

## ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ ТИПЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ПОРЯДКА МЕНЬШЕ ЕДИНИЦЫ С НУЛЯМИ ФИКСИРОВАННЫХ ПЛОТНОСТЕЙ И ШАГА

О.В. ШЕРСТЮКОВА

**Аннотация.** Доказана точная оценка снизу типа целой функции порядка меньше единицы с нулями на луче через плотности и шаг последовательности нулей.

**Ключевые слова:** тип целой функции, нижняя, верхняя плотности и шаг последовательности нулей.

Введем необходимые характеристики и дадим точную постановку задачи. Пусть  $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$  — выписанная в порядке неубывания модулей и стремящаяся к бесконечности последовательность комплексных чисел;  $n_{\Lambda}(R)$  — число элементов из  $\Lambda$ , попавших в круг  $|z| \leq R$ . Для показателя  $\rho > 0$  определяются верхняя и нижняя  $\rho$ -плотности  $\Lambda$ :

$$\overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) := \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{n_{\Lambda}(R)}{R^{\rho}}, \quad \underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) := \underline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{n_{\Lambda}(R)}{R^{\rho}},$$

а также  $\rho$ -шаг этой последовательности:  $h_{\rho}(\Lambda) := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|\lambda_{n+1}|^{\rho} - |\lambda_n|^{\rho})$ . Тип целой функции  $f(z)$  при порядке  $\rho > 0$  является одной из основных характеристик ее роста и задается формулой

$$\sigma_{\rho}(f) := \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |f(z)|.$$

Нас будет интересовать наименьший возможный рост целых функций  $f$  порядка  $\rho \in (0; 1)$  с множеством положительных нулей  $\Lambda_f$ . Точнее говоря, зафиксируем четыре числа  $\rho \in (0; 1)$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha \in [0; \beta]$ ,  $h \in [0; \beta^{-1}]$  и поставим следующую экстремальную задачу. Найти точную нижнюю грань

$$s(\alpha, \beta, h; \rho) := \inf \{ \sigma_{\rho}(f) : \Lambda = \Lambda_f \subset \mathbb{R}_+, \overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \beta, \underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) \geq \alpha, h_{\rho}(\Lambda) \geq h \}. \quad (1)$$

Отметим, что требование  $0 \leq h \leq \beta^{-1}$  в постановке экстремальной задачи не является искусственным. Оно вызвано тем, что всегда выполняется неравенство  $\overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) h_{\rho}(\Lambda) \leq 1$ , которое легко проверить аналогично тому, как это сделано для  $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$  и  $\rho = 1$  в [1].

Задача (1) важна в вопросах комплексного анализа, связанных с полнотой функциональных систем, аналитическим продолжением и др. Начало исследованию таких экстремальных задач положил А.Ю. Попов [2].

Основной результат работы [2] состоит в том, что величина

$$s(\beta; \rho) := \inf \{ \sigma_{\rho}(f) : \Lambda = \Lambda_f \subset \mathbb{R}_+, \overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \beta \}$$

равна  $\beta C(\rho)$ , где  $C(\rho) = \max_{a>0} a^{-\rho} \ln(1+a)$ . Это дает ответ в задаче (1) при  $h = 0$  и  $\alpha = 0$ , так как, очевидно,  $s(0, \beta, 0; \rho) = s(\beta; \rho)$ .

O.V. SHERSTYUKOVA, ON EXTREMAL TYPE OF AN ENTIRE FUNCTION OF ORDER LESS THAN UNITY WITH ZEROS OF PRESCRIBED DENSITIES AND STEP.

© ШЕРСТЮКОВА О.В., 2012.

Поступила 24 декабря 2011 г.

Следующим шагом в решении задачи (1) можно считать недавний результат В.Б.Шерстюкова [3], рассмотревшего случай  $\alpha > 0$  и отыскивавшего величину

$$s(\alpha, \beta; \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda = \Lambda_f \subset \mathbb{R}_+, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha \}.$$

Оказалось, что

$$s(\alpha, \beta; \rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho} + \max_{a>0} \int_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^a \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha \tau^{-\rho}}{1 + \tau} d\tau.$$

Тем самым, задача (1) решена в случае  $h = 0$  при произвольном  $\alpha \in [0; \beta]$ .

