

НЕПРИВОДИМЫЕ ПОЛИНОМЫ В ЗАДАЧЕ О СОВЕРШЕННОМ КУБОИДЕ

Р.А. ШАРИПОВ

Аннотация. Найдена связь задачи о построении совершенного кубоида с некоторым классом полиномов от одной переменной, зависящих от трёх целочисленных параметров a , b и u . Неприводимость этих полиномов над кольцом целых чисел при определённых ограничениях на параметры a , b , и u достаточна для доказательства несуществования совершенных кубоидов. В данной работе такая неприводимость сформулирована в виде гипотез, которые проверены численным счётом и подтверждены примерно для 10 000 различных комбинаций числовых параметров a , b и u .

Ключевые слова: кубоид Эйлера, совершенный кубоид, неприводимые полиномы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Кубоид Эйлера — это прямоугольный параллелепипед, все ребра и диагонали на гранях которого имеют целочисленную длину. Совершенный кубоид — это кубоид Эйлера, длина пространственной диагонали которого тоже целочисленна. Кубоиды с целочисленными рёбрами и диагоналями на гранях были известны до Эйлера (см. [1] и [2]). Однако, благодаря Леонарду Эйлеру (см. [3]) задача о целочисленных кубоидах приобрела статус, а сами такие кубоиды были названы его именем.

Что касается совершенных кубоидов, ни один из них до сих пор не известен. Задача нахождения совершенных кубоидов или доказательства их несуществования — это открытая математическая проблема. Она имеет длинную историю, которая отражена в работах [4–34].

В работе [35] задача построения совершенного кубоида была сведена к следующему диофантовому уравнению порядка 12 от переменных a , b , c и u :

$$\begin{aligned}
 & u^4 a^4 b^4 + 6 a^4 u^2 b^4 c^2 - 2 u^4 a^4 b^2 c^2 - 2 u^4 a^2 b^4 c^2 + 4 u^2 b^4 a^2 c^4 + \\
 & + 4 a^4 u^2 b^2 c^4 - 12 u^4 a^2 b^2 c^4 + u^4 a^4 c^4 + u^4 b^4 c^4 + a^4 b^4 c^4 + \\
 & + 6 a^4 u^2 c^6 + 6 u^2 b^4 c^6 - 8 a^2 b^2 u^2 c^6 - 2 u^4 a^2 c^6 - 2 u^4 b^2 c^6 - \\
 & - 2 a^4 b^2 c^6 - 2 b^4 a^2 c^6 + u^4 c^8 + b^4 c^8 + a^4 c^8 + 4 a^2 u^2 c^8 + \\
 & + 4 b^2 u^2 c^8 - 12 b^2 a^2 c^8 + 6 u^2 c^{10} - 2 a^2 c^{10} - 2 b^2 c^{10} + c^{12} = 0.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

R.A. SHARIPOV, PERFECT CUBOIDS AND IRREDUCIBLE POLYNOMIALS.

© ШАРИПОВ Р.А. 2012.

Поступила 2 сентября 2011 г.

Точнее результат работы [35] формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Совершенный кубоид существует тогда и только тогда, когда диофантового уравнение (1.1) имеет решение, такое, что a, b, c, u — четыре положительных целых числа, удовлетворяющих неравенствам $a < c, b < c, u < c, (a + c)(b + c) > 2c^2$.*

Более простое уравнение, связанное с совершенными кубоидами было выведено в [18] (см. также [27]). Но наша цель в данной работе — изучить уравнение (1.1) (поскольку оно новое) и получить результаты, заявленные в аннотации.

