

О НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВАХ КОМПЛЕКСНЫХ ПРЯМЫХ, ДОСТАТОЧНЫХ ДЛЯ ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

В.И. КУЗОВАТОВ

Аннотация. Данная работа содержит результат, связанный с голоморфным продолжением функций. Речь пойдет о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых. Рассматриваются вещественно-аналитические функции, заданные на границе ограниченной области D в \mathbb{C}^n , $n > 1$, и обладающие одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых. Исследуется вопрос о существовании голоморфного продолжения таких функций в область D в зависимости от вида области и расположения семейств комплексных прямых.

Ключевые слова: вещественно-аналитическая функция, голоморфное продолжение, функции с одномерным свойством голоморфного продолжения

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Статья содержит некоторые результаты, связанные с голоморфным продолжением функций f , заданных на границе ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, в эту область. Речь пойдет о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых.

На комплексной плоскости \mathbb{C} результаты о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения тривиальны. Поэтому наши результаты существенно многомерны.

Первый результат, относящийся к нашей теме, получен М.Л. Аграновским и Р.Е. Вальским в [1], изучившими функции с одномерным свойством голоморфного продолжения в шаре. Доказательство основывалось на свойствах группы автоморфизмов шара.

Стаутом в [2], использовавшим комплексное преобразование Радона, теорема Аграновского и Вальского была перенесена на произвольные ограниченные области с гладкой границей. Альтернативное доказательство теоремы Стаута получено А.М. Кытмановым (см. [3]), применившим интеграл Бохнера – Мартинелли. Идея использования интегральных представлений (Бохнера – Мартинелли, Коши – Фанташье) оказалась полезной при изучении функций с одномерным свойством голоморфного продолжения.

Пусть D – ограниченная область в \mathbb{C}^n , $n > 1$, со связной гладкой границей ∂D класса C^2 . Сформулируем результат Е.Л. Стаута [2].

Рассмотрим комплексные прямые вида

$$l = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \zeta_j = z_j + b_j t, j = 1, \dots, n, t \in \mathbb{C}\}, \quad (1)$$

V.I. KUZOVATOV, ON SOME FAMILIES OF COMPLEX LINES WHICH ARE SUFFICIENT FOR A HOLOMORPHIC EXTENSION OF FUNCTIONS.

© Кузоватов В.И. 2012.

Автор поддержан грантом АБЦП 2.1.1./4620.

Поступила 10 декабря 2011 г.

проходящие через точку $z \in \mathbb{C}^n$ в направлении вектора $b \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ (направление b определяется с точностью до умножения на комплексное число $\lambda \neq 0$).

По теореме Сарда, для почти всех $z \in \mathbb{C}^n$ и почти всех $b \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ пересечение $l \cap \partial D$ представляет собой набор конечного числа кусочно-гладких кривых (за исключением вырожденного случая, когда $\partial D \cap l = \emptyset$).

Будем говорить, что функция $f \in C(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексной прямой l ($l \cap \partial D \neq \emptyset$), если существует функция f_l со следующими свойствами:

- 1) $f_l \in C(\overline{D} \cap l)$;
- 2) $f_l = f$ на множестве $\partial D \cap l$;
- 3) функция f_l голоморфна во внутренних (относительно топологии l) точках множества $\overline{D} \cap l$.

Теорема 1 ([2]). *Если функция $f \in C(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых вида (1), то f голоморфно продолжается в D .*

Более узкое семейство комплексных прямых, достаточное для голоморфного продолжения, было рассмотрено М.Л. Аграновским и А.М. Семеновым [4].

Рассмотрим открытое множество $V \subset D$ и семейство \mathfrak{L}_V комплексных прямых, пересекающих это множество.

Теорема 2 ([4]). *Если функция $f \in C(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль прямых из семейства \mathfrak{L}_V для некоторого открытого множества $V \subset D$, тогда функция f голоморфно продолжается в D .*

В дальнейшем рядом авторов (см., например, работы [5] – [8]) были рассмотрены различные семейства комплексных прямых (например, семейства комплексных прямых, пересекающие росток порождающего многообразия, проходящие через росток комплексной гиперповерхности и др.), достаточные для голоморфного продолжения функций из различных классов. Приведем здесь результат из работы [7], в которой утверждается, что семейство комплексных прямых, проходящих через граничную точку комплексного шара, является достаточным для голоморфного продолжения вещественно-аналитических функций, заданных на границе шара.

Пусть \mathbb{B}^n – шар в \mathbb{C}^n , $\partial\mathbb{B}^n$ – сфера, $z_0 \in \partial\mathbb{B}^n$ и C^w обозначает класс вещественно-аналитических функций.

Теорема 3 ([7]). *Пусть функция $f \in C^w(\partial\mathbb{B}^n)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых, проходящих через точку z_0 . Тогда функция f голоморфно продолжается в \mathbb{B}^n .*

2. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим двумерное комплексное пространство \mathbb{C}^2 , точки которого будем обозначать через $w = (w_1, w_2)$, $z = (z_1, z_2)$ и т. д. Пусть D – ограниченная строго выпуклая область в \mathbb{C}^2 с вещественно-аналитической границей ∂D , т.е. $D = \{w \mid \rho(w) < 0\}$, где функция $\rho(w_1, w_2)$ является вещественно-аналитической в некоторой окрестности замыкания области \overline{D} . При этом $\text{grad } \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_1}, \frac{\partial \rho}{\partial w_2} \right) \neq 0$ на ∂D . Пусть для всех точек границы выполнено условие

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial w_2}(w) \right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1^2}(w) - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_1}(w) \frac{\partial \rho}{\partial w_2}(w) \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1 \partial w_2}(w) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_1}(w) \right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_2^2}(w) = 0. \quad (2)$$

Обозначим также через \mathfrak{L}_{w_0} – семейство комплексных прямых, проходящих через точку w_0 , $w_0 \in \partial D$.

