ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 4. № 1 (2012). С. 146-152.

УДК 517.9

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА В ПРОСТРАНСТВАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

А.Ю. ТИМОФЕЕВ

Аннотация. Работа посвящена задаче Дирихле в единичном круге G для $\partial_{\bar{z}} w + b(z)\overline{w} = 0$, $\Re w = g$ на ∂G, $\Im w = h$ в точке $z_0 = 1$, где g— заданная непрерывная по Липшицу функция. Коэффициент b принадлежит подпространству из $L_2(G)$, которое в общем случае не содержится в $L_q(G)$, $q > 2$. Теория И.Н. Векуа в этом случае, вообще говоря, неприменима. Показывается, что, как и в случае задачи Дирихле для голоморфных функций, возникает «логарифмический эффект». Решение $w = w(z)$ вне точки $z = 0$ удовлетворяет условию Липшица с логарифмическими множителями. Доказывается существование непрерывного в $\overline{G}$ решения задачи.

Ключевые слова: обобщенные уравнения Коши–Римана; задача Дирихле; модуль непрерывности; теорема Тихонова о неподвижной точке.

1. Введение

Теория обобщённых аналитических функций есть теория комплекснозначных функций $w = w(z)$, являющихся решением уравнения

$$\partial_{\bar{z}} w(z) + A(z)w(z) + B(z)\overline{w}(z) = 0, z \in G, \tag{1.1}$$

где $\partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)$, а $A(z)$, $B(z)$— заданные в ограниченной области G комплексной плоскости функции. В случае, когда $A(z) \equiv B(z) \equiv 0$, (1.1) переходит в условие аналитичности функции $w(z)$.

Теория таких функций построена Векуа в предположении, что $A(z)$, $B(z)$ принадлежат пространству $L_p(G)$, где $p > 2$ ([1]). В этом случае (1.1) называется регулярной обобщенной системой Коши–Римана, а его решение— обобщенными аналитическими функциями. Коэффициенты таких систем могут допускать «слабые» особенности, лимитируемые требованием p-интегрируемости. В частности, если $A(z)$, $B(z)$ обращаются в бесконечность в некоторой изолированной особой точке, то порядок этой особенности должен быть строго меньше единицы. Исследованию задач для обобщенных уравнений с коэффициентами, имеющими особенности в изолированной точке, посвящены работы Л.Г. Михайлова, З.Д. Усманова, А. Тунгатарова, Н. Блиева, М. Отелбаева, М. Райссига и А.Ю. Тимофеева, Р. Сакса, Г.Т. Макацария и других (например, [2]–[7]). При этом особое внимание уделяется исследованиям существования непрерывных решений для краевых задач уравнения (1.1).

В работе [7] исследуется задача Дирихле для обобщённого уравнения Коши–Римана (1.1), где $G = \{z \in C : |z| < 1\}$, $A(z) \equiv 0$.

A.Y. Timofeev, Boundary problem for the generalized Cauchy–Riemann equation in spaces, described by the modulus of continuity.

Поступила 30 июня 2011 г.

При этом новизна исследований состоит в том, что допускающие особенности в точке $z = 0$ коэффициенты $B(z)$ принадлежат весовому пространству функций $S_p(G)$, которое является объединением пространств

$$s_p(G) = \left\{ B(z) : \sup_{G\setminus\{0\}} (|B(z)| \cdot p(|z|)) < +\infty \right\}.$$

Множество функций $p(t)$, обладающих достаточно общими свойствами, обозначается через P (см. раздел 2). Пространство $S_p(G)$ состоит из тех и только тех заданных в G функций $f(z)$, для каждой из которых существует такая функция $p(t) \in P$, что $f(z) \in s_p(G)$.

