежат в объединении $\bigcup_{m\geq 1} \Omega_m$, то, уменьшая при необходимости число $a > 0$, можно считать, что верны оценки:

$$|\varphi(\lambda)| \geq (2e)^{-1} a \exp(-\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in B(w, \exp(-3\varepsilon|\lambda_{m,1}|)), \quad w \in \partial\Omega_m, \quad m \geq 1. \tag{13}$$

Для каждого $m = 1, 2, \ldots$ через β_m обозначим функцию, обладающую следующими свойствами: 1) $\beta_m \in C^\infty(\mathbb{C})$, 2) $0 \leqslant \beta_m(z) \leqslant 1$, $z \in \mathbb{C}$, 3) $\beta_m(z) = 1$, $z \in \Omega_m$, 4) $\beta_m(z) = 0$, $z \notin \Omega_m + B(0, \gamma \exp(-3\varepsilon|\lambda_{m,1}|))$, 5) $|(d\beta_m(z)/d\overline{z}| \leqslant \exp(3\varepsilon|\lambda_{m,1}|)$, $z \in \mathbb{C}$, где постоянная $\alpha > 0$ не зависит от номера $m \geq 1$ (по поводу построения таких функций см., например, [8], теорема 1.4.1 и формула (1.4.2)).

Рассмотрим функцию

$$\beta(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m(\lambda) P_m(\lambda).$$

Она определена во всей комплексной плоскости, отлична от нуля лишь на множествах $\Omega_m + B(0, \gamma \exp(-3\varepsilon|\lambda_{m,1}|))$, $m \geq 1$, и на каждом из этих множеств совпадает с функцией $\beta_m(\lambda)P_m(\lambda)$. При этом на множестве Ω_m она совпадает с функцией $P_m(\lambda)$. Таким образом, в силу аналитичности $P_m(\lambda)$, $m \geq 1$, функция $d\beta(\lambda)/d\overline{\lambda}$ отлична от нуля лишь на множествах $(\Omega_m + B(0, \gamma \exp(-3\varepsilon|\lambda_{m,1}|))) \setminus \Omega_m$, $m \geq 1$, и на каждом из этих множеств совпадает с функцией $P_m(\lambda) d\beta_m(\lambda)/d\overline{\lambda}$. Согласно неравенству (7) и свойству 5 функций β_m получаем оценку:

$$\left|\frac{d\beta(\lambda)}{d\overline{\lambda}}\right| \leqslant C \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda_{m,1}) + 3\varepsilon|\lambda_{m,1}|), \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, |\lambda_{m,1}|), \quad m \geq 1. \tag{14}$$

По построению диаметр множества Ω_m стремится к нулю, когда $m \to \infty$. Следовательно, найдется номер m_1 такой, что для всех $m \geq m_1$ верно вложение

$$\Omega_m + B(0, \gamma \exp(-3\varepsilon|\lambda_{m,1}|)) \subset B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|), \tag{15}$$

где $\delta > 0$ определяется по числу $\varepsilon > 0$ в лемме 1. Согласно этой лемме имеем:

$$H_{K_{s+1}}(\lambda_{m,1}) + 3\varepsilon|\lambda_{m,1}| \leqslant H_{K_{s+1}}(\lambda) + 4\varepsilon|\lambda|, \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|), \quad m \geq 1.$$

Таким образом, в силу (14) и (15), существует постоянная $C_1 > 0$, для которой выполнены неравенства

$$\left|\frac{d\beta(\lambda)}{d\overline{\lambda}}\right| \leqslant C_1 \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + 4\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in \Omega_m + B(0, \gamma \exp(-3\varepsilon|\lambda_{m,1}|)), \quad m \geq 1.$$

Отсюда с учетом (13) и сказанного выше относительно функции $d\beta(\lambda)/d\overline{\lambda}$ получаем:

$$|v(\lambda)| = \left|\frac{1}{\varphi(\lambda)} \frac{d\beta(\lambda)}{d\overline{\lambda}}\right| \leqslant C_2 \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + 5\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $C_2 = 2ea^{-1}C_1$. Отсюда следует, что

$$\int_{\mathbb{C}} |v(\lambda)|^2 \exp(-2H_{K_{s+1}}(\lambda) - 11\varepsilon|\lambda|) d\sigma(\lambda) = C_3 < \infty,$$

где $d\sigma$ — плоская мера Лебега. Функция $H_{K_{s+1}}(\lambda)$ — выпуклая, а, следовательно, и субгармоническая. Тогда, как известно (см., например, [9, гл. 3, § 6, п.2, теорема 3.6.2]), в пространстве локально интегрируемых с квадратом модуля функций в $\mathbb{C}$ найдется элемент g, который (в обобщенном смысле) удовлетворяет равенству

$$dg/d\overline{\lambda} = v \tag{16}$$

и, кроме того, оценке

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |g(\lambda)|^2 \exp(-2H_{K_{s+1}}(\lambda) - 12\varepsilon|\lambda|)d\sigma(\lambda) = C_4 < \infty. \tag{17}$$