2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ КУБОИДЫ

Рациональный кубоид — это прямоугольный параллелепипед, длины рёбер которого выражаются рациональными числами. Если длины диагоналей на гранях также рациональны — это рациональный кубоид Эйлера. Наконец, если длина пространственной диагонали тоже рациональное число, то мы получаем совершенный кубоид. Легко видеть, что каждый рациональный кубоид Эйлера можно преобразовать в кубоид Эйлера с целочисленными рёбрами и диагоналями на гранях. В случае совершенного кубоида (как целочисленного, так и рационального) всякий такой кубоид можно преобразовать в совершенный рациональный кубоид с единичной пространственной диагональю (см. [35]). И наоборот, всякий совершенный рациональный кубоид с единичной пространственной диагональю можно преобразовать в совершенный кубоид с целочисленными рёбрами и диагоналями. Поэтому, говоря о совершенных рациональных кубоидах, ниже мы по умолчанию считаем их пространственную диагональ единичной.

3. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЁБЕР И ДИАГОНАЛЕЙ НА ГРЯНЯХ

Заметим, что уравнение (1.1) однородно по отношению к переменным a, b, c и u . Поскольку $c > 0$ в теореме 1.1, мы можем ввести переменные

$$\alpha = \frac{a}{c}, \quad \beta = \frac{b}{c}, \quad v = \frac{u}{c}. \quad (3.1)$$

В переменных (3.1) уравнение (1.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} & v^4 \alpha^4 \beta^4 + (6 \alpha^4 v^2 \beta^4 - 2 v^4 \alpha^4 \beta^2 - 2 v^4 \alpha^2 \beta^4) + (4 v^2 \beta^4 \alpha^2 + \\ & + 4 \alpha^4 v^2 \beta^2 - 12 v^4 \alpha^2 \beta^2 + v^4 \alpha^4 + v^4 \beta^4 + \alpha^4 \beta^4) + (6 \alpha^4 v^2 + 6 v^2 \beta^4 - \\ & - 8 \alpha^2 \beta^2 v^2 - 2 v^4 \alpha^2 - 2 v^4 \beta^2 - 2 \alpha^4 \beta^2 - 2 \beta^4 \alpha^2) + (v^4 + \beta^4 + \\ & + \alpha^4 + 4 \alpha^2 v^2 + 4 \beta^2 v^2 - 12 \beta^2 \alpha^2) + (6 v^2 - 2 \alpha^2 - 2 \beta^2) + 1 = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Отметим, что переменные a, b, c и u в (1.1) не являются ни рёбрами, ни диагоналями совершенного кубоида, — это просто параметры. Через них, в соответствии с формулами (3.1), выражаются рациональные параметры α, β и v в (3.2). А рёбра и диагонали на гранях совершенного кубоида выражаются через α, β и v . Обозначим через x_1, x_2 и x_3 рёбра такого кубоида, а через d_1, d_2 и d_3 — его диагонали на гранях:

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = (d_3)^2, \quad (x_2)^2 + (x_3)^2 = (d_1)^2, \quad (x_3)^2 + (x_1)^2 = (d_2)^2. \quad (3.3)$$

Тогда x_1 и d_1 выражаются через параметр v :

$$x_1 = \frac{2v}{1+v^2}, \quad d_1 = \frac{1-v^2}{1+v^2}. \quad (3.4)$$

Обозначим через z следующий вспомогательный параметр:

$$z = \frac{(1+v^2)(1-\beta^2)(1+\alpha^2)}{2(1+\beta^2)(1-\alpha^2 v^2)}. \quad (3.5)$$

После этого рёбра x_2 и x_3 выражаются формулами

$$x_2 = \frac{2z(1-v^2)}{(1+v^2)(1+z^2)}, \quad x_3 = \frac{(1-v^2)(1-z^2)}{(1+v^2)(1+z^2)}, \quad (3.6)$$

а диагонали на гранях d_2 и d_3 задаются следующими формулами:

$$d_2 = \frac{(1+v^2)(1+z^2) + 2z(1-v^2)}{(1+v^2)(1+z^2)} \beta, \quad (3.7)$$

$$d_3 = \frac{2(v^2 z^2 + 1)}{(1+v^2)(1+z^2)} \alpha.$$

Формулы (3.4), (3.5), (3.6) и (3.7) взяты из [35]. Их можно проверить прямыми вычислениями. Действительно, второе равенство (3.3) превращается в тождество в силу формул (3.6). Помимо уравнений (3.3) совершенный кубоид характеризуется равенствами

$$(x_1)^2 + (d_1)^2 = 1, \quad (x_2)^2 + (d_2)^2 = 1, \quad (x_3)^2 + (d_3)^2 = 1. \quad (3.8)$$

Они означают, что длина пространственной диагонали кубоида равна единице. Первое из равенств (3.8) превращается в тождество в силу формул (3.4).