Теорема 4. Пусть функция $f \in C^w(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из \mathfrak{L}_{w_0} , пересекающих D , тогда функция f голоморфно продолжается в D .

Замечание 1. Если точка w_0 фиксируется заранее, то выполнение условия (2) нужно требовать только в точке w_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем сдвиг, чтобы точка $w_0 \in \partial D$ перешла в 0 и выполним ортогональное преобразование

$$w = Bz,$$

задаваемое матрицей

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial w_2}(0) & i \frac{\partial \rho}{\partial \bar{w}_1}(0) \\ -\frac{\partial \rho}{\partial w_1}(0) & i \frac{\partial \rho}{\partial \bar{w}_2}(0) \end{pmatrix}.$$

Данное преобразование является невырожденным, поскольку $|B| \neq 0$. При таком преобразовании сохраняется вещественно-аналитичность функции $\rho(Bz) = \tilde{\rho}(z)$. В покомпонентном виде это преобразование будет иметь следующий вид.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial w_2}(0) z_1 + i \frac{\partial \rho}{\partial \bar{w}_1}(0) z_2 = w_1 \\ -\frac{\partial \rho}{\partial w_1}(0) z_1 + i \frac{\partial \rho}{\partial \bar{w}_2}(0) z_2 = w_2. \end{cases}$$

Представим $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$.

Лемма 1. При комплексно-линейном преобразовании координат $w = Bz$ условие (2) на функцию $\rho(w_1, w_2)$, рассмотренное в граничной точке $w_0 = 0$, запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(0), \quad (3)$$

где неявная функция $x_4 = \varphi(x_1, x_2, x_3)$, определенная уравнением $\rho(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(0) = 0$, $k = \overline{1, 3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем связь между частными производными функций $\tilde{\rho}(z)$ и $\rho(w)$, а также условия на функцию $\tilde{\rho}(z)$. Будем иметь

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z_1} = \frac{\partial \rho}{\partial w_1} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{w}_1} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \rho}{\partial w_2} \frac{\partial w_2}{\partial z_1} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{w}_2} \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial z_1} = \frac{\partial \rho}{\partial w_2}(0) \frac{\partial \rho}{\partial w_1} - \frac{\partial \rho}{\partial w_1}(0) \frac{\partial \rho}{\partial w_2}.$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z_2} = \frac{\partial \rho}{\partial w_1} \frac{\partial w_1}{\partial z_2} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{w}_1} \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z_2} + \frac{\partial \rho}{\partial w_2} \frac{\partial w_2}{\partial z_2} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{w}_2} \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial z_2} = i \frac{\partial \rho}{\partial \bar{w}_1}(0) \frac{\partial \rho}{\partial w_1} + i \frac{\partial \rho}{\partial \bar{w}_2}(0) \frac{\partial \rho}{\partial w_2}.$$

Из приведенных выше выкладок видно, что

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z_1}(0) = 0,$$

а значение

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z_2}(0) = i \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{w}_1}(0) \frac{\partial \rho}{\partial w_1}(0) + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{w}_2}(0) \frac{\partial \rho}{\partial w_2}(0) \right) = i \left(\left| \frac{\partial \rho}{\partial w_1}(0) \right|^2 + \left| \frac{\partial \rho}{\partial w_2}(0) \right|^2 \right) \neq 0$$

является чисто мнимым.

Рассмотрим частную производную функции $\tilde{\rho}(z)$ второго порядка.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial z_1^2} &= \frac{\partial \rho}{\partial w_2}(0) \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1 \partial w_1} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1 \partial w_2} \frac{\partial w_2}{\partial z_1} \right) - \\ &- \frac{\partial \rho}{\partial w_1}(0) \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_2 \partial w_1} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_2 \partial w_2} \frac{\partial w_2}{\partial z_1} \right) = \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial w_2}(0) \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_2}(0) \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1^2} - \frac{\partial \rho}{\partial w_1}(0) \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1 \partial w_2} \right) - \\ &- \frac{\partial \rho}{\partial w_1}(0) \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_2}(0) \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_2 \partial w_1} - \frac{\partial \rho}{\partial w_1}(0) \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_2^2} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_2}(0) \right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1^2} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_1}(0) \frac{\partial \rho}{\partial w_2}(0) \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1 \partial w_2} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_1}(0) \right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_2^2}. \end{aligned}$$

Учитывая выполненный сдвиг координат, при котором граничная точка w_0 перешла в ноль, и условие (2) на границу области D , последнее равенство означает, что

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial z_1^2}(0) = 0.$$

В дальнейшем для удобства записи вместо функции $\tilde{\rho}(z)$, задающей границу области D , будем писать $\rho(z)$. Другими словами,

$$\rho(z_1, z_2) = 0 \quad (4)$$

с условием

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial z_1}(0) = 0 \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_1^2}(0) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

а также при условии, что значение $\frac{\partial \rho}{\partial z_2}(0) \neq 0$ является чисто мнимым.