Покажем, что она является элементом пространства P_D. В силу (16), обобщенная производная f по $\overline{\lambda}$ равна нулю всюду в плоскости. Хорошо известно, что это означает аналитичность f во всей комплексной плоскости. Найдем оценку сверху на модуль целой функции $f(\lambda)$. В силу субгармоничности функции $|f(\lambda)|$ имеем:

$$|f(\lambda)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{B(\lambda,1)} |f(w)|d\sigma(w) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{B(\lambda,1)} |\beta(w)|d\sigma(w) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{B(\lambda,1)} |\varphi(w)g(w)|d\sigma(w). \tag{18}$$

Используя (7), лемму 1, а также свойства функций $\beta_m(\lambda)$ и множеств Ω_m, как и выше для функции $d\beta(\lambda)/d\overline{\lambda}$, получаем неравенство

$$|\beta(w)| \leqslant C_5 \exp(H_{K_{s+1}}(w) + \varepsilon|w|), \quad w \in \mathbb{C},$$

где C_5 — некоторая положительная постоянная. Тогда для всех $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{B(\lambda,1)} |\beta(w)|d\sigma(w) \leqslant C_5 \sup_{w\in B(\lambda,1)} \exp(H_{K_{s+1}}(w) + \varepsilon|w|) \leqslant C_6 \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + 2\varepsilon|\lambda|).$$

Здесь в последнем неравенстве мы вновь воспользовались леммой 1. Аналогичным образом, используя (11), получаем:

$$\sup_{w\in B(\lambda,1)} |\varphi(w)| \leqslant C_7 \exp(2\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, с учетом предыдущего неравенства согласно (18) имеем:

$$|f(\lambda)| \leqslant C_6 \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + 2\varepsilon|\lambda|) + C_7 \exp(2\varepsilon|\lambda|)\frac{1}{\pi} \int\limits_{B(\lambda,1)} |g(w)|d\sigma(w). \tag{19}$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся неравенством Коши-Буняковского. В силу (17), получаем:

$$\int\limits_{B(\lambda,1)} |g(w)|d\sigma(w) \leqslant$$

$$\left(\int\limits_{B(\lambda,1)} |g(w)|^2 \exp(-2H_{K_{s+1}}(w) - 128\varepsilon|w|)d\sigma \int\limits_{B(\lambda,1)} \exp(2H_{K_{s+1}}(w) + 12\varepsilon|w|)d\sigma\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(C_4 \int\limits_{B(\lambda,1)} \exp(2H_{K_{s+1}}(w) + 12\varepsilon|w|)d\sigma \right)^{1/2} \leqslant \pi\sqrt{C_4}\exp\left(\sup_{w\in B(\lambda,1)} (H_{K_{s+1}}(w) + 6\varepsilon|w|) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \pi C_8 \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + 6\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где C_8 — некоторая положительная постоянная (при получении последнего неравенства мы использовали лемму 1). Отсюда с учетом (19) получаем:

$$|f(\lambda)| \leqslant C_6 \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + 2\varepsilon|\lambda|) + C_7 C_8 \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + 8\varepsilon|\lambda|) \leqslant$$

$$\leqslant C_9 \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + 8\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Поскольку число $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым, то, в силу (1), будет верна оценка

$$|f(\lambda)| \leqslant C_9 \exp H_{K_{s+2}}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

которая означает, что функция $f(\lambda)$ является элементом пространства P_D.

Остается проверить равенства

$$b_{m,j} = q_{m,j-1}(f), \quad m = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, \ldots, N_m.$$

По определению числа $q_{m,j-1}(f)$ являются коэффициентами многочлена

$$q_m(\lambda, f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \frac{f(\zeta)(\omega_m(\zeta) - \omega_m(\lambda))}{(\zeta - \lambda)\omega_m(\zeta)} d\zeta,$$

разложенного по степеням $\lambda - \lambda_{m,1}$. В последней формуле Γ_m — произвольный контур, охватывающий целиком группу U_m. По построению множество Ω_m содержит группу U_m. Поэтому в качестве контура Γ_m можно взять границу $\partial\Omega_m$ множества Ω_m. На множестве Ω_m, а значит, и на его границе $\partial\Omega_m$, функция $f(\lambda)$ совпадает с функцией $P_m(\lambda) - \varphi(\lambda)g(\lambda)$. Таким образом, $g(\lambda) = (P_m(\lambda) - f(\lambda))/\varphi(\lambda)$ — функция, аналитическая на Ω_m и имеющая возможно некоторые полюсы в точках группы U_m. Однако, наличие хотя бы одного такого полюса противоречит неравенству (17). Следовательно $g(\lambda)$ не имеет особых точек в Ω_m. Тогда мы имеем:

$$q_m(\lambda, f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega_m} \frac{f(\zeta)(\omega_m(\zeta) - \omega_m(\lambda))}{(\zeta - \lambda)\omega_m(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega_m} \frac{P_m(\zeta)(\omega_m(\zeta) - \omega_m(\lambda))}{(\zeta - \lambda)\omega_m(\zeta)} d\zeta -$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega_m} \frac{\varphi(\zeta)g(\zeta)(\omega_m(\zeta) - \omega_m(\lambda))}{(\zeta - \lambda)\omega_m(\zeta)} d\zeta.$$