В [7] доказана следующая

Теорема 1. *Рассматривается следующая задача Дирихле:*

$$\partial_{\bar{z}} w + B(z)\overline{w} = 0, z \in G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \tag{1.2}$$

$$\Re w = g(z), z \in \partial G, \Im w\,|_{z_0=1} = h, \tag{1.3}$$

где $B \in S_p(G)$, $g \in C^{\lambda_0}(\partial G)(0 < \lambda_0 < 1)$, $h \in \mathbb{R}$. *Тогда существует и притом единственное решение задачи* (1.2)–(1.3) $w = w(z)$, *причём* $w \in C(\overline{G}) \bigcap C^{\lambda_0}(\overline{G} \setminus \{0\})$.

Граничная функция $g(z)$ в условии (1.3) принадлежит пространству Гёльдера, которое описывается модулем непрерывности $\mu(t) = t^{\lambda_0}$. Известно, что в общем случае модуль непрерывности удовлетворяет неравенству

$$\mu(t) \geq c \cdot t$$

с некоторой постоянной c.

В связи с этим представляет интерес исследование задачи (1.2)–(1.3) для случая, когда $g(z)$ принадлежит другому пространству функций, описываемому модулем непрерывности $\mu(t)$. Какому условию вне точки $z = 0$ будут удовлетворять непрерывные решения $w(z)$ системы (1.2)–(1.3)?

В данной работе изучен случай «минимального» пространства, описываемого модулем непрерывности пространства Липшица. В этом случае $\mu(t) = t$. Введём обозначения: $\mu_{1,0}(t) := t$; $\mu_{1,k}(t) := t \cdot (\ln \frac{1}{t})^k, k \geq 1 (0 < t < \frac{1}{e})$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $B(z) \in S_p(G)$, $g(z) \in C_{\mu_{1,0}}(\partial G)$, $h \in \mathbb{R}$. *Тогда существует и притом единственное решение задачи* (1.2)–(1.3) $w = w(z) \in C(\overline{G}) \bigcap C_{\mu_{1,5}}(\overline{G} \setminus \{0\})$.

В разделе 2 приведены сведения о весовых функциях, модулях непрерывности и соответствующих функциональных пространствах. В разделе 3 сформулированы вспомогательные утверждения. В заключительной части приводится схема доказательства теоремы 2.

2. Весовые функции, модули непрерывности. Основные пространства функций

В [7] введены весовые функции $p(t)$, как функции, удовлетворяющие следующим условиям.

1. Заданы и положительны на некотором промежутке $(0, t_p]$, где число t_p зависит от функции $p(t)$, $t_p < 1$.
2. Не убывают на $(0, t_p]$.
3. $\lim\limits_{t\to+0} p(t) = 0$.
4. $\displaystyle\int_0^{t_p} \frac{dt}{p(t)} < +\infty$.

В дальнейшем будем считать функции $p(t)$ заданными на всём промежутке $(0,1]$, продолжая в случае необходимости $p(t)$ на промежутке $[t_p,1]$ постоянной, равной $p(t_p)$. В этом случае условия 1, 2 и 4 будут выполнены уже на всём промежутке $(0,1]$. Обозначим через P множество функций $p(t)$, удовлетворяющих условиям 1–4.

Нетрудно показать, что для функции $p(t) \in P$ существует такое число $c_p > 0$, что

$$\frac{t}{p(t)} \leqslant c_p, t \in (0,1]. \tag{2.1}$$

Приведём примеры весовых функций.

1. $p(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.
2. $p(t) = t \cdot \ln^\beta \frac{1}{t}$, $\beta > 1$.
3. $p(t) = t \cdot \ln \frac{1}{t} \cdot \ln\ln \frac{1}{t} \cdot \dots \cdot \underbrace{\ln \dots \ln}_{k-1} \frac{1}{t} \cdot (\underbrace{\ln \dots \ln}_{k} \frac{1}{t})^\beta$, $\beta > 1$.

Во множестве весовых функций P можно ввести частичный порядок. Пусть $p_1(t), p_2(t) \in P$. Будем писать $p_1 \prec p_2$, если $p_1(t) \leqslant p_2(t)$, $t \in (0,1]$, причём $\frac{p_1(t)}{p_2(t)} \to 0$ при $t \to +0$.

Можно показать (см. [7]), что для каждой функции $p \in P$ существует $p_1 \in P$ со свойством, что $p_1 \prec p$.