Частные производные по комплексным переменным можно выразить через производные по вещественным переменным следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial z_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} - i \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial z_2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_3} - i \frac{\partial \rho}{\partial x_4} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, из соотношений на связь производных по комплексным и вещественным переменным, а также из системы условий (5) следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(0) = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_2}(0) = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_3}(0) = 0. \quad (6)$$

Далее запишем второе условие в системе (5) в вещественных переменных. Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \rho &= \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) \rho, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \rho &= i \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) \rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial z_1} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_1} \right) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} + \\
 &+ \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}_1^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1}. \\
 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_2} \right) = i \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) i \left(\frac{\partial \rho}{\partial z_1} - \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_1} \right) = \\
 &= - \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}_1^2} \right) = 2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}_1^2}. \\
 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_2} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) i \left(\frac{\partial \rho}{\partial z_1} - \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_1} \right) = \\
 &= i \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}_1^2} \right) = i \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}_1^2} \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая второе условие в системе (5) и принимая во внимание вещественно-аналитичность функции ρ , из вышеприведенных выкладок следует, что условия на функцию $\rho(x_1, x_2, x_3, x_4)$ будут иметь вид

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2}(0) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_2^2}(0), \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1 \partial x_2}(0) = 0. \quad (7)$$

Ввиду перехода к вещественным координатам функция, задающая границу области D , принимает вид

$$\rho(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Поскольку градиент функции $\rho(x_1, \dots, x_4)$ отличен от нуля, то ввиду соотношений (6) $\frac{\partial \rho}{\partial x_4}(0) \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции (глава 2, п. 26.1 из [9]) в некоторой окрестности граничной точки 0 функция, задающая границу области, принимает вид

$$x_4 = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad (8)$$

где

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = - \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \left(x_1, x_2, x_3, \varphi(x_1, x_2, x_3) \right) / \frac{\partial \rho}{\partial x_4} \left(x_1, x_2, x_3, \varphi(x_1, x_2, x_3) \right), \quad k = \overline{1, 3}.$$

При этом функция φ удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(0) = 0$, $k = \overline{1, 3}$. Далее, используя соотношения (6) и (7), найдем условия на функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. Для этого рассмотрим производную $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j}$, $j = \overline{1, 3}$. Будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \left(x_1, x_2, x_3, \varphi(x_1, x_2, x_3) \right) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_4} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_4} \frac{\partial \rho}{\partial x_4}}{\frac{\partial \rho}{\partial x_4}} \frac{\partial \rho}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \rho}{\partial x_4} \left(x_1, x_2, x_3, \varphi(x_1, x_2, x_3) \right) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_4 \partial x_j} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_4 \partial x_4} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_4 \partial x_j} - \frac{\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_4 \partial x_4} \frac{\partial \rho}{\partial x_4}}{\frac{\partial \rho}{\partial x_4}} \frac{\partial \rho}{\partial x_j}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} = - \frac{\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial \rho}{\partial x_4} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_4} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x_4} - \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_4 \partial x_j} \frac{\partial \rho}{\partial x_4} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_4^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x_k}}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_4} \right)^3},$$

при этом

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2} = - \frac{\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_4} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_4} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x_4} - \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_4 \partial x_k} \frac{\partial \rho}{\partial x_4} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_4^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x_k}}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_4} \right)^3}.$$

Учитывая условия (6) и (7), нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} (0) = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} (0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} (0). \quad \square$$

Продолжим доказательство теоремы. В дальнейшем мы будем рассматривать сечения $D_a(\tau)$ области D

$$D_a(\tau) = \left(\frac{\tau}{1 + |a|^2} a, \frac{\tau}{1 + |a|^2} \right) \quad \forall \tau \in \overline{\Delta}_a,$$

проходящие в направлении вектора $(a, 1) \in \mathbb{C}^2$. Область Δ_a изменения параметра τ есть область на комплексной плоскости с вещественно-аналитической границей (в окрестности граничной точки 0).

Раскладывая в выражении (8) функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ в окрестности граничной точки 0 в ряд Тейлора, ввиду условий на функцию φ будем иметь

$$x_4 = T(x_1, x_2, x_3) + o(|x'|^2), \quad |x'| \rightarrow 0, \quad x' = (x_1, x_2, x_3), \quad (9)$$

где $T(x_1, x_2, x_3) = c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{23}x_2x_3$ — положительно определенная (ввиду строго выпуклости функции ρ) квадратичная форма. При этом для коэффициентов формы $T(x_1, x_2, x_3)$ ввиду условий (3) на функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ справедливы соотношения

$$c_{12} = 0, \quad c_{11} = c_{22}.$$

Выделим вещественную и мнимую часть в переменных z_1, z_2 и запишем выражения для x_1, x_2, x_3, x_4 .

Пусть $\tau = u + iv$, $a = a_1 + ia_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{1 + |a|^2} a &= \frac{(u + iv)(a_1 + ia_2)}{1 + |a|^2} = \frac{(ua_1 - va_2) + i(ua_2 + va_1)}{1 + |a|^2}, \\ \frac{\tau}{1 + |a|^2} &= \frac{u + iv}{1 + |a|^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{ua_1 - va_2}{1 + |a|^2}, \quad x_2 = \frac{ua_2 + va_1}{1 + |a|^2}, \quad x_3 = \frac{u}{1 + |a|^2}, \quad x_4 = \frac{v}{1 + |a|^2}.$$

Запишем выражение для квадратичной формы $T(x_1, x_2, x_3)$.

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= c_{11}x_1^2 + c_{11}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + c_{13}x_1x_3 + c_{23}x_2x_3 = \\ &= \frac{1}{(1 + |a|^2)^2} \left[c_{11}(u^2a_1^2 - 2uva_1a_2 + v^2a_2^2) + c_{11}(u^2a_2^2 + 2uva_1a_2 + v^2a_1^2) + \right. \\ &+ c_{33}u^2 + c_{13}(u^2a_1 - uva_2) + c_{23}(u^2a_2 + uva_1) \left. \right] = \frac{1}{(1 + |a|^2)^2} \times \\ &\times \left[v^2(c_{11}a_2^2 + c_{11}a_1^2) + v(-2c_{11}ua_1a_2 + 2c_{11}ua_1a_2 - c_{13}ua_2 + c_{23}ua_1) + \right. \\ &+ (c_{11}u^2a_1^2 + c_{11}u^2a_2^2 + c_{33}u^2 + c_{13}u^2a_1 + c_{23}u^2a_2) \left. \right] = \frac{1}{(1 + |a|^2)^2} \times \\ &\times \left[v^2(c_{11}a_2^2 + c_{11}a_1^2) + v(-c_{13}ua_2 + c_{23}ua_1) + \right. \\ &+ (c_{11}u^2a_1^2 + c_{11}u^2a_2^2 + c_{33}u^2 + c_{13}u^2a_1 + c_{23}u^2a_2) \left. \right]. \end{aligned}$$