Многочлен $\omega_m(\zeta)$ обращается в ноль лишь в точках группы U_m. Функция $\varphi(\zeta)$ также обращается в ноль в этих точках. Поэтому $\varphi(\zeta)/\omega_m(\zeta)$ является целой функцией. Также целой функцией является и дробь $\omega_m(\zeta) - \omega_m(\lambda)/(\zeta - \lambda)$. Таким образом, по теореме Коши последний интеграл равен нулю, и мы имеем:

$$q_m(\lambda, f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega_m} \frac{f(\zeta)(\omega_m(\zeta) - \omega_m(\lambda))}{(\zeta - \lambda)\omega_m(\zeta)} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Omega_m} \frac{P_m(\zeta)(\omega_m(\zeta) - \omega_m(\lambda))}{(\zeta - \lambda)\omega_m(\zeta)} d\zeta = q_m(\lambda, P_m).$$

Отсюда с учетом (6) получаем

$$q_{m,j-1}(f) = q_{m,j-1}(P_m) = b_{m,j}, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, \ldots, N_m.$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность $\{\lambda_{m,l}\}$ разбита на относительно малые группы U_m так, что $\mathcal{N} = 0$, и последовательность функций $\tilde{\mathcal{E}} = \{e_{m,p}(z)\}_{m=1,p=1}^{\infty,N_m}$ определена по формуле (2). Тогда $\tilde{\mathcal{E}}$ — почти экспоненциальная последовательность в области D с показателями $\lambda_{m,1}$ (точнее говоря, с показателями $\lambda'_{m,j}$, где $\lambda'_{m,j} = \lambda_{m,1}$, $j = 1, \ldots, N_m$).*

Доказательство. Как уже отмечалось выше, в работе [2] установлено (следствие из леммы 5), что при $\mathcal{N} = 0$ для системы $\tilde{\mathcal{E}}$ выполнен пункт 1) из определения почти экспоненциальной последовательности. Покажем, что при $\mathcal{N} = 0$ для $\tilde{\mathcal{E}}$ выполнен и пункт 2).

Предположим, что пункт 2) не выполняется. Тогда существует номер p такой, что для каждого $s = 1, 2, \ldots$ найдутся номера $m(s) \to \infty$, когда $s \to \infty$, и $l(s)$, при которых верно неравенство

$$s^{-1} \exp(H_{K_p}(\lambda_{m,1})) > \sup_{w \in K_s} |e_{(m(s),l(s)}(w)|. \tag{20}$$

Таким образом, мы получили последовательность функций $\{e_{m(s),l(s)}\}_{s=1}^{\infty}$, обладающую свойством (20). Поскольку $|\lambda_{m,1}|$ неограниченно возрастает при $m \to$, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $|\lambda_{m(s)+1,1}| \geq 2|\lambda_{m(s),1}|$, $s = 1, 2, \ldots$ По условию $\mathcal{N} = 0$, т.е. $N_m/|\lambda_{m,1}| \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому можно также считать, что $N_{m(s)}/|\lambda_{m(s),1}| \leqslant 2^{-s}$, $s = 1, 2, \ldots$ Тогда по лемме 2 для каждой последовательности $b = \{b_{s,j}\}$ из пространства $R(D)$ существует функция $f \in \mathcal{P}_D$ такая, что $b_{s,j} = q_{m(s),j-1}(f)$, $s = 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, N_{m(s)}$.

Пусть W' — замыкание в пространстве $H(D)$ линейной оболочки системы функций $\{z^n \exp(\lambda_{m(s),l} z)\}_{s=1,l=1,n=0}^{\infty,M_{m(s)},n_{m(s),l}-1}$. Тогда, как нетрудно заметить, W' является замкнутым и инвариантным относительно оператора дифференцирования подпространством в $H(D)$, а функции системы $\{z^n \exp(\lambda_{m(s),l} z)\}_{s=1,l=1,n=0}^{\infty,M_{m(s)},n_{m(s),l}-1}$ являются собственными и присоединенными функциями этого оператора в W'. По построению подпространство W не пусто и отлично от $H(D)$. Действительно, пусть z — какая-нибудь точка области D и номер t таков, что компакт K_t содержит z. Рассмотрим функцию $\tilde{\varphi}(\lambda) = \varphi(\lambda)\exp(\lambda z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, где, как и в лемме 2, $\varphi(\lambda)$ — функция, которая обращается в ноль только в точках $\lambda_{m(s),j}$ с кратностью $n_{m(s),j}$, $s = 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, N_{m(s)}$. В силу (11) и выбора компакта K_t, верно неравенство