Нам предстоит решить задачу (1) в общем случае  $h \in [0; \beta^{-1}]$  и  $\alpha \in [0; \beta]$ . В статье мы доказываем оценку снизу для типа целой функции порядка  $\rho \in (0; 1)$  с нулями на луче и обсуждаем схему построения примера, подтверждающего точность этой оценки.

Итак, пусть

$$\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty, \quad 0 < \lambda_n \nearrow +\infty, \quad \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(R)}{R^\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \beta,$$

$$\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(R)}{R^\rho} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} \geq \alpha, \quad h_\rho(\Lambda) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1}^\rho - \lambda_n^\rho) \geq h > 0.$$

Случай  $\alpha = 0$ ,  $h \in [0; \beta^{-1}]$  рассмотрен нами в работе [4], поэтому в дальнейшем считаем, что  $\alpha > 0$ .

Пусть  $f(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)$  — целая функция порядка  $\rho \in (0; 1)$  с нулевым множеством  $\Lambda_f = \Lambda$ . Как и в работе [3], рассмотрим при фиксированном  $R > 0$  функцию  $\varphi_R(t) = \frac{n_\Lambda(Rt)}{(Rt)^\rho}$ ,  $t > 0$ . Ясно, что в условиях задачи имеем

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \varphi_R(t) = \beta, \quad \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \varphi_R(t) \geq \alpha.$$

В частности, фиксируя произвольно  $\alpha_1 \in (0; \alpha)$  и  $a > 0$ , найдем  $c > 0$  так, чтобы при любых  $R \geq ac$  и  $t \geq c/R$  выполнялось неравенство

$$\varphi_R(t) \geq \alpha_1. \quad (1)$$

Для удобства дальнейшего изложения материала вводим вспомогательную последовательность  $\Omega := (\lambda_n^\rho)_{n=1}^\infty = (\mu_n)_{n=1}^\infty$ . Учитывая условие на  $\rho$ -шаг  $h_\rho(\Lambda)$ , запишем  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) \geq h$ . Отсюда для любого  $h_1 \in (0; h)$  имеем  $\mu_{n+1} - \mu_n > h_1$  при  $n \geq n_0 = n_0(h_1)$  (можно считать, что  $n_0 \geq n_\Lambda(c^\rho)$ ). Оценивая теперь стандартным образом при  $c/R \leq t \leq 1/a$  количество точек последовательности  $\Omega$  на промежутке  $[(Rt)^\rho; (R/a)^\rho]$  с учетом ее шага, получаем

$$n_\Omega((R/a)^\rho) - n_\Omega((Rt)^\rho) \leq \frac{1}{h_1} ((R/a)^\rho - (Rt)^\rho).$$

Поскольку  $n_\Omega(x^\rho) = n_\Lambda(x)$ ,  $x > 0$ , то, переходя обратно от  $\Omega$  к  $\Lambda$ , находим

$$n_\Lambda(R/a) - n_\Lambda(Rt) \leq \frac{R^\rho}{h_1} \left( \frac{1}{a^\rho} - t^\rho \right).$$

Разделив это неравенство на  $(Rt)^\rho$  и обозначив  $\eta = \eta(R) := \varphi_R(1/a)$ , приходим к оценке

$$\eta(at)^{-\rho} - \varphi_R(t) \leq h_1^{-1} ((at)^{-\rho} - 1).$$

Отсюда, полагая  $b := h_1^{-1}$ , окончательно получаем

$$\varphi_R(t) \geq b + (\eta - b)(at)^{-\rho}, \quad t \in [c/R; 1/a]. \quad (2)$$