Подставим найденные значения для x_4 и $T(x_1, x_2, x_3)$ в уравнение (9) и приведем подобные. Получим

$$\begin{aligned} v^2(c_{11}a_2^2 + c_{11}a_1^2) + v(-c_{13}ua_2 + c_{23}ua_1 - 1 - |a|^2) + \\ + (c_{11}u^2a_1^2 + c_{11}u^2a_2^2 + c_{33}u^2 + c_{13}u^2a_1 + c_{23}u^2a_2) + o(|a|^2) = 0, \quad |a| \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Выбирая $|a|$ достаточно большим, т. е. заменяя a на ta с $|a| = 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} v^2(c_{11}a_2^2t^2 + c_{11}a_1^2t^2) + v(-c_{13}ua_2t + c_{23}ua_1t - 1 - |a|^2t^2) + \\ + (c_{11}u^2a_1^2t^2 + c_{11}u^2a_2^2t^2 + c_{33}u^2 + c_{13}u^2a_1t + c_{23}u^2a_2t) + o(|t|^2) = 0, \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, деля на t^2 и переходя в данном выражении к пределу при $t \rightarrow +\infty$, получим

$$\begin{aligned} v^2(c_{11}a_2^2 + c_{11}a_1^2) - v|a|^2 + c_{11}u^2a_1^2 + c_{11}u^2a_2^2 &= 0, \\ c_{11}v^2|a|^2 - v|a|^2 + c_{11}u^2|a|^2 &= 0, \\ c_{11}v^2 - v + c_{11}u^2 &= 0. \end{aligned}$$

Запишем данное равенство в комплексной форме. Получим

$$\begin{aligned} c_{11} \left(v^2 - \frac{v}{c_{11}} + u^2 \right) &= 0, \\ \left(v^2 - 2v \frac{1}{2c_{11}} + \frac{1}{4c_{11}^2} \right) - \frac{1}{4c_{11}^2} + u^2 &= 0, \\ u^2 + \left(v - \frac{1}{2c_{11}} \right)^2 &= \left(\frac{1}{2c_{11}} \right)^2, \\ \left| \tau - \frac{i}{2c_{11}} \right|^2 &= \left(\frac{1}{2c_{11}} \right)^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, нами показано, что областью Δ изменения параметра τ в предельном случае, когда $|a| \rightarrow +\infty$, является круг с центром в точке $\tau_0 = \frac{i}{2c_{11}}$ и радиуса $r_0 = \frac{1}{2c_{11}}$. Коэффициент $c_{11} > 0$ ввиду положительной определенности квадратичной формы $T(x_1, x_2, x_3)$. При этом соотношение (10) задает границу $\partial\Delta$.

Следует отметить, что касательной к границе области D , проведенной в граничной точке 0 , является прямая $\text{Im } z_2 = 0$. Нетрудно видеть, что, когда $|a| \rightarrow +\infty$, сечения $D_a(\tau)$ становятся близки к касательным к границе области D в граничной точке 0 , поскольку

$$\text{Im } z_2 = \frac{v}{1 + |a|^2} \rightarrow 0, \quad \text{когда } |a| \rightarrow +\infty.$$

Более того, при $|a| \rightarrow +\infty$ сечения $D_a(\tau)$ лежат в окрестности точки $z_0 = 0$. А именно, если $z \in D_a(\tau)$

$$|z - z_0|^2 = \left| \frac{\tau}{1 + |a|^2} a \right|^2 + \left| \frac{\tau}{1 + |a|^2} \right|^2 = \frac{|\tau|^2 |a|^2}{(1 + |a|^2)^2} + \frac{|\tau|^2}{(1 + |a|^2)^2} = \frac{|\tau|^2}{1 + |a|^2} \rightarrow 0,$$

когда $|a| \rightarrow +\infty$.

Используя вещественно-аналитичность функции $\rho(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$, разрешим уравнение (4) относительно переменной \bar{z}_2 . Поскольку $\rho(z, \bar{z})$ – вещественно-аналитическая функция, то она разлагается в ряд в окрестности точки $(0, 0) \in \mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$. Перейдем от координат \bar{z} к переменным ζ , т. е. сделаем замену

$$\bar{z}_1 = \zeta_1, \quad \bar{z}_2 = \zeta_2.$$

Получим функцию $\hat{\rho}(z, \zeta)$ – аналитическую от z и ζ с условиями

$$\begin{cases} \hat{\rho}(z, \zeta) = 0, \\ \zeta = \bar{z}. \end{cases}$$

Поскольку градиент функции $\hat{\rho}(z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2)$ отличен от нуля, то производная по одной из переменных отлична от нуля, например, производная $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \zeta_2} \neq 0$. Тогда, применяя теорему о неявной функции для голоморфных функций (теорема 3 из главы 1, §4 из [10]), выразим переменную ζ_2 через остальные переменные:

$$\begin{cases} \zeta_2 = \psi(z_1, z_2, \zeta_1), \\ \bar{z}_1 = \zeta_1, \\ \bar{z}_2 = \zeta_2. \end{cases}$$

Тогда $f(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = f(z_1, z_2, \bar{z}_1, \psi(z_1, z_2, \zeta_1))$ – вещественно-аналитическая функция, которая разлагается в ряд по переменным $z_1, z_2, \zeta_1 = \bar{z}_1$, который сходится в окрестности граничной точки $(0, 0)$. А именно

$$f(z_1, \bar{z}_1, z_2) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{h+k+2m=l} b_{h,k,m} z_1^h \bar{z}_1^k z_2^m,$$

где мы переобозначили элемент в весовой степени (давая вес 2 по z_2).