$$|\tilde{\varphi}(\lambda)| \leqslant b \exp(\varepsilon|\lambda| + Re(z\lambda)) \leqslant b \exp(\varepsilon|\lambda| + H_{K_t}(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым, то с учетом (1) имеем:

$$|\tilde{\varphi}(\lambda)| \leqslant b \exp H_{K_{t+1}}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Эта оценка означает, что функция $\tilde{\varphi}(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathcal{P}_D$. Тогда, как отмечалось выше, найдется функционал $\mu \in H^*(D)$, для которого $\tilde{\varphi}(\lambda)$ является преобразованием Лапласа: $\tilde{\varphi}(\lambda) = (\mu, \exp \lambda w)$. Дифференцируя последнее равенство, получаем:

$$0 = \tilde{\varphi}^{(n)}(\lambda_{m(s),l}) = (\mu, z^n \exp(\lambda_{m(s),l} w), \quad s = 1, 2, \ldots, \quad l = 1, \ldots, M_{m(s)}, \quad n = 0, \ldots, n_{m(s),l} - 1.$$

Следовательно, ненулевой функционал μ обращается в ноль на всех функциях системы $\{z^n \exp(\lambda_{m(s),l} z)\}_{s=1,l=1,n=0}^{\infty,?M_{m(s)},n_{m(s),l}-1}$, а значит, по линейности и непрерывности и на всем подпространстве W'. Поэтому W' не может совпадать с пространством $H(D)$.

Таким образом, все условия теоремы 1 из работы [2] выполнены. Согласно ей существование указанной выше целой функции $f \in \mathcal{P}_D$ для каждой последовательности $b = \{b_{s,l}\}$ из пространства $R(D)$ равносильно тому, что система функций $\{e_{m(s),j}\}_{s=1,j=1}^{\infty,N_{m(s)}}$ является почти экспоненциальным базисом в подпространстве W с показателями $\lambda_{m(s),1}$, $s = 1, 2, \ldots$ (точнее говоря, с показателями $\lambda'_{m(s),j}$, где $\lambda'_{m(s),j} = \lambda_{m(s),1}$, $j = 1, \ldots, N_{m(s)}$). В частности, $\{e_{m(s),j}\}_{s=1,j=1}^{\infty,N_{m(s)}}$ является почти экспоненциальной последовательностью в области D с показателями $\lambda_{m(s),1}$, $s = 1, 2, \ldots$ Согласно свойству 2) такой последовательности для номера p существуют постоянная $c > 0$ и номер $s(p)$ такие, что

$$c \exp(H_{K_p}(\lambda_{m(s),1})) \leqslant \sup_{w \in K_{s(p)}} |e_{m(s),j}(w)|, \quad s = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, \ldots, N_{m(s)}.$$

Поскольку K_s — возрастающая последовательность компактов, то отсюда следует, что

$$c \exp(H_{K_p}(\lambda_{m(s),1})) \leqslant \sup_{w \in K_s} |e_{m(s),l(s)}(w)|, \quad s \geq s(p).$$

Это неравенство для всех $s \geq s(p)$ таких, что $s^{-1} < c$, противоречит (20). Таким образом, наше предположение о том, что пункт 2) из определения почти экспоненциальной последовательности для системы $\tilde{\mathcal{E}}$ не выполнен, является неверным. Теорема доказана.

Замечание. Условие $\mathcal{N} = 0$ в теореме 3 существенно. В подтверждение этого рассмотрим следующий пример. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ — неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел с кратностями n_m, равными целым частям $[\varepsilon \lambda_m]$ чисел $\varepsilon \lambda_m$, $m = 1, 2, \ldots$ Разобьем последовательность $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ на относительно малые группы U_m так, что каждая группа U_m содержит лишь точку λ_m. Тогда $N_m = n_m$, $m = 1, 2, \ldots$, и поэтому

$$\mathcal{N} = \lim_{m \to \infty} \frac{n_m}{\lambda_m} = \lim_{m \to \infty} \frac{[\varepsilon \lambda_m]}{\lambda_m} = \varepsilon > 0.$$

В этом случае система функций $\tilde{\mathcal{E}} = \{e_{m,p}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ легко определяется. Действительно, для всех $m = 1, 2, \ldots$ имеем: $\omega_m(\zeta) = (\zeta - \lambda_m)^{n_m}$. Следовательно, функция

$$q_m(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_m} \frac{\exp(z\zeta)(\omega_m(\zeta) - \omega_m(\lambda))}{(\zeta - \lambda)\omega_m(\zeta)} d\zeta$$

при каждом фиксированном z по переменной λ является многочленом степени не выше $n_m - 1$, j-я производная которого для всех $j = 0, \ldots, n_m - 1$ в точке λ_m совпадает с соответствующей производной функции $\exp(z\lambda)$, вычисленной в точке λ_m. Последняя равна $z^j \exp(\lambda_m z)$. По определению функция $e_{m,j}(z)$ является $(j-1)$-й производной $q_m(\lambda, z)$, вычисленной в точке λ_m. Таким образом,

$$e_{m,j}(z) = z^{j-1} \exp(\lambda_m z), \quad j = 1, \ldots, n_m, \quad m = 1, 2, \ldots$$