Итак, второе равенство (3.3) и первое равенство (3.8) обращаются в тождества. Остальные четыре равенства (3.3) и (3.8) тоже превращаются в тождества в силу (3.4), (3.5), (3.6) и (3.7), но с учётом уравнения (3.2).

4. ОБРАТНО К ЦЕЛЫМ ЧИСЛАМ

Уравнение (1.1) однородно по входящим в него переменным. Поэтому, в силу (3.1) и в силу теоремы 1.1, параметры a , b , c и u в уравнении (1.1) можно считать четвёркой положительных взаимно простых целых чисел, т. е. их наибольший общий делитель равен единице:

$$\text{НОД}(a, b, c, u) = 1. \quad (4.1)$$

Обозначим через m наибольший общий делитель чисел a , b и u :

$$\text{НОД}(a, b, u) = m. \quad (4.2)$$

Тогда из (4.1) и (4.2) выводится равенство

$$\text{НОД}(m, c) = 1, \quad (4.3)$$

т. е. m и c взаимно просты. В силу (4.2) и (4.3), дроби a/m , b/m и u/m упрощаются до целых чисел, а дробь c/m оказывается несократимой дробью, если $m \neq 1$. Формулу (3.1)

можно переписать в терминах этих дробей:

$$\alpha = \frac{a/m}{c/m}, \quad \beta = \frac{b/m}{c/m}, \quad v = \frac{u/m}{c/m}. \quad (4.4)$$

Опираясь на (4.4), мы можем поменять переменные следующим образом:

$$\frac{a}{m} \rightarrow a, \quad \frac{b}{m} \rightarrow b, \quad \frac{u}{m} \rightarrow u, \quad \frac{c}{m} \rightarrow t. \quad (4.5)$$

После введения новой переменной $t = c/m$ и обновления переменных a , b и u согласно (4.5) формулы (4.4) записываются как

$$\alpha = \frac{a}{t}, \quad \beta = \frac{b}{t}, \quad v = \frac{u}{t}, \quad (4.6)$$

а уравнение (1.1) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} & t^{12} + (6u^2 - 2a^2 - 2b^2)t^{10} + (u^4 + b^4 + a^4 + 4a^2u^2 + \\ & + 4b^2u^2 - 12b^2a^2)t^8 + (6a^4u^2 + 6u^2b^4 - 8a^2b^2u^2 - \\ & - 2u^4a^2 - 2u^4b^2 - 2a^4b^2 - 2b^4a^2)t^6 + (4u^2b^4a^2 + \\ & + 4a^4u^2b^2 - 12u^4a^2b^2 + u^4a^4 + u^4b^4 + a^4b^4)t^4 + \\ & + (6a^4u^2b^4 - 2u^4a^4b^2 - 2u^4a^2b^4)t^2 + u^4a^4b^4 = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Что же касается формулы (4.2), для обновлённых согласно (4.5) переменных a , b и u эта формула даёт соотношение

$$\text{НОД}(a, b, u) = 1. \quad (4.8)$$

Формула (4.8) означает, что величины a , b и u в (4.6) и (4.7) взаимно просты.

Отметим, что уравнение (4.7) совпадает с исходным уравнением (1.1), но переменная c в нём заменена на t , а слагаемые перегруппированы так, как это принято делать в полиноме от одной переменной t . Теорема 1.1 теперь переформулируется так.