Выбирая $|a|$ достаточно большим, будем рассматривать моменты N на сечениях $D_a(\tau)$:

$$\begin{aligned} G(a, N) &= \int_{\partial \Delta_a} \tau^N f(D_a(\tau)) d\tau = \\ &= \int_{\partial \Delta_a} \tau^N \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{h+k+2m=l} b_{h,k,m} \left(\frac{\tau}{1 + |a|^2} a \right)^h \left(\frac{\tau}{1 + |a|^2} a \right)^k \left(\frac{\tau}{1 + |a|^2} \right)^m d\tau. \end{aligned}$$

Докажем, что коэффициенты $b_{h,k,m} = 0$ для $k > 0$. Пусть l_0 – наименьшая весовая степень со свойством, что $b_{h,k,m} \neq 0$ для $k > 0$ и k_0 – наибольшая степень по \bar{z}_1 , для которой это

выполнено. Мы имеем, что $G(a, N) = 0$ для всех N и a , в частности, для ta с $|a| = 1$ и $t \rightarrow +\infty$. Рассмотрим предел

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow +\infty} G(ta, N) t^{l_0} = \\
 & = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\partial \Delta_a} \tau^N \sum_{l=l_0}^{+\infty} \sum_{h+k+2m=l} b_{h,k,m} \left(\frac{\tau}{1+|ta|^2} ta \right)^h \left(\frac{\overline{\tau}}{1+|ta|^2} ta \right)^k \times \\
 & \times \left(\frac{\tau}{1+|ta|^2} \right)^m t^{l_0} d\tau = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\partial \Delta_a} \tau^N \sum_{l=l_0}^{+\infty} \sum_{h+k+2m=l} b_{h,k,m} \tau^h \bar{\tau}^k \tau^m t^h t^k t^{l_0} a^h \bar{a}^k \times \\
 & \times \left(\frac{1}{\frac{1}{t^2} + |a|^2} \right)^h \frac{1}{t^{2h}} \left(\frac{1}{\frac{1}{t^2} + |a|^2} \right)^k \frac{1}{t^{2k}} \left(\frac{1}{\frac{1}{t^2} + |a|^2} \right)^m \frac{1}{t^{2m}} d\tau = \\
 & = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{l=l_0}^{+\infty} \sum_{h+k+2m=l} b_{h,k,m} \int_{\partial \Delta_a} \tau^N \tau^h \bar{\tau}^k \tau^m d\tau \cdot t^{h+k+l_0-(2h+2k+2m)} a^h \bar{a}^k \times \\
 & \times \left(\frac{1}{\frac{1}{t^2} + |a|^2} \right)^{h+k+m+m-m} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{l=l_0}^{+\infty} \sum_{h+k+2m=l} b_{h,k,m} \int_{\partial \Delta_a} \tau^N \tau^h \bar{\tau}^k \tau^m d\tau \cdot t^{l_0-l} \times \\
 & \times a^h \bar{a}^k \left(\frac{1}{t^2} + |a|^2 \right)^m \frac{1}{\left(\frac{1}{t^2} + |a|^2 \right)^l} = \sum_{h+k+2m=l_0} b_{h,k,m} \int_{\partial \Delta} \tau^N \tau^h \bar{\tau}^k \tau^m d\tau \frac{a^h \bar{a}^k |a|^{2m}}{|a|^{2l_0}} = 0,
 \end{aligned}$$

где $\partial \Delta$ определяется соотношением (10).

Вычислим значение интеграла $\int_{\partial \Delta} \tau^N \tau^h \bar{\tau}^k \tau^m d\tau$, выразив $\bar{\tau}$ как дробно-линейную функцию из соотношения (10). Будем иметь

$$\left| \tau - \frac{i}{2c_{11}} \right|^2 = \left(\tau - \frac{i}{2c_{11}} \right) \left(\bar{\tau} + \frac{i}{2c_{11}} \right) = \left(\tau - \frac{i}{2c_{11}} \right) \bar{\tau} + \frac{i}{2c_{11}} \tau + \frac{1}{4c_{11}^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \left(\tau - \frac{i}{2c_{11}} \right) \bar{\tau} + \frac{i}{2c_{11}} \tau + \frac{1}{4c_{11}^2} &= \frac{1}{4c_{11}^2}, \\
 \bar{\tau} &= \frac{-\frac{i}{2c_{11}} \tau}{\tau - \frac{i}{2c_{11}}}.
 \end{aligned}$$

Подставим найденное значение для $\bar{\tau}$ в подынтегральное выражение. Получим

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} \tau^N \tau^h \bar{\tau}^k \tau^m d\tau &= \int_{\partial\Delta} \tau^{N+h+m} \bar{\tau}^k d\tau = \left(-\frac{i}{2c_{11}}\right)^k \int_{\partial\Delta} \frac{\tau^{N+h+m} \tau^k}{\left(\tau - \frac{i}{2c_{11}}\right)^k} d\tau = \\ &= \left(-\frac{i}{2c_{11}}\right)^k \int_{\partial\Delta} \frac{\tau^{N+h+m+k}}{\left(\tau - \frac{i}{2c_{11}}\right)^k} d\tau. \\ \int_{\partial\Delta} \frac{\tau^{N+h+m+k}}{\left(\tau - \frac{i}{2c_{11}}\right)^k} d\tau &= 2\pi i \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}} \tau^{N+h+m+k} = \\ &= 2\pi i \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \frac{(N+h+m+k)!}{(N+h+m+1)!} \tau^{N+h+m+1} = \\ &= 2\pi i \frac{1}{(k-1)!} \frac{(N+h+m+k)!}{(N+h+m+1)!} \left(\frac{i}{2c_{11}}\right)^{N+h+m+1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} \tau^N \tau^h \bar{\tau}^k \tau^m d\tau &= \left(-\frac{i}{2c_{11}}\right)^k 2\pi i \frac{1}{(k-1)!} \frac{(N+h+m+k)!}{(N+h+m+1)!} \left(\frac{i}{2c_{11}}\right)^{N+h+m+1} = \\ &= (-1)^k \left(\frac{i}{2c_{11}}\right)^{N+h+m+k+1} 2\pi i \binom{N+h+m+k}{k-1}. \end{aligned}$$