В качестве области D возьмем треугольник с вершинами в точках $(0,0)$, $(-1,1)$ и $(1,-1)$. Для всех $s = 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$ и $j = 2, \ldots, n_m$ имеем:

$$\sup_{w \in K_s} |e_{m,j}(w)| \leqslant \sup_{w \in D} |e_{m,j}(w)| = \sup_{w \in D} |z^{j-1} \exp(\lambda_m w)| =$$

$$= \sup_{x \in (1,0)} \exp((j-1)\ln(-\sqrt{2}x) + x\lambda_m).$$

При помощи простых вычислений находим, что последний супремум достигается в точке $x = (1-j)/\lambda_m$, и он равен $\exp((j-1)\ln(\sqrt{2}((j-1)/\lambda_m)) + 1 - j)$. Отсюда при $j = n_m$, достаточно больших m, и всех $s = 1, 2, \ldots$, получаем:

$$\sup_{w \in K_s} |e_{m,n_m}(w)| \leqslant \exp(([\varepsilon\lambda_m] - 1)\ln(\sqrt{2}(([\varepsilon\lambda_m] - 1)/\lambda_m)) + 1 - [\varepsilon\lambda_m]) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(([\varepsilon\lambda_m] - 1)\ln(\sqrt{2}(([\varepsilon\lambda_m] - 1)/\lambda_m)) + 1 - [\varepsilon\lambda_m]) \leqslant \exp(1 - [\varepsilon\lambda_m]) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(2 - \varepsilon\lambda_m) \leqslant 9\exp(-\varepsilon\lambda_m). \tag{21}$$

Выберем номер p так, что выполнено неравенство

$$H_{K_p}(1) \geq H_D(1) - \varepsilon/2 = -\varepsilon/2.$$

Тогда для всех $m = 1, 2, \ldots$ имеем:

$$H_{K_p}(\lambda_m) = \lambda_m H_{K_p}(\lambda_m/\lambda_m) = \lambda_m H_{K_p}(1) \geq -\varepsilon\lambda_m/2.$$

С учетом (21) это означает, что пункт 2) из определения почти экспоненциальной последовательности не выполняется для системы $\tilde{\mathcal{E}}$.

Пусть W — замыкание в пространстве $H(D)$ линейной оболочки системы функций $\{z^n \exp(\lambda_{m,l} z)\}_{s=1,l=1,n=0}^{\infty,M_m,n_{m,l}-1}$. Тогда, как нетрудно заметить, W является замкнутым и инвариантным относительно оператора дифференцирования подпространством в $H(D)$. Всюду в дальнейшем будем считать, что подпространство W нетривиально.

Непосредственно из теоремы 3 и теоремы 1 в работе [2] вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность $\{\lambda_{m,l}\}$ разбита на относительно малые группы U_m так, что $\mathcal{N} = 0$, и последовательность функций $\tilde{\mathcal{E}} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ определена по формуле (2). Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) система функций $\tilde{\mathcal{E}}$ является базисом в подпространстве W;

2) для каждой последовательности $b = \{b_{m,j}\}$ из пространства $R(D)$ существует функция $f \in \mathcal{P}_D$ такая, что $b_{m,p} = q_{m,j-1}(f)$, $m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, N_m$.

Будем говорить (см.[2]), что система функций $\tilde{\mathcal{E}} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ обладает групповым свойством Кете, если для любого номера p существуют номер s и постоянная C, удовлетворяющие следующему условию: для каждого $m = 1, 2, \ldots$ и каждой функции h_m вида

$$h_m(z) = \sum_{j=1}^{N_m} a_{m,j} e_{m,j}(z)$$

выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{N_m} |a_{m,j}| \sup_{z \in K_p} |e_{m,j}(z)| \leqslant C \sup_{z \in K_s} |h_m(z)|.$$

Теорема 5. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность $\{\lambda_{m,l}\}$ разбита на относительно малые группы U_m так, что $\mathcal{N} = 0$, и последовательность функций $\tilde{\mathcal{E}} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ определена по формуле (2). Тогда $\tilde{\mathcal{E}}$ обладает групповым свойством Кете.*

Доказательство. Предположим, что система $\tilde{\mathcal{E}}$ не обладает групповым свойством Кете. Тогда существует номер p такой, что для каждого $s = 1, 2, \ldots$ найдется номер $m(s) \to \infty$, когда $s \to \infty$, и функция h_s вида

$$h_s(z) = \sum_{j=1}^{N_{m(s)}} a_{m(s),j} e_{m(s),j}(z),$$

для которых верно неравенство

$$\sum_{j=1}^{N_{m(s)}} |a_{m(s),j}| \sup_{z \in K_p} |e_{m(s),j}(z)| > s \sup_{z \in K_s} |h_s(z)|. \tag{22}$$

Поскольку $|\lambda_{m,1}|$ неограниченно возрастает при $m \to \infty$, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $|\lambda_{m(s)+1,1}| \geq 2|\lambda_{m(s),1}|$, $s = 1, 2, \ldots$ По условию $\mathcal{N} = 0$, т.е. $N_m/|\lambda_{m,1}| \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому можно также считать, что $N_{m(s)}/|\lambda_{m(s),1}| \leqslant 2^{-s}$, $s = 1, 2, \ldots$ Тогда по лемме 2 для каждой последовательности $b = \{b_{s,j}\}$ из пространства $R(D)$ существует функция $f \in \mathcal{P}_D$ такая, что $b_{s,j} = q_{m(s),j-1}(f)$, $s = 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, N_{m(s)}$.