Теорема 4.1. *Совершенный кубоид существует тогда и только тогда, когда для некоторых трёх положительных взаимно простых целых чисел a , b , u полиномиальное уравнение (4.7) имеет рациональное решение t , удовлетворяющее неравенствам $t > a$, $t > b$, $t > u$, $(a+t)(b+t) > 2t^2$.*

5. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Обозначим через $P_{abu}(t)$ полином в левой части уравнения (4.7). Обозначив этот полином таким образом, мы понимаем его как полином от одной переменной t , а переменные a , b и u считаем параметрами:

$$\begin{aligned} P_{abu}(t) = & t^{12} + (6u^2 - 2a^2 - 2b^2)t^{10} + (u^4 + b^4 + a^4 + 4a^2u^2 + \\ & + 4b^2u^2 - 12b^2a^2)t^8 + (6a^4u^2 + 6u^2b^4 - 8a^2b^2u^2 - \\ & - 2u^4a^2 - 2u^4b^2 - 2a^4b^2 - 2b^4a^2)t^6 + (4u^2b^4a^2 + \\ & + 4a^4u^2b^2 - 12u^4a^2b^2 + u^4a^4 + u^4b^4 + a^4b^4)t^4 + \\ & + (6a^4u^2b^4 - 2u^4a^4b^2 - 2u^4a^2b^4)t^2 + u^4a^4b^4. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Полином (5.1) симметричен относительно параметров a и b , т. е.

$$P_{abu}(t) = P_{bau}(t). \quad (5.2)$$

Для изучения полинома $P_{abu}(t)$ мы рассмотрим некоторые частные случаи:

$$\begin{array}{lll} 1) \ a = b; & 3) \ bu = a^2; & 5) \ a = u; \\ 2) \ a = b = u; & 4) \ au = b^2; & 6) \ b = u. \end{array} \quad (5.3)$$

Частный случай $a = b$. В этом частном случае полином $P_{abu}(t) = P_{aa u}(t)$ задаётся следующей формулой:

$$\begin{aligned} P_{aa u}(t) = & t^{12} + (6u^2 - 4a^2)t^{10} + (8a^2u^2 - 10a^4 + u^4)t^8 + \\ & + (4a^4u^2 - 4a^6 - 4u^4a^2)t^6 + (8a^6u^2 + a^8 - 10u^4a^4)t^4 + \\ & + (6a^8u^2 - 4u^4a^6)t^2 + u^4a^8. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Полином (5.4) приводим. Он раскладывается на множители

$$P_{aa u}(t) = (t^2 + a^2)^2 P_{au}(t), \quad (5.5)$$

где полином $P_{au}(t)$ задаётся формулой

$$\begin{aligned} P_{au}(t) = & t^8 + 6(u^2 - a^2)t^6 + (a^4 - 4a^2u^2 + u^4)t^4 - \\ & - 6a^2u^2(u^2 - a^2)t^2 + u^4a^4. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Формулы (5.5) и (5.6) легко доказываются прямыми вычислениями.

Частный случай $a = b = u$. Этот случай соответствует подстановке $a = u$ в формуле (5.6). Если $a = u$, то полином $P_{aa u}(t) = P_{aa}(t)$ приводим:

$$P_{aa}(t) = (t - a)^2 (t + a)^2 (t^2 + a^2)^2. \quad (5.7)$$

В силу условия взаимной простоты (4.8), частный случай $a = b = u$ подходит под условия теоремы 4.1 только при $a = b = u = 1$. При этом, в силу (5.5) и (5.7), уравнение (4.7) выглядит так:

$$(t - 1)^2 (t + 1)^2 (t^2 + 1)^4 = 0. \quad (5.8)$$

Уравнение (5.8) имеет два вещественных рациональных решения $t = -1$ и $t = 1$. Но ни одно из них не подходит под условия теоремы 4.1. Действительно, оба они не удовлетворяют неравенству $t > a$, где $a = 1$.

Итак, подслучай $a = b = u$ случая $a = b$ не даёт совершенных кубоидов. Прочие подслучаи частного случая $a = b$ описываются следующей гипотезой.

Гипотеза 5.1. Для всяких двух положительных взаимно простых целых чисел $a \neq u$ полином $P_{aa u}(t)$ из (5.6) неприводим в кольце полиномов $\mathbb{Z}[t]$.