С другой стороны, отношение $\prec$ во множестве весовых функций P не является порядком: не для любых $p_1, p_2 \in P$ можно сказать, что $p_1 \prec p_2$ или $p_2 \prec p_1$ (см. [8]).

В работе [7] допускающие особенности коэффициенты $B(z)$ $(A(z) \equiv 0)$ принадлежат весовому пространству функций $S_p(G)$, которое является объединением пространств

$$s_p(G) = \left\{ B(z) : \sup_{G \setminus \{0\}} (|B(z)| \cdot p(|z|)) < +\infty \right\}.$$

Заметим, что для таких функций выполнено условие $B(z) \in L_{\infty,loc}(G \setminus \{0\})$. Пространство $S_p(G)$ состоит из тех и только тех заданных в G функций $B(z)$, для каждой из которых существует такая функция $p(t) \in P$, что $B(z) \in s_p(G)$. Нетрудно показать, что $S_p(G) \subset L_2(G)$.

В соответствии с определением из [9, с. 41], функция $\omega(t)$, удовлетворяющая условиям

1. $\omega(t) \geq 0$ и не убывает на $[0,1]$;
2. $\omega(0) = 0$;
3. $\omega(t_1 + t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$;
4. $\omega(t)$ непрерывна на $[0,1]$,

называется модулем непрерывности.

Мы не будем требовать выполнения условия 4, а вместо условия 3 будем предполагать более сильное условие, что $\frac{\omega(t)}{t}$ не возрастает при $t > 0$. Очевидно, что тогда $\omega(t)$ полуаддитивна. Множество всех таких функций будем обозначать через Ω. Заметим, что для весовых функций из P, вообще говоря, не выполнено условие невозрастания $\frac{p(t)}{t}$ при $t > 0$ (см. [8]), а для модуля непрерывности $\omega(t) = \begin{cases} t \cdot \ln \frac{1}{t}, & 0 < t \leqslant \frac{1}{e} \\ 0, & t = 0 \end{cases}$ не выполнено условие 4 функций класса P.

Определим теперь для замкнутого ограниченного подмножества $K \Subset \mathbb{C}$ и $\omega \in \Omega$ класс непрерывных функций $C_\omega(K)$, удовлетворяющих условию

$$||f||_\omega := \max \left\{ \sup_K |f(t)|, \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\omega(|z_1 - z_2|)} \right\} < \infty. \tag{2.2}$$

Очевидно, что величина (2.2) удовлетворяет всем аксиомам нормы. Более того, пространство $(C_\omega(K), ||\cdot||_\omega)$ является банаховым (см. например [10]). В случае $\omega(t) = t^\lambda$ $(0 < \lambda < 1)$ получаем пространство Гёльдера, а при $\omega(t) = t$ — пространство Липшица.

3. Вспомогательные утверждения

При доказательстве теоремы 1 в [7] существенную роль играет следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть* $b(z) \in S_p(G)$, *тогда функция* $T_G(b)(z)$ *непрерывна в точке* $z = 0$.

Здесь под $T_G(\cdot)$ подразумевается основной оператор теории Векуа, а именно, следующее:

$$T_G(b)(z) := -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{b(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta, \zeta = \xi + i\cdot\eta.$$

Кроме того, было использовано следующее свойство.

Теорема 4. *Пусть* $a(z)$ — *фиксированная функция из* $L_\infty(G)$, $w(z) \in S_p(G)$. *Тогда* $T_G(a\cdot w) \in C^\lambda(\overline{G}\setminus\{0\})$ *для любого* $\lambda \in (0,1)$, *при этом*

$$|T_G(a\cdot w)(z)| \leqslant A_1(l,p)\cdot ||w||_p \cdot ||a||_{L_\infty(G)}, z \in \overline{G\setminus U_l}, \tag{3.1}$$

$$|T_G(a\cdot w)(z_1) - T_G(a\cdot w)(z_2)| \leqslant A_2(l,p,\lambda)\cdot ||w||_p\cdot ||a||_{L_\infty(G)}\cdot |z_1 - z_2|^\lambda, \tag{3.2}$$

где $U_l = \{z : |z| \leqslant \frac{1}{2^l}\}(l = 1, 2, \ldots)$.