Закончим доказательство теоремы. Поскольку

$$\sum_{h+k+2m=l_0} b_{h,k,m} \int_{\partial\Delta} \tau^N \tau^h \bar{\tau}^k \tau^m d\tau \cdot \frac{a^h \bar{a}^k |a|^{2m}}{|a|^{2l_0}} = 0,$$

то, подставляя в данное выражение найденное значение для интеграла, будем иметь

$$\sum_{h+k+2m=l_0} b_{h,k,m} (-1)^k \left(\frac{i}{2c_{11}}\right)^{N+h+m+k+1} 2\pi i \binom{N+h+m+k}{k-1} \frac{a^h \bar{a}^k |a|^{2m}}{|a|^{2l_0}} = 0.$$

Выбирая $N = k_0 - 1$, получим следующее соотношение на коэффициенты $b_{h,k,m}$

$$\sum_{h+k_0+2m=l_0} (-1)^{k_0} \left(\frac{i}{2c_{11}}\right)^{2k_0+h+m} 2\pi i \binom{2k_0+h+m-1}{k_0-1} b_{h,k_0,m} a^{h+m} \bar{a}^{k_0+m} = 0.$$

Подставляя $a = e^{i\theta}$, мы получим

$$\sum_{h+k_0+2m=l_0} (-1)^{k_0} \left(\frac{i}{2c_{11}}\right)^{2k_0+h+m} 2\pi i \binom{2k_0+h+m-1}{k_0-1} b_{h,k_0,m} e^{i\theta(h-k_0)} = 0,$$

что означает, что $b_{h,k_0,m} = 0$ для $h+k_0+2m=l_0$. Таким образом, для $k \geq 1$ мы имеем $b_{h,k,m} = 0$ для любой весовой степени l .

Таким образом, нами показано, что функция f является голоморфной в окрестности граничной точки 0. Ввиду условий теоремы функция f голоморфно продолжается на пересечение области D с каждой комплексной прямой, проходящей через граничную точку 0. Следовательно, по теореме Гартогса о продолжении (теорема 1 из главы 3, §11, п. 32 из [10]) и использовании дробно-линейного преобразования (при котором граничная точка

перейдет в бесконечно удаленную, а прямые, проходящие через граничную точку, переходят в параллельные прямые) функция f будет голоморфно продолжаться во всю область $D \subset \mathbb{C}^2$. Данные рассуждения заканчивают доказательство теоремы в двумерном случае. \square

3. МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим n -мерное комплексное пространство \mathbb{C}^n , точки которого будем обозначать через $w = (w_1, \dots, w_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ и т. д. Напомним, что область D называется строго выпуклой, если функция $\rho(w_1, \dots, w_n)$, задающая границу ∂D области D , т. е. $D = \{w \mid \rho(w) < 0\}$, удовлетворяет условию

$$\sum_{p,j=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p \partial w_j} (w^0) \xi_p \xi_j + \sum_{p,j=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{w}_p \partial \bar{w}_j} (w^0) \bar{\xi}_p \bar{\xi}_j + \sum_{p,j=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p \partial \bar{w}_j} (w^0) \xi_p \bar{\xi}_j > 0$$

$\forall \xi \neq 0, w^0 \in \partial D$.

Пусть D – ограниченная строго выпуклая область в \mathbb{C}^n ($n > 1$) с вещественно-аналитической границей ∂D , т.е. $D = \{w \mid \rho(w) < 0\}$, где функция $\rho(w_1, \dots, w_n)$ является вещественно-аналитической в некоторой окрестности замыкания области \bar{D} . При этом $\text{grad } \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial \rho}{\partial w_n} \right) \neq 0$ на ∂D . Далее все индексы $p, j, r, s \in \{1, \dots, n\}$.

Пусть для всех точек границы выполнены следующие условия:

1. $p < j, r < s$

$$\begin{aligned} & 4 \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial \rho}{\partial w_j} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_s} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_s \partial w_j} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_s} \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_j} - \\ & - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_j} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_s \partial w_p} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_s} \frac{\partial \rho}{\partial w_j} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_p} + 4 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_s} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p \partial w_j} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

2. $p < j$

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial \rho}{\partial w_j} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r^2} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_j} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_j} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_p} + \\ & + 2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p \partial w_j} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

3. $p < r$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial w_p} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r^2} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_p} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p^2} = 0. \quad (13)$$

Обозначим также через \mathfrak{L}_{w_0} – семейство комплексных прямых, проходящих через точку w_0 , $w_0 \in \partial D$.