Частный случай $bu = a^2$. Сопоставляя $bu = a^2$ с (4.8), легко вывести следующее представление для целых чисел a , b и u :

$$a = pq, \quad b = p^2, \quad u = q^2. \quad (5.9)$$

Здесь p и q — это два параметра, два положительных целых числа, которые удовлетворяют

условию взаимной простоты

$$\text{НОД}(p, q) = 1. \quad (5.10)$$

Подставляя (5.9) в (5.1), мы получаем

$$\begin{aligned} P_{pqp^2q^2}(t) = & t^{12} + (6q^4 - 2p^2q^2 - 2p^4)t^{10} + (q^8 + 4p^2q^6 + \\ & + 5p^4q^4 - 12p^6q^2 + p^8)t^8 - 2p^2q^2(q^8 - 2p^2q^6 + 4p^4q^4 - \\ & - 2p^6q^2 + p^8)t^6 + p^4q^4(q^8 - 12p^2q^6 + 5p^4q^4 + 4p^6q^2 + p^8)t^4 + \\ & + q^8p^8(-2q^4 - 2p^2q^2 + 6p^4)t^2 + q^{12}p^{12}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Полином $P_{pqp^2q^2}(t)$ в (5.11) приводим. Действительно, мы имеем разложение

$$P_{pqp^2q^2}(t) = (t - a)(t + a)Q_{pq}(t), \quad (5.12)$$

где $Q_{pq}(t)$ — это следующий полином:

$$\begin{aligned} Q_{pq}(t) = & t^{10} + (2q^2 + p^2)(3q^2 - 2p^2)t^8 + (q^8 + 10p^2q^6 + \\ & + 4p^4q^4 - 14p^6q^2 + p^8)t^6 - p^2q^2(q^8 - 14p^2q^6 + 4p^4q^4 + \\ & + 10p^6q^2 + p^8)t^4 - p^6q^6(q^2 + 2p^2)(-2q^2 + 3p^2)t^2 - q^{10}p^{10}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

В силу (5.12), полином (5.11) имеет два рациональных корня $t = a$ и $t = -a$. Оба эти корня не подходят под условия теоремы 4.1, поскольку они не удовлетворяют неравенству $t > a$.

Прочие корни полинома (5.11) совпадают с корнями полинома $Q_{pq}(t)$ из (5.13). Полином (5.13) приводим при $q = p$. В этом случае мы имеем

$$Q_{pp}(t) = (t - a)(t + a)(t^2 + a^2)^4. \quad (5.14)$$

Формула (5.14) не является неожиданностью. При $q = p$ из (5.9) легко вывести $a = b = u$. А этот случай уже был рассмотрен (см. (5.7) и (5.8)). Из $q = p$ и из (5.10) мы выводим $p = q = 1$ и $a = b = u = 1$.

В случае $p \neq q$ полином (5.13) описывается следующей гипотезой.

Гипотеза 5.2. Для всяких двух положительных взаимно простых целых чисел $p \neq q$ полином $Q_{pq}(t)$ из (5.13) неприводим в кольце полиномов $\mathbb{Z}[t]$.

Частный случай $au = b^2$. Этот частный случай сводится к предыдущему. Действительно, из $au = b^2$ и из (4.8) вытекает

$$a = p^2, \quad b = pq, \quad u = q^2, \quad (5.15)$$

где p и q — два положительных целых числа, удовлетворяющих условию взаимной простоты (5.10). После подстановки в (5.1) формулы (5.15) эквивалентны формулам (5.9) в силу симметрии (5.2). Эти формулы приводят к полиному $P_{p^2pqq^2}(t)$, совпадающему с полиномом (5.11), а далее они приводят к полиному (5.13), который уже рассматривался выше.

Частный случай $a = u$. Этот частный случай довольно прост. В этом случае полином $P_{abu}(t) = P_{ubu}(t)$ в (5.1) приводим, и имеет место формула

$$P_{ubu}(t) = (t^2 + u^2)^4(t - b)^2(t + b)^2. \quad (5.16)$$

Полином (5.16) имеет два вещественных рациональных корня $t = b$ и $t = -b$. Оба они не подходят под условия теоремы 4.1, поскольку не удовлетворяют неравенству $t > b$.