Из (3.1) и (3.2) следует, что для любого $\lambda \in (0, l)$ и любого $l \in \mathbb{N}$

$$||T_G(a\cdot w)||_{C^\lambda(\overline{G\setminus U_l})} \leqslant A(l,p,\lambda)\cdot ||w||_p \cdot ||a||_{L_\infty(G)}. \tag{3.3}$$

Замечание. Поскольку вне круга U_l функция $a(z)\cdot w(z)$ является ограниченной, то вместо (3.2) можно утверждать более точное неравенство (см. [1, с. 39])

$$|T_G(a\cdot w)(z_1) - T_G(a\cdot w)(z_2)| \leqslant A_3(l,p)\cdot ||w||_p\cdot ||a||_{L_\infty(G)}\cdot |z_1 - z_2|\cdot \ln\frac{1}{|z_1 - z_2|}, \tag{3.4}$$

где $|z_1 - z_2| < \frac{1}{e}$, поэтому при выполнении условий теоремы 4 справедлива следующая оценка:

$$||T_G(a\cdot w)||_{\omega_{1,1}} \leqslant A_4(l,p)\cdot ||w||_p\cdot ||a||_{L_\infty(G)} \tag{3.5}$$

в смысле пространства $C_{\omega_{1,1}}(\overline{G\setminus U_l})$.

При доказательстве теоремы 1 использовалось решение задачи Дирихле для голоморфных функций, а именно, следующая (см. [11, с. 131])

Теорема 5. *Если функция* g *задана на* ∂G *и непрерывна по Гёльдеру с показателем* λ $(0 < \lambda < 1)$, *то существует единственная голоморфная в* G *функция* f, *непрерывная в замкнутом круге* G *и удовлетворяющая условиям*

$$\Re f = g(z), z \in \partial G, \Im f|_{z=z_0} = c, \tag{3.6}$$

где $z_0 \in \partial G$ — *фиксированная точка, причём* f *является непрерывной по Гёльдеру в* $\overline{G}$ *с тем же самым показателем* λ, *то есть* $f \in C^\lambda(\overline{G})$.

Замечание. Как следует из [11, с. 131], справедлива оценка

$$||f||_{C^\lambda(\overline{G})} \leqslant A(\lambda)||f||_{C^\lambda(\partial G)}. \tag{3.7}$$

Как показано в [10] и [12], справедливы аналоги теоремы 5 для более общих, чем гёльдеровские, пространств функций, описываемых модулем непрерывности. В частности, справедлива

Теорема 6. *Если $g \in C_{\mu_{1,k}}(\partial G)$ $(k \geq 0)$, то существует и притом единственная голоморфная в G функция f, удовлетворяющая* (3.6), *причём $f \in C_{\mu_{1,k+2}}(\overline{G})$.*

Аналог неравенства (3.7) в этом случае

$$||f||_{C_{\mu_{1,k+2}}(\overline{G})} \leqslant A \cdot ||f||_{C_{\mu_{1,k+2}}(\partial G)} \tag{3.8}$$

используется в разделе 4 на шаге 2 и шаге 3 при использовании принципа неподвижной точки.

Замечание. Теоремы 5 и 6 остаются справедливыми при замене в условии (3.6) вещественной и мнимой частей местами.

4. Схема доказательства теоремы 2

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме доказательства теоремы 1 (см. [7, с. 661–662]).