Для  $t \geq 1/a$  в силу очевидного неравенства  $n_\Lambda(Rt) \geq n_\Lambda(R/a)$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \varphi_R(t) &= \frac{n_\Lambda(Rt)}{(Rt)^\rho} \geq \frac{n_\Lambda(R/a)}{(Rt)^\rho} = \frac{n_\Lambda(R/a)}{(R/a)^\rho} (at)^{-\rho} = \eta (at)^{-\rho}, \text{ т.е.} \\ \varphi_R(t) &\geq \eta (at)^{-\rho}, \quad t \geq 1/a. \end{aligned} \quad (3)$$

Оценка типа целой функции  $f(z)$  основана на интегральном представлении логарифма максимума ее модуля (см. [3]):

$$F(R) := R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |f(z)| = \int_0^{+\infty} \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt.$$

Для упрощения дальнейших выкладок удобно в последнем интеграле сделать замену переменной  $t = 1/\tau$ , что дает

$$F(R) = \int_0^{+\infty} \varphi_R(1/\tau) \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau. \quad (4)$$

Перепишем оценки (2) — (4), полученные при любом  $R \geq ac$ , в промежутках изменения переменной  $\tau$ :

$$\varphi_R(1/\tau) > \alpha_1, \quad \tau \in (0; R/c]; \quad (5)$$

$$\varphi_R(1/\tau) \geq b + (\eta - b)a^{-\rho}\tau^\rho, \quad \tau \in [a; R/c]; \quad (6)$$

$$\varphi_R(1/\tau) \geq \eta a^{-\rho}\tau^\rho, \quad \tau \in (0; a]. \quad (7)$$

Для получения точной оценки снизу интеграла в (5) потребуется разбить промежуток  $(0; R/c]$  на участки, в каждом из которых выбирается наибольшая из правых частей соответствующих неравенств (6) — (8). Обозначая результат такой процедуры наилучшего выбора через  $\psi_R(\tau)$  (предварительно сравнив поочередно оценку (6) с оценками (7) и (8) и найдя точки  $\tau_1 = a(\alpha_1/\eta)^{1/\rho}$ ,  $\tau_2 = a((b - \alpha_1)/(b - \eta))^{1/\rho}$ ), получаем неравенство

$$\varphi_R(1/\tau) \geq \psi_R(\tau), \quad \tau \in (0; R/c], \quad R \geq ac, \quad (8)$$

где

$$\psi_R(\tau) = \begin{cases} \alpha_1, & \tau \in E := (0; \tau_1] \cup (\tau_2; R/c], \\ \eta a^{-\rho}\tau^\rho, & \tau \in (\tau_1; a), \\ b + (\eta - b)a^{-\rho}\tau^\rho, & \tau \in [a; \tau_2]. \end{cases} \quad (9)$$

Промежутки в определении (10) функции  $\psi_R(\tau)$  не пусты при достаточно больших  $R$ . В самом деле, для таких  $R$  справедливо  $\alpha_1 < \eta = \varphi_R(1/a) < b$ , что следует из (6) при  $\tau = a$ , а также из неравенства  $h\beta \leq 1$  и выбора  $h_1$ . Из (5) и (9) при  $R \geq ac$  находим

$$F(R) \geq \int_0^{R/c} \varphi_R(1/\tau) \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau \geq \int_0^{R/c} \psi_R(\tau) \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau.$$

Подставляя в последний интеграл выражение из определения (10), запишем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{R/c} \psi_R(\tau) \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau = \alpha_1 \int_E \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau + \int_{\tau_1}^a \frac{\eta a^{-\rho}}{1+\tau} d\tau \\
& + \int_a^{\tau_2} (b + (\eta - b)a^{-\rho}\tau^\rho) \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau = \alpha_1 \left( \int_0^{+\infty} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} - \int_{R/c}^{+\infty} \right) \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau + \int_{\tau_1}^a \frac{\eta a^{-\rho}}{1+\tau} d\tau \\
& + \int_a^{\tau_2} \frac{b\tau^{-\rho} + (\eta - b)a^{-\rho}}{1+\tau} d\tau = \frac{\pi\alpha_1}{\sin \pi\rho} - \alpha_1 \int_{\tau_1}^a \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau - \alpha_1 \int_a^{\tau_2} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau + o(1) \\
& + \int_{\tau_1}^a \frac{\eta a^{-\rho}}{1+\tau} d\tau + \int_a^{\tau_2} \frac{b\tau^{-\rho} + (\eta - b)a^{-\rho}}{1+\tau} d\tau, \quad R \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Группируя первый интеграл с третьим, а второй с четвертым, приходим к оценке

$$F(R) \geq \frac{\pi\alpha_1}{\sin \pi\rho} + \int_{\tau_1}^a \frac{\eta a^{-\rho} - \alpha_1 \tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau + \int_a^{\tau_2} \frac{(b - \alpha_1)\tau^{-\rho} + (\eta - b)a^{-\rho}}{1+\tau} d\tau + o(1), \quad R \rightarrow +\infty.$$

Перейдем здесь к верхнему пределу по последовательности  $R_j \rightarrow +\infty$ , для которой  $\eta = \eta(R_j) \rightarrow \beta$ . Устремим затем  $\alpha_1$  к  $\alpha$ ,  $h_1$  к  $h$  и учтем непрерывную зависимость величин  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $b$  от своих аргументов. В результате получим, что  $b \rightarrow \frac{1}{h}$ ,  $\tau_1 \rightarrow a(\alpha/\beta)^{1/\rho}$ ,  $\tau_2 \rightarrow a((1 - \alpha h)/(1 - \beta h))^{1/\rho}$ , и при любом  $a > 0$  выполняется

$$\sigma_\rho(f) \geq \overline{\lim}_{R_j \rightarrow +\infty} F(R_j) \geq \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho} + \int_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^a \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha \tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau + \frac{s}{h} \int_a^{av^{1/\rho}} \frac{\nu \tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{1+\tau} d\tau$$

(мы для краткости положили  $s := 1 - \beta h$  и  $\nu := (1 - \alpha h)/(1 - \beta h)$ ). Пользуясь произвольностью параметра  $a > 0$ , окончательно получаем

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho} + \sup_{a>0} \left\{ \int_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^a \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha \tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau + \frac{s}{h} \int_a^{av^{1/\rho}} \frac{\nu \tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{1+\tau} d\tau \right\}. \quad (10)$$

Для завершения доказательства необходимо предъявить пример последовательности  $\Lambda$ , на которой достигается оценка (11). Общий принцип построения таких примеров подробно изложен в [3]. Точки экстремальной последовательности помещаются на промежутки различных типов, каждый из которых отвечает за определенную характеристику распределения последовательности. Конструирование примера в нашем случае в идейном плане ничем не отличается от рассуждений из работы [3], но технически несколько сложнее из-за включения в конструкцию промежутков, обеспечивающих заданный шаг. Детальное обоснование такой конструкции крайне громоздко и заняло бы гораздо больше места, чем доказательство самого неравенства (11), а потому представляется не вполне целесообразным приводить ее здесь.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мандельброт С. *Ряды Дирихле, принципы и методы*. Мир. М. 1973. 171 с.
2. Попов А.Ю. *Наименьший возможный тип при порядке  $\rho < 1$  канонических произведений с положительными нулями заданной верхней  $\rho$ -плотности* // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. №1. 2005. С. 31–36.
3. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *О наименьшем возможном типе целых функций порядка  $\rho \in (0; 1)$  с положительными нулями* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 75. №1. 2011. С. 3–28.
4. Шерстюкова О.В. *О влиянии шага последовательности нулей целой функции порядка меньше единицы на величину ее типа* // Наука в вузах: математика, информатика, физика, образование. МПГУ. М. 2010. С. 192–195.

Ольга Владимировна Шерстюкова,  
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,  
Каширское шоссе, 31,  
115409, Москва, Россия  
E-mail: sherov73@mail.ru