Частный случай $b = u$. Этот частный случай эквивалентен предыдущему в силу симметрии (5.2).

Общий случай, который не покрывается частными случаями, перечисленными в (5.3) и рассмотренными выше, описывается следующей гипотезой.

Гипотеза 5.3. Для всяких трёх положительных взаимно простых целых чисел a , b , u , таких, что ни одно из условий (5.3) не выполнено, полином (5.1) неприводим в кольце полиномов $\mathbb{Z}[t]$.

6. ЧИСЛЕННАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

В настоящее время доказательства гипотез 5.1, 5.2 и 5.3 не известны. По этой причине я исследовал их численно. Для этого был применён пакет Maxima версии 5.21.1 с графической оболочкой wxMaxima 0.85 на платформе Ubuntu 10.10 с ядром Linux 2.5.35-24.

Гипотеза 5.1 была проверена и подтверждена для $1 \leq a \leq 100$ и $1 \leq u \leq 100$. Гипотеза 5.2 была подтверждена для $1 \leq p \leq 100$ и $1 \leq q \leq 100$. А третья гипотеза 5.3 была проверена и подтверждена для $1 \leq a \leq 22$, $1 \leq b \leq 22$ и $1 \leq u \leq 22$. Число 22 выбрано специально, поскольку

$$22^3 = 10\,648 \approx 10\,000 = 100^2.$$

Это равенство означает, что каждая гипотеза была протестирована и подтвердилась для примерно 10 000 различных комбинаций числовых параметров в ней. Совокупный результат вычислений звучит так: уравнение (4.7) не имеет решений, дающих совершенные кубоиды, при всех значениях чисел a , b , u меньших или равных 22.

7. ВЫВОДЫ

Гипотезы 5.1, 5.2 и 5.3 не эквивалентны условию несуществования совершенных кубоидов. Однако, если они верны, то этого достаточно, чтобы доказать, что совершенные кубоиды не существуют. Результаты численной проверки, изложенные выше, свидетельствуют в пользу справедливости этих гипотез.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Halcke P., *Deliciae mathematicae oder mathematisches Sinnen-Confect*, N. Sauer, Hamburg, Germany, 1719.
- Saunderson N., *Elements of algebra*, Vol. 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1740.
- Euler L., *Vollständige Anleitung zur Algebra*, Kayserliche Akademie der Wissenschaften, St. Petersburg, 1771.
- Dickson L. E., *History of the theory of numbers*, Vol. 2: *Diophantine analysis*, Dover, New York, 2005.
- Kraitchik M., *On certain rational cuboids* // Scripta Math., Vol. 11, 1945, P. 317–326.
- Kraitchik M., *Théorie des Nombres*, Tome 3, *Analyse Diophantine et application aux cuboïdes rationnelles*, Gauthier-Villars, Paris, 1947.
- Kraitchik M., *Sur les cuboïdes rationnelles* // Proc. Int. Congr. Math., 1954, Vol. 2, Amsterdam, P. 33–34.
- Bromhead T. B., *On square sums of squares* // Math. Gazette, 1960, Vol. 44, № 349, P. 219–220.
- Lal M., Blundon W. J., *Solutions of the Diophantine equations $x^2 + y^2 = l^2$, $y^2 + z^2 = m^2$, $z^2 + x^2 = n^2$* // Math. Comp., 1966, Vol. 20. P. 144–147.
- Spohn W. G., *On the integral cuboid* // Amer. Math. Monthly, 1972, Vol. 79, № 1, P. 57–59.
- Spohn W. G., *On the derived cuboid* // Canad. Math. Bull., 1974, Vol. 17, № 4, P. 575–577.
- Chein E. Z., *On the derived cuboid of an Eulerian triple* // Canad. Math. Bull., 1977, Vol. 20, № 4, P. 509–510.
- Leech J., *The rational cuboid revisited* // Amer. Math. Monthly, 1977, Vol. 84, № 7, P. 518–533; см. также *Erratum* // Amer. Math. Monthly, 1978, Vol. 85, P. 472.
- Leech J., *Five tables relating to rational cuboids* // Math. Comp., 1978, Vol. 32, P. 657–659.
- Spohn W. G., *Table of integral cuboids and their generators* // Math. Comp., 1979, Vol. 33, P. 428–429.