Лемма 2. Если границы всех двумерных сечений области D удовлетворяют условию (2), то в n -мерном случае справедлива группа соотношений (11) – (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В уравнение

$$\rho(w_1, \dots, w_n) = 0$$

подставим следующую параметризацию

$$\begin{cases} w_1 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta \\ w_2 = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta \\ \vdots \\ w_n = \alpha_n \xi + \beta_n \eta. \end{cases}$$

Получим двумерное сечение, определяемое векторами $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Группа соотношений (11) – (13) будет найдена из того, что граница $\rho(\xi, \eta)$ двумерного сечения должна удовлетворять условию (2) в переменных ξ и η для любых векторов α и β , т.е. должно быть выполнено условие

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta}(\xi, \eta)\right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) - 2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi}(\xi, \eta) \frac{\partial \rho}{\partial \eta}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}(\xi, \eta)\right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = 0. \quad (14)$$

Найдем производные, входящие в уравнение (14). Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} &= \frac{\partial \rho}{\partial w_1} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho}{\partial w_2} \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + \dots + \frac{\partial \rho}{\partial w_n} \frac{\partial w_n}{\partial \xi} = \\ &= \alpha_1 \frac{\partial \rho}{\partial w_1} + \alpha_2 \frac{\partial \rho}{\partial w_2} + \dots + \alpha_n \frac{\partial \rho}{\partial w_n} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \alpha_r. \\ \frac{\partial \rho}{\partial \eta} &= \frac{\partial \rho}{\partial w_1} \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \rho}{\partial w_2} \frac{\partial w_2}{\partial \eta} + \dots + \frac{\partial \rho}{\partial w_n} \frac{\partial w_n}{\partial \eta} = \\ &= \beta_1 \frac{\partial \rho}{\partial w_1} + \beta_2 \frac{\partial \rho}{\partial w_2} + \dots + \beta_n \frac{\partial \rho}{\partial w_n} = \sum_{p=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \beta_p. \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} &= \alpha_1 \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1 \partial w_1} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1 \partial w_2} + \dots + \alpha_n \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1 \partial w_n} \right) + \\ &+ \alpha_2 \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_2 \partial w_1} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_2 \partial w_2} + \dots + \alpha_n \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_2 \partial w_n} \right) + \dots + \\ &+ \alpha_n \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_n \partial w_1} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_n \partial w_2} + \dots + \alpha_n \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_n \partial w_n} \right) = \sum_{r,s=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_s} \alpha_r \alpha_s. \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} &= \beta_1 \left(\beta_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1 \partial w_1} + \beta_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1 \partial w_2} + \dots + \beta_n \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1 \partial w_n} \right) + \\ &+ \beta_2 \left(\beta_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_2 \partial w_1} + \beta_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_2 \partial w_2} + \dots + \beta_n \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_2 \partial w_n} \right) + \dots + \\ &+ \beta_n \left(\beta_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_n \partial w_1} + \beta_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_n \partial w_2} + \dots + \beta_n \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_n \partial w_n} \right) = \sum_{p,j=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p \partial w_j} \beta_p \beta_j. \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi \partial \eta} &= \alpha_1 \left(\beta_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1 \partial w_1} + \beta_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1 \partial w_2} + \dots + \beta_n \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_1 \partial w_n} \right) + \\ &+ \alpha_2 \left(\beta_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_2 \partial w_1} + \beta_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_2 \partial w_2} + \dots + \beta_n \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_2 \partial w_n} \right) + \dots + \\ &+ \alpha_n \left(\beta_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_n \partial w_1} + \beta_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_n \partial w_2} + \dots + \beta_n \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_n \partial w_n} \right) = \sum_{s,j=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_s \partial w_j} \alpha_s \beta_j. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая вышеприведенные выкладки,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta}\right)^2 &= \sum_{p,j=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial \rho}{\partial w_j} \beta_p \beta_j. \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)^2 &= \sum_{r,s=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_s} \alpha_r \alpha_s. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta}\right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} &= \sum_{p,j,r,s=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial \rho}{\partial w_j} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_s} \beta_p \beta_j \alpha_r \alpha_s, \\ \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi \partial \eta} &= \sum_{p,j,r,s=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_s \partial w_j} \beta_p \beta_j \alpha_r \alpha_s, \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \eta^2} &= \sum_{p,j,r,s=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_s} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p \partial w_j} \beta_p \beta_j \alpha_r \alpha_s. \end{aligned}$$

Подставим найденные значения производных в соотношение (14). Получим, что для любых векторов α и β должно быть выполнено условие

$$\sum_{p,j,r,s=1}^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial \rho}{\partial w_j} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_s} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_s \partial w_j} + \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_s} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p \partial w_j} \right) \beta_p \beta_j \alpha_r \alpha_s = 0.$$

Далее приведем подобные в данной сумме, при этом все индексы $p, j, r, s \in \{1, \dots, n\}$. Будем иметь

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{p < j \\ r, s}} \left(2 \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial \rho}{\partial w_j} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_s} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_s \partial w_j} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_j} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_s \partial w_p} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_s} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p \partial w_j} \right) \beta_p \beta_j \alpha_r \alpha_s + \\ &\quad + \sum_{\substack{p=j \\ r, s}} \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial w_p} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_s} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_s \partial w_p} + \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_s} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p^2} \right) \beta_p^2 \alpha_r \alpha_s = 0. \\ &\sum_{\substack{p < j \\ r < s}} \left(4 \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial \rho}{\partial w_j} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_s} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_s \partial w_j} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_s} \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_j} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_j} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_s \partial w_p} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_s} \frac{\partial \rho}{\partial w_j} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_p} + 4 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_s} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p \partial w_j} \right) \beta_p \beta_j \alpha_r \alpha_s + \\ &\quad + \sum_{\substack{p < j \\ r=s}} \left(2 \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial \rho}{\partial w_j} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r^2} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_j} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_j} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_p} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p \partial w_j} \right) \beta_p \beta_j \alpha_r^2 + \sum_{\substack{p=j \\ r < s}} \left(2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_p} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_s} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_s \partial w_p} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_s} \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_p} + 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_s} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p^2} \right) \beta_p^2 \alpha_r \alpha_s + \\ &\quad + \sum_{\substack{p=j \\ r=s}} \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial w_p} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r^2} - 2 \frac{\partial \rho}{\partial w_r} \frac{\partial \rho}{\partial w_p} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_p} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_r} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p^2} \right) \beta_p^2 \alpha_r^2 = 0. \end{aligned}$$

Поскольку данное равенство должно выполняться для любых векторов α и β и в нем приведены подобные (все суммы состоят из различных слагаемых), то равенство нулю означает, что все выражения под знаками сумм равны нулю. Отметим, что вторая и третья суммы в последнем соотношении получаются друг из друга переобозначением индексов. Таким образом, нами показана справедливость соотношений (11) – (13). \square

Теорема 5. Пусть функция $f \in C^w(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из \mathfrak{L}_{w_0} , пересекающих D , тогда функция f голоморфно продолжается в D .