Пусть W' — замыкание в пространстве $H(D)$ линейной оболочки системы функций $\{z^n \exp(\lambda_{m(s),l} z)\}_{s=1,l=1,n=0}^{\infty,M_{m(s)},n_{m(s),l}-1}$. Как и в теореме 3, все условия теоремы 1 из работы [2] выполнены. Тогда согласно этой теореме система функций $\{e_{m(s),j}\}_{s=1,j=1}^{\infty,N_{m(s)}}$ является почти экспоненциальным базисом в подпространстве W' с показателями $\lambda_{m(s),1}$, $s = 1, 2, \ldots$ Поскольку $N_{m(s)}/|\lambda_{m(s),1}| \leqslant 2^{-s}$, $s = 1, 2, \ldots$, то ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{N_{m(s)}}{|\lambda_{m(s),1}|}$$

сходится. Отсюда легко вытекает, что величина $\mathcal{J}(\Lambda)$, определенная в работе [1], для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, составленной из точек $\lambda_{m(s),1}$, $s = 1, 2, \ldots$, причем каждая точка $\lambda_{m(s),1}$ встречается в ней ровно $N_{m(s)}$ раз, равна нулю. Тогда по следствию из теоремы 3 в работе [1] система функций $\{e_{m(s),j}\}_{s=1,j=1}^{\infty,N_{m(s)}}$ является базисом Кете в W'. В частности, для номера p найдутся номер $s(p)$ и постоянная $B > 0$ такие, что для любой функции $g \in W'$ верно неравенство

$$\sum_{s=1,j=1}^{\infty,N_{m(s)}} |d_{m(s),j}| \sup_{z \in K_p} |e_{m(s),j}(z)| \leqslant B \sup_{z \in K_{s(p)}} |g(z)|,$$

где

$$g(z) = \sum_{s=1,j=1}^{\infty,N_{m(s)}} d_{m(s),j} e_{m(s),j}(z), \quad z \in D.$$

Поскольку K_s — возрастающая последовательность компактов, то отсюда следует, что

$$\sum_{s=1,j=1}^{\infty,N_{m(s)}} |d_{m(s),j}| \sup_{z \in K_p} |e_{m(s),j}(z)| \leqslant B \sup_{z \in K_s} |g(z)|, \quad s \geq s(p).$$

Это неравенство для всех $s \geq s(p)$ таких, что $s > B$, противоречит (22). Таким образом, наше предположение о том, что система $\tilde{\mathcal{E}}$ не обладает групповым свойством Кете, неверно. Теорема доказана.

Наряду с системой $\tilde{\mathcal{E}}$ рассмотрим и другие системы функций $\mathcal{E}' = \{e'_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$.

Положим

$$e'_{m,j}(z) = \sum_{k=1}^{N_m} a_{m,j,k} e_{m,k}(z), \quad m = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, N_m. \tag{23}$$

Будем говорить, что система $\tilde{\mathcal{E}}'$ нормирована, если для всех $m = 1, 2, \dots$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N_m} |a_{m,j,k}| = 1, \quad j = 1, \dots, N_m.$$

Непосредственно из теорем 3 и 5, а также леммы 8 и теоремы 2 в работе [2] вытекают следующие результаты.

Теорема 6. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность $\{\lambda_{m,l}\}$ разбита на относительно малые группы U_m так, что $\mathcal{N} = 0$. Тогда любая нормированная система $\tilde{\mathcal{E}}' = \{e'_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$, определенная по формулам (23) и (2), является почти экспоненциальной последовательностью в области D с показателями $\lambda_{m,1}$.*

Теорема 7. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность $\{\lambda_{m,l}\}$ разбита на относительно малые группы U_m так, что $\mathcal{N} = 0$, и система $\tilde{\mathcal{E}} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ определена по формуле (2). Если в подпространстве W существует базис вида (23), то система $\tilde{\mathcal{E}}$ также является базисом в W.*

Теорема 7 сводит проблему существования базиса по относительно малым группам в подпространстве W сводит к проверке базисности системы $\tilde{\mathcal{E}}$ в этом подпространстве. В заключение дадим описание всех возможных базисов в W.