16. Lagrange J., *Sur le dérivé du cuboide Eulérien* // Canad. Math. Bull., 1979, Vol. 22, №2, P. 239–241.
17. Leech J., *A remark on rational cuboids* // Canad. Math. Bull., 1981, Vol. 24, №3, P. 377–378.
18. Korec I., *Nonexistence of small perfect rational cuboid* // Acta Math. Univ. Comen., 1983, Vol. 42/43, P. 73–86.
19. Korec I., *Nonexistence of small perfect rational cuboid II* // Acta Math. Univ. Comen., 1984, Vol. 44/45, P. 39–48.
20. Wells D. G., *The Penguin dictionary of curious and interesting numbers*, Penguin publishers, London, 1986.
21. Bremner A., Guy R. K., *A dozen difficult Diophantine dilemmas* // Amer. Math. Monthly, 1988, Vol. 95, №1, P. 31–36.
22. Bremner A., *The rational cuboid and a quartic surface* // Rocky Mountain J. Math., 1988, Vol. 18, №1, P. 105–121.
23. Colman W. J. A., *On certain semiperfect cuboids* // Fibonacci Quart., 1988, Vol. 26, №1, P. 54–57; см. также *Some observations on the classical cuboid and its parametric solutions* // Fibonacci Quart., 1988, Vol. 26, №4, P. 338–343.
24. Korec I., *Lower bounds for perfect rational cuboids* // Math. Slovaca, 1992, Vol. 42, №5, P. 565–582.
25. Guy R. K. *Is there a perfect cuboid? Four squares whose sums in pairs are square. Four squares whose differences are square*, в книге *Unsolved Problems in Number Theory*, 2-nd ed., P. 173–181, Springer-Verlag, New York, 1994.
26. Rathbun R. L., Granlund T., *The integer cuboid table with body, edge, and face type of solutions* // Math. Comp., 1994, Vol. 62, P. 441–442.
27. Van Luijk R., *On perfect cuboids*, Doctoraalscriptie, Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht, Utrecht, 2000.
28. Rathbun R. L., Granlund T., *The classical rational cuboid table of Maurice Kraitchik* // Math. Comp., 1994, Vol. 62, P. 442–443.
29. Peterson B. E., Jordan J. H., *Integer hexahedra equivalent to perfect boxes* // Amer. Math. Monthly, 1995, Vol. 102, №1, P. 41–45.
30. Rathbun R. L., *The rational cuboid table of Maurice Kraitchik*, e-print **math.HO/0111229** в электронном архиве <http://arXiv.org>.
31. Hartshorne R., Van Luijk R., *Non-Euclidean Pythagorean triples, a problem of Euler, and rational points on $K3$ surfaces*, e-print **math.NT/0606700** в электронном архиве <http://arXiv.org>.
32. Waldschmidt M., *Open diophantine problems*, e-print **math.NT/0312440** в электронном архиве <http://arXiv.org>.
33. Ionascu E. J., Luca F., Stanica P., *Heron triangles with two fixed sides*, e-print **math.math.NT/0608185** в электронном архиве <http://arXiv.org>.
34. Sloan N. J. A., *Sequences A031173* (<http://oeis.org/A031173>), *A031174* (<http://oeis.org/A031174>), and *A031175* (<http://oeis.org/A031175>), On-line encyclopedia of integer sequences, OEIS Foundation Inc., Portland, USA.
35. Sharipov R. A., *A note on a perfect Euler cuboid*, e-print **arXiv:1104.1716** в электронном архиве <http://arXiv.org>.

Руслан Абдулович Шарипов,
Башкирский Государственный Университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: r-sharipov@mail.ru