1-й шаг. Решение $w = w(z)$ (1.2)–(1.3) ищем в виде

$$w(z) = \Phi(z) \cdot \exp \omega(z), \tag{4.1}$$

где $\Phi(z)$— голоморфная в G функция, которая является непрерывной в $\overline{G}$, а $\exp \omega(z) \in L_\infty(G)$. Подставляя (4.1) в (1.2), получаем уравнение для $\omega = \omega(z)$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} + B(z) \cdot \frac{\overline{\Phi}(z)}{\Phi(z)} \cdot \frac{\overline{\exp \omega(z)}}{\exp \omega(z)} = 0, z \in G. \tag{4.2}$$

Подбираем решение (4.2) так, чтобы выполнялись условия

$$\Im \omega|_{\partial G} = 0, \Re \omega|_{z_0=1} = 0. \tag{4.3}$$

Из (4.2) получаем ([1]) для решения (4.2) представление

$$\omega(z) = \tilde{\Phi}(\omega, \Phi)(z) - T_G \left(B \cdot \frac{\overline{\Phi}}{\Phi} \cdot \frac{\overline{\exp \omega}}{\exp \omega} \right)(z), z \in G, \tag{4.4}$$

где $\tilde{\Phi}$— произвольная, зависящая от ω и Φ голоморфная функция. Из теорем 3, 4 и замечания следует, что $T_G \left(B \cdot \frac{\overline{\Phi}}{\Phi} \cdot \frac{\overline{\exp \omega}}{\exp \omega} \right) \in C(\overline{G}) \bigcap C_{\mu_{1,1}}(\overline{G} \setminus \{0\})$, причём (см. (3.5))

$$\left|\left| T_G \left(B \cdot \frac{\overline{\Phi}}{\Phi} \cdot \frac{\overline{\exp \omega}}{\exp \omega} \right) \right|\right|_{C(\overline{G})} \leqslant C_B, \left|\left| T_G \left(B \cdot \frac{\overline{\Phi}}{\Phi} \cdot \frac{\overline{\exp \omega}}{\exp \omega} \right) \right|\right|_{C_{\mu_{1,1}}(\overline{G \setminus U_l})} \leqslant C_{B,l}, \tag{4.5}$$

где постоянные C_B и $C_{B,l}$ не зависят от ω и Φ.

2-й шаг. Подбираем далее произвольную функцию $\tilde{\Phi}$ так, чтобы выполнялись условия (4.3), т.е.

$$\begin{cases} \Im \tilde{\Phi}\Big|_{\partial G} = \Im T_G \left(B \cdot \frac{\overline{\Phi}}{\Phi} \cdot \frac{\overline{\exp \omega}}{\exp \omega} \right)\Big|_{\partial G} \\ \Re \tilde{\Phi}\Big|_{z_0=1} = \Re T_G \left(B \cdot \frac{\overline{\Phi}}{\Phi} \cdot \frac{\overline{\exp \omega}}{\exp \omega} \right)\Big|_{z_0=1}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Правая часть первого соотношения (4.6) является функцией класса $C_{\mu_{1,1}}(\partial G)$. В соответствие с замечанием и теоремой 6 существует единственная голоморфная в G функция $\tilde{\Phi}(z)$, которая удовлетворяет условиям (4.6), причём

$$||\tilde{\Phi}||_{C_{\mu_{1,3}}(\overline{G})} \leqslant C \cdot ||\tilde{\Phi}||_{C_{\mu_{1,3}}(\partial G)}.$$

Таким образом, правая часть (4.4), а значит, и левая часть, то есть функция $\omega(z)$, для любых $\Phi \in H(G)\bigcap C(\overline{G})$ и $\omega \in L_\infty(G)$ является функцией класса $C(\overline{G})\bigcap C_{\mu_{1,3}}(\overline{G}\setminus\{0\})$. Далее, применяя к отображению

$$\omega \to F_1(\Phi,\omega) := \tilde{\Phi}(\omega,\Phi) - T_G\left(B\cdot\frac{\overline{\Phi}}{\Phi}\cdot\frac{\overline{\exp\omega}}{\exp\omega}\right)$$

теорему Тихонова о неподвижной точке, получаем, что для любой $\Phi \in H(G)\bigcap C(\overline{G})$ существует и притом единственная функция $\omega(z) \in C(\overline{G})\bigcap C_{\mu_{1,3}}(\overline{G}\setminus\{0\})$ со свойствами (4.2)–(4.3). В итоге мы получаем, что для любой $\Phi \in H(G)\bigcap C(\overline{G})$ существует функция $w(z)$ вида (4.1), которая является в G решением уравнения (4.1).