Для каждого $m = 1, 2, \dots$ через $\mathcal{A}_m = (a_{m,j,k})$ обозначим матрицу, составленную из коэффициентов разложения функций $e'_{m,j}(z)$ по системе $\tilde{\mathcal{E}}_m = \{e_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$. Пусть $\mathcal{A}_m$ — невырожденная и $\mathcal{A}_m^{-1} = (b_{m,j,k})$ — матрица, обратная к $\mathcal{A}_m$. Положим

$$\mathfrak{a}(\mathbb{A}) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \max_{1 \leqslant j,k \leqslant N_m} \frac{\ln |b_{m,j,k}|}{|\lambda_{m,1}|}.$$

Отметим, что в случае, когда D — ограниченная выпуклая область, величина $\mathfrak{a}(\mathbb{A})$ совпадает с величиной $\mathfrak{a}_D(\mathbb{A})$, введенной в работе [2].

Теорема 8. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность $\{\lambda_{m,l}\}$ разбита на относительно малые группы U_m так, что $\mathcal{N} = 0$. Предположим, что система $\tilde{\mathcal{E}} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$, определенная по формуле (2), является базисом в подпространстве W, а система $\tilde{\mathcal{E}}' = \{e'_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$, определенная по формуле (32), является нормированной последовательностью. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1) система $\tilde{\mathcal{E}}'$ является базисом в W.

2) система $\tilde{\mathcal{E}}'$ обладает групповым свойством Кете.

Если D — ограниченная область, то утверждения 1) и 2) эквивалентны.

3) $\mathfrak{a}(\mathbb{A}) = 0$.

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1) и 3) установлена в теореме 3 работы [2]. Докажем эквивалентность 1) и 2).

Предположим, что система $\tilde{\mathcal{E}}'$ является базисом в подпространстве W. Поскольку $\tilde{\mathcal{E}}'$ — нормированная последовательность, то согласно теореме 6 она является почти экспоненциальным базисом в W с показателями $\lambda_{m,1}$ (точнее говоря, с показателями $\lambda'_{m,j}$, где

$\lambda'_{m,j} = \lambda_{m,1}$, $j = 1, \dots, N_m$). В силу нетривиальности подпространства W найдется ненулевой функционал $\mu \in H^*(D)$, который обращается в ноль на всех функциях из W. В частности, это относится к функциям системы $\{z^n \exp(\lambda_{m,l} z)\}_{s=1,l=1,n=0}^{\infty,M_m,n_{m,l}-1}$. Пусть $\psi(\lambda)$ — преобразование Лапласа функционала μ. Тогда верны равенства

$$0 = \psi^{(n)}(\lambda_{m,l}) = (\mu, z^n \exp(\lambda_{m,l} w), \quad m = 1, 2, \dots, \quad l = 1, \dots, M_m, \quad n = 0, \dots, n_{m,l} - 1,$$

т.е. функция $\psi(\lambda)$ обращается в ноль в точках $\lambda_{m,l}$ с кратностью не меньше чем $n_{m,l}$, $m = 1, 2, \dots$, $l = 1, \dots, M_m$. Так как $\psi(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, то по теореме 2.3 из книги [7, гл. I] плотность ее нулевого множества конечна. В силу того, что группы U_m относительно малы конечную плотность будет иметь и последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, составленной из точек $\lambda_{m,1}$, $m = 1, 2, \dots$, причем каждая точка $\lambda_{m,1}$ встречается в ней ровно N_m раз. Отсюда легко вытекает, что величина $\mathfrak{J}(\lambda)$, определенная в работе [1], равна нулю. Тогда по следствию из теоремы 3 в работе [1] система функций $\tilde{\mathcal{E}}'$ является базисом Кете в W, т.е. для каждого номера p найдутся номер s и постоянная $B > 0$ такие, что для любой функции $g \in W$ верно неравенство

$$\sum_{s=1,j=1}^{\infty,N_m} |d_{m,j}| \sup_{z \in K_p} |e'_{m,j}(z)| \leqslant B \sup_{z \in K_s} |g(z)|,$$

где

$$g(z) = \sum_{s=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e'_{m,j}(z), \qquad z \in D.$$

В частности для любого номера $m = 1, 2, \dots$ и любой функции h_m вида

$$h_m(z) = \sum_{j=1}^{N_m} a_{m,j} e'_{m,j}(z)$$

выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{N_m} |a_{m,j}| \sup_{z \in K_p} |e'_{m,j}(z)| \leqslant B \sup_{z \in K_s} |h_m(z)|. \tag{24}$$

Это означает, что система $\tilde{\mathcal{E}}'$ обладает групповым свойством Кете.

Обратно, пусть система $\tilde{\mathcal{E}}'$ обладает групповым свойством Кете. Тогда для каждого $m = 1, 2, \dots$ матрица $\mathcal{A}_m = (a_{m,j,k})$ является невырожденной. Действительно, в противном случае для некоторого номера $m = 1, 2, \dots$ найдется набор коэффициентов $a_{m,1}, \dots, a_{m,N_m}$, не равных одновременно нулю и таких, что

$$h_m(z) = \sum_{j=1}^{N_m} a_{m,j} e'_{m,j}(z) \equiv 0.$$

Тогда для каждого $p, s = 1, 2, \dots$ имеем:

$$\sum_{j=1}^{N_m} |a_{m,j}| \sup_{z \in K_p} |e'_{m,j}(z)| > 0 = \sup_{z \in K_s} |h_m(z)|.$$

Это противоречит неравенству (24).