Замечание 2. Если точка w_0 фиксируется заранее, то выполнение условий (11) – (13) нужно требовать только в точке w_0 .

Доказательство. Будем проводить двумерные сечения области D , проходящие через граничную точку w_0 и точку 0 , лежащую в области D . Функция, задающая границу такого двумерного сечения, будет удовлетворять условию (2), поэтому функция f по предыдущему пункту будет голоморфно продолжаться во внутренности таких двумерных сечений и определять в них функцию F . Поскольку голоморфное продолжение функции f в двумерные сечения дается двумерным интегралом Бохнера – Мартинелли F , то во всех двумерных сечениях голоморфные продолжения совпадают. Эти двумерные сечения покрывают всю область D . Таким образом, функция F определена во всей области D .

Поскольку голоморфное продолжение функции f в двумерных сечениях дается двумерным интегралом Бохнера – Мартинелли, зависящим вещественно-аналитически от векторов α и β , то голоморфное продолжение функции f является вещественно-аналитической функцией. Таким образом, функция F принадлежит классу C^∞ в окрестности точки 0 .

Поскольку двумерное сечение определяется двумя комплексными прямыми, то функция F , будучи голоморфной во всем двумерном сечении, будет также голоморфна на комплексных прямых, лежащих в этом сечении. Таким образом, функция F будет голоморфна на пересечении области D с каждой комплексной прямой, проходящей через точку 0 .

Итак, мы показали, что функция F принадлежит классу C^∞ в окрестности точки 0 и голоморфна на пересечении области D с каждой комплексной прямой, проходящей через точку 0 . Мы находимся в условиях теоремы Форелли (теорема 4.4.5 из [11]) и, применяя данную теорему, получим, что функция F будет голоморфна в некоторой окрестности точки 0 .

Поскольку функция F голоморфна в некоторой окрестности точки 0 и на пересечении области D с каждой комплексной прямой, проходящей через данную точку, то по теореме Гартогса о продолжении (теорема 1 из главы 3, §11, п. 32 из [10]) аналогично предыдущему пункту она голоморфна во всей области D . \square

4. ПРИМЕРЫ

В данном пункте мы рассмотрим примеры областей, для которых верна теорема 5.

Пример 1. $D = \mathbb{B}^n$ – шар с центром в нуле радиуса R , т. е. $D = \{\zeta : |\zeta| < R\}$.

Пример 2. Пусть $\zeta_j = \frac{L_j(w)}{L(w)}$, $j = 1, \dots, n$, где $L_j(w)$, $L(w)$ – линейные функции, тогда образ шара \mathbb{B}^n при данном отображении (если оно не вырождено) является областью, для которой справедлива теорема 5.

Пример 3. Пусть функция ρ , задающая границу области D , имеет вид

$$\rho(w_1, \dots, w_n) = |w_1|^2 + \dots + |w_n|^2 - R^2 + \sum_j |L_j(w)|^2,$$

где $L_j(w)$ – линейные функции. Тогда для области $D = \{w \mid \rho(w) < 0\}$ выполнены условия теоремы 5.

Пример 4. Пусть функция $\rho(w, \bar{w})$ зависит линейно от w и от \bar{w} – произвольно. Тогда область $D = \{w \mid \rho(w) < 0\}$ удовлетворяет условиям теоремы 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аграновский М.Л. *Максимальность инвариантных алгебр функций* / М.Л. Аграновский, Р.Е. Вальский // Сиб. матем. журн. 1971. Т. 12. № 1. С. 3–12.
2. E. Stout. *The boundary values of holomorphic functions of several complex variables* // Duke Math. J. 1977. V. 44. № 1. P. 105–108.
3. Айзенберг Л.А. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе* / Л.А. Айзенберг, А.П. Южаков. Новосибирск: Наука, 1979.
4. Аграновский М.Л. *Граничные аналоги теоремы Гартогса* / М.Л. Аграновский, А.М. Семенов // Сиб. матем. журн. 1991. Т. 32. № 1. С. 168–170.
5. Кытманов А.М. *О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения* / А.М. Кытманов, С.Г. Мысливец // Мат. заметки. 2008. Т. 83. № 4. С. 545–551.
6. M. Agranovsky. *Holomorphic extension from the unit sphere in \mathbb{C}^n into complex lines passing through a finite set* // arxiv.org/abs/0910.3592.
7. L. Varacco. *Holomorphic extension from the sphere to the ball* // arxiv.org/abs/0911.2560.
8. Кытманов А.М. *Семейства комплексных прямых минимальной размерности, достаточные для голоморфного продолжения функций* / А.М. Кытманов, С.Г. Мысливец, В.И. Кузоватов // Сиб. матем. журн. 2011. Т. 52. № 2. С. 326–339.
9. Кудрявцев Л.Д. *Краткий курс математического анализа*. М.: Наука, 1989. 736 с.
10. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных*. Ч. 2. СПб.: Лань, 2004. 464 с.
11. Рудин У. *Теория функций в единичном шаре из \mathbb{C}^n* . М.: Мир, 1984. 456 с.

Вячеслав Игоревич Кузоватов,
Сибирский федеральный университет, Институт математики,
пр. Свободный, 79,
660041, г. Красноярск, Россия
E-mail: kuzovатов@yandex.ru