3-й шаг. Подбираем такую голоморфную в G функцию $\hat{\Phi} \in C(\overline{G})$, чтобы для функции $w = \hat{\Phi}\cdot\exp\omega$, где ω— функция 2-го шага, выполнялись граничные условия (1.3). Для этого рассмотрим отображение

$$\omega \to \hat{\Phi},$$

где

$$\Re\hat{\Phi} = \Re(w\cdot\exp(-\omega)) = \exp(-\Re\omega)\cdot g(z) = g_1(z), z\in\partial G,$$

$$\Im\hat{\Phi} = \exp(-\Re\omega(z_0=1))\cdot\Im w(z_0=1) = h.$$

Заметим, что $g_1(z) \in C_{\mu_{1,3}}(\partial G)$. Таким образом, подбираем голоморфную в G функцию $\hat{\Phi}$, так, чтобы

$$\Re\hat{\Phi}\Big|_{\partial G} = g_1(z),\ \Im\hat{\Phi}\Big|_{z_0=1} = h.$$

Такая функция по теореме 6 существует, причём единственная. Кроме того, $\hat{\Phi}(z) \in C_{\mu_{1,5}}(\overline{G})$.

Для доказательства существования решения изучаем отображение

$$K : \Phi \in H(G)\bigcap C(\overline{G}) \to \omega = K_1(\Phi) \to \hat{\Phi} = K_2(\omega), \hat{\Phi} = K(\Phi),$$

где $\omega = K_1(\Phi)$— неподвижная точка для $\omega = F_1(\omega,\Phi)$, $\hat{\Phi}$— решение приведённой выше задачи Дирихле. Применяя теорему Шаудера о неподвижной точке к отображению $\hat{\Phi} = K(\Phi)$, как и в [7], получаем доказательство существования решения (1.2)–(1.3).

4-й шаг. Как и в [7], доказывается единственность решения (1.2)–(1.3) в классе решений в смысле функций Соболева из $C(\overline{G})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* М.: Наука. 1988. 512 с.
2. Михайлов Л.Г. *Новый класс интегрируемых уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами.* Душанбе, 1963. 183 с.
3. Усманов З.Д. *Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой.* Душанбе, 1993. 245 с.
4. Тунгатаров А. *К теории уравнений Карлемана–Векуа с сингулярной точкой* // Математический сборник. Т. 184, № 3, 1993. С. 111–120.
5. N. Bliev *Generalized analytic functions in fractional spaces.* Longman, Harlow, 1997.
6. Абдыманапов С.А., Тунгатаров А.Б. *Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами.* Алматы: Гылым, 2005.
7. M. Reissig, A. Timofeev *Dirichlet problems for generalized Cauchy–Riemann systems with singular coefficients* // Complex variables. 2005. Vol. 73, № 1-2. P. 653–672.
8. Тимофеев А.Ю. *Весовые пространства в теории обобщенных уравнений Коши–Римана* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2. № 1. С. 117–125.
9. R.A. Devore, G.G. Lorentz, *Constructive Approximation. Grundlehren der Mathemat. Wissenschaften.* Berlin–Heidelberg–New York: Springen Verlag, 1993. 451 p.

10. Ильчуков А.С., Тимофеев А.Ю. *Задача Дирихле для голоморфных функций в пространствах функций, описываемых поведением модуля непрерывности* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 1. С. 58–65.
11. W. Tutschke *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Klassische, funktionalanalytische und komplexe Methoden.* Leipzig: Teubner-Texte zur Mathematik, 1978. 193 p.
12. Напалков В.В., Тимофеев А.Ю. *Задача Дирихле для голоморфных функций в обобщенных пространствах Гельдера* // Доклады Академии наук. 2010. Т. 432, № 3. С. 1–3.

Алексей Юрьевич Тимофеев
Сыктывкарский государственный университет
Октябрьский проспект, 55,
167001, г. Сыктывкар, Россия