По условию система $\tilde{\mathcal{E}} = \{e_{m,j}(z)\}_{m=1,j=1}^{\infty,N_m}$ является базисом в подпространстве W, а по теореме 3 система $\tilde{\mathcal{E}}$ будет и почти экспоненциальным базисом в W с показателями $\lambda_{m,1}$.

Тогда, как и в случае с системой $\tilde{\mathcal{E}}'$, для каждого номера p найдутся номер s и постоянная $C > 0$ такие, что для любой функции $g \in W$ верно неравенство

$$\sum_{s=1,j=1}^{\infty,N_m} |d_{m,j}| \sup_{z\in K_p} |e_{m,j}(z)| \leqslant C \sup_{z\in K_s} |g(z)|, \tag{25}$$

где

$$g(z) = \sum_{s=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e_{m,j}(z), \quad z \in D.$$

Пусть $\mathcal{A}_m^{-1} = (b_{m,j,k})$ — матрица, обратная к $\mathcal{A}_m$, $m = 1, 2, \ldots$ Для любой функции $g \in W$ имеем:

$$g(z) = \sum_{s=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} e_{m,j}(z) = \sum_{m=1,j=1}^{\infty,N_m} d_{m,j} \sum_{k=1}^{N_m} b_{m,j,k} e'_{m,k}(z) =$$

$$= \sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} e'_{m,k}(z) \sum_{j=1}^{N_m} d_{m,j} b_{m,j,k} = \sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} d'_{m,k} e'_{m,k}(z), \quad z \in D. \tag{26}$$

Таким образом, мы имеем разложение функции $g(z)$ по системе $\tilde{\mathcal{E}}'$. Поскольку $g(z)$ — произвольная функция из подпространства W, то для установления базисности системы $\tilde{\mathcal{E}}'$ в W достаточно доказать, что последний ряд сходится равномерно на компактах в области D, и разложение функции $g(z)$ по системе $\tilde{\mathcal{E}}'$ является единственным.

Фиксируем $p \geq 1$. Имеем:

$$\sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} |d_{m,k}| \sup_{z\in K_p} |e'_{m,k}(z)| = \sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} \sup_{z\in K_p} |e'_{m,k}(z)| \left| \sum_{j=1}^{N_m} d_{m,j} b_{m,j,k} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} \sup_{z\in K_p} |e'_{m,k}(z)| \sum_{j=1}^{N_m} |d_{m,j} b_{m,j,k}| = \sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} |d_{m,j}| \sum_{j=1}^{N_m} |b_{m,j,k}| \sup_{z\in K_p} |e'_{m,k}(z)|.$$

По условию система $\tilde{\mathcal{E}}'$ обладает групповым свойством Кете. Следовательно, в силу (24), существуют номер s и постоянная B такие, что

$$\sum_{k=1}^{N_m} |b_{m,j,k}| \sup_{z\in K_p} |e'_{m,k}(z)| \leqslant B \sup_{z\in K_s} |e_{m,j}(z)|, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, \ldots, N_m.$$

Отсюда и из предыдущего с учетом (25) получаем

$$\sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} |d'_{m,k}| \sup_{z\in K_p} |e'_{m,k}(z)| \leqslant B \sum_{m=1,k=1}^{\infty,N_m} |d_{m,j}| \sup_{z\in K_s} |e_{m,j}(z)| \leqslant C \sup_{z\in K_r} |g(z)|.$$

Это означает, что рассматриваемый ряд сходится равномерно на компактах K_p, $p = 1, 2, \ldots$ Поскольку эти компакты исчерпывают область D, то мы получаем требуемое утверждение. Кроме того, из последней оценки вытекает, что функция $g(z)$, тождественно равная нулю, имеет лишь тривиальное разложение. Поэтому коэффициенты $d'_{m,k}$ в (26) определяются однозначно. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривошеев А.С. *Почти экспоненциальный базис* // Уфимский математический журнал. Т. 2, № 1. 2010. С. 87–96.
2. Кривошеев А.С.*Базисы "по относительно малым группам".* // Уфимский математический журнал. Т. 2, № 2. 2010. С. 67–89.
3. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах* // М.: Наука, 1982.
4. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Известия РАН. Серия матем. 2004. Т. 68, № 2. С. 71–136.
5. Кривошеева О.А., Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств* // Уфимский математический журнал. Т. 2, №4. 2010. С. 58–73.
6. Кривошеев А.С. *Базис Шаудера в пространстве решений однородного уравнения свертки* // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 1. С. 57–72.
7. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. 1983.
8. Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. Теория распределений и анализ Фурье.* М.: Мир, 1986.
9. Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих переменных.* М.: Наука, 1971.

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru