

УДК 517.5

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ

А.С. КРИВОШЕЕВ, О.А. КРИВОШЕЕВА

Аннотация. В работе изучаются вопросы сходимости рядов экспоненциальных мономов, частными случаями которых являются ряды экспонент, ряды Дирихле и степенные ряды. Дается описание пространства коэффициентов рядов экспоненциальных мономов, сходящихся в заданной выпуклой области комплексной плоскости. При одном естественном ограничении на степени мономов приводится полный аналог теоремы Абеля для таких рядов, из которого, в частности, вытекают результаты о продолжении сходимости рядов экспоненциальных мономов. Получен также полный аналог теоремы Коши-Адамара, в котором приводится формула, позволяющая восстанавливать область сходимости указанных рядов по их коэффициентам. Полученные результаты включают в себя как частные случаи все известные ранее результаты, связанные с теоремами Абеля и Коши-Адамара для рядов экспонент, рядов Дирихле и степенных рядов.

Ключевые слова: экспоненциальный моном, выпуклая область, теорема Абеля, теорема Коши-Адамара.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается сходимость рядов экспоненциальных мономов, т.е. рядов вида

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, n_k-1} d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}. \quad (1.1)$$

Исследуется задача описания пространства коэффициентов сходящихся рядов (1.1), характер сходимости этих рядов, описывается область их сходимости и изучается вопрос о продолжении сходимости рядов (1.1).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей $n_k \in \mathbb{N}$. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. Положим

$$m(\Lambda) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{|\lambda_k|}, \quad \sigma(\Lambda) = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln j}{|\xi_j|}, \quad (1.2)$$

где $\{\xi_j\}$ — неубывающая по модулю последовательность, составленная из точек λ_k , причем каждая λ_k встречается в ней ровно n_k раз.

Тематика, связанная с рядами экспоненциальных мономов и их частными случаями — рядами экспонент (т.е. рядами вида (1.1), где $n_k = 1, k \geq 1$), рядами Дирихле ($n_k = 1$ и $\lambda_k > 0$) и рядами Тейлора имеет богатую историю. Их исследование берет свое начало в трудах Тейлора, Коши, Адамара, Абеля и Дирихле. Указанные выше задачи для таких рядов изучались в работах Е. Хилле, Г.Л. Лунца, А.Ф. Леонтьева и других математиков.

A.S. KRIVOSHEEV, O.A. KRIVOSHEEVA, CONVERGENCE OF SERIES OF EXPONENTIAL MONOMIALS.

© КРИВОШЕЕВ А.С., КРИВОШЕЕВА О.А. 2022.

Исследование второго автора выполнено при поддержке конкурса «Молодая математика России».

Поступила 20 сентября 2022 г.

Для рядов (1.1), как и в теории рядов экспонент (в частности, степенных рядов и рядов Дирихле) первоочередными являются задачи описания классов областей сходимости (это включает в себя задачу о продолжении сходимости) и характер сходимости рядов, а также восстановление области сходимости по коэффициентам ряда. В теории степенных рядов первые две задачи решаются при помощи теоремы Абеля, а последняя — при помощи теоремы Коши-Адамара. Для рядов Дирихле имеется аналог теоремы Абеля ([1], гл. 2, лемма 1.1), в котором утверждается, что сходимость ряда Дирихле в одной точке z_0 влечет за собой его сходимость в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} z_0\}$. Если $\sigma(\Lambda) = 0$, то ([1], гл. 2, теорема 1.1) эта сходимость будет абсолютной и равномерной в любой полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} z_0 - \varepsilon\}$. Для рядов Дирихле имеется также полный аналог теоремы Коши-Адамара, в котором при условии $\sigma(\Lambda) = 0$ вычисляется абсцисса сходимости ([1], гл. 2, теорема 1.2).

В случае рядов экспонент полный аналог теоремы Абеля отсутствует. Имеется результат ([3], [1], гл. 2, теорема 2.1) о том, что множество точек абсолютной сходимости ряда экспонент выпукло. Причем на компактных подмножествах внутренности этого множества ряд сходится равномерно ([1], гл. 2, теорема 2.2). Если выполнено условие $\sigma(\Lambda) = 0$, то ([1], гл. 2, теорема 2.3) простая и абсолютная сходимость ряда экспонент в выпуклой области равносильны. Кроме этого для рядов экспонент известен также ([3]–[5] и [2], теорема 3.1.3) аналог теоремы Коши-Адамара. В случае общих рядов вида (1.1) можно отметить лишь результат из работы [6]. Здесь доказывается, что область абсолютной сходимости ряда (1.1) выпуклая, если $m(\Lambda) = 0$.

В работе [7] при условиях $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$ приводится полный аналог теоремы Абеля для рядов (1.1) и в частности, для рядов экспонент. Показывается, что областью сходимости ряда (1.1) является выпуклая область специального вида. Доказывается, что поточечная сходимость ряда (1.1) в этой области эквивалентна его абсолютной сходимости, равномерной сходимости на компактах и даже сходимости в более сильной топологии. Приводится также аналог теоремы Коши-Адамара, который, как частные случаи, содержит все указанные выше подобные результаты.

Недостатком работы [7] является условие $m(\Lambda) = 0$, которое хорошо подходит лишь для случая ограниченной области сходимости ряда (1.1). В случае, когда эта область неограничена, условие $m(\Lambda) = 0$ становится слишком жестким. Цель данной работы — получение результатов, аналогичных результатам работы [7] при более слабом (в случае неограниченной области) ограничении на кратности n_k точек λ_k .

2. ПРОСТРАНСТВО КОЭФФИЦИЕНТОВ СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Символами $B(z, r)$ и $S(z, r)$ обозначим соответственно открытый круг и окружность с центром в точке $z \in \mathbb{C}$ и радиуса $r > 0$. Пусть $M \subset \mathbb{C}$ и \overline{M} — замыкание множества M . Положим

$$H(\varphi, M) = \sup_{z \in M} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}), \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

— опорная функция M и

$$J(M) = \{e^{i\varphi} \in S(0, 1) : h(\varphi, M) = +\infty\}.$$

Отметим, что опорная функция H_M всегда полунепрерывна снизу и является непрерывной внутри интервала, где она ограничена. В частности, если M — ограниченное множество ([8]), то $H(\varphi, M)$ — непрерывная функция. Если множество $\overline{J(M)} \setminus J(M)$ не пусто, то оно состоит из одной или двух точек.

Если D — ограниченная выпуклая область, то $J(D) = \emptyset$. В случае неограниченной выпуклой области возможны следующие ситуации:

- 1) $J(D) = S(0, 1)$, т.е. $D = \mathbb{C}$,

- 2) D — полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}$ и $J(D) = S(0, 1) \setminus \{e^{i\varphi}\}$,
 3) D — полоса $\{z \in \mathbb{C} : b < \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}$ и $J(D) = S(0, 1) \setminus \{e^{i\varphi}, e^{i\varphi+\pi}\}$,

4) в остальных случаях $J(D)$ является дугой единичной окружности, которая опирается на угол раствора не меньше чем π .

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область. Опишем пространство последовательностей коэффициентов $\{d_{k,n}\}_{k=1, n=0}^{\infty, n_k-1}$, при которых в области D сходится ряд (1.1). Через $\mathcal{K}(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ обозначим последовательность выпуклых компактов в области D , которая строго исчерпывает ее, т.е.

$$K_p \subset \operatorname{int} K_{p+1}, \quad p \geq 1, \quad D = \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p. \quad (2.1)$$

Здесь символ int означает внутренность множества. В силу вложения в (2.1) и определения опорной функции для каждого $p \geq 1$ найдется $\alpha_p > 0$ такое, что

$$H(\varphi, K_p)(\varphi) + \alpha_p \leq H(\varphi, K_{p+1}), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (2.2)$$

Положим

$$Q_p(\Lambda) = \{d = \{d_{k,n}\} : \|d\|_p = \sup_{k,n} |d_{k,n}| p^n \exp(r_k H(-\varphi_k, K_p)) < \infty\}, \quad \lambda_k = r_k e^{i\varphi_k},$$

$$Q_{p,0}(\Lambda) = \{d = \{d_{k,n}\} : \|d\|_{p,0} = \sup_{k,n} |d_{k,n}| \exp(r_k H(-\varphi_k, K_p)) < \infty\},$$

$$Q(D, \Lambda) = \bigcap_{p=1}^{\infty} Q_p(\Lambda), \quad Q_0(D, \Lambda) = \bigcap_{p=1}^{\infty} Q_{p,0}(\Lambda).$$

Очевидно, верны неравенства

$$\|d\|_{p,0} \leq \|d\|_p, \quad p \geq 1, \quad \forall d = \{d_{k,n}\}. \quad (2.3)$$

В силу (2.2) для любых $d \in Q(D, \Lambda)$ и $d_0 \in Q_0(D, \Lambda)$ выполнены также неравенства

$$\|d\|_1 \leq \|d\|_2 \leq \dots \leq \|d\|_p \leq \dots, \quad \|d_0\|_{1,0} \leq \|d_0\|_{2,0} \leq \dots \leq \|d_0\|_{p,0} \leq \dots \quad (2.4)$$

Пусть $\bar{\lambda}$ — число комплексно сопряженное с λ . Символом $\Theta(\Lambda)$ обозначим множество пределов всех сходящихся последовательностей вида $\{\bar{\lambda}_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}_{j=1}^{\infty}$. Очевидно, что $\Theta(\Lambda)$ — замкнутое подмножество окружности $S(0, 1)$. Положим

$$m(\Lambda, \mu) = \sup \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_{k_j}}{\lambda_{k_j}},$$

где супремум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k_j}\}$ таким, что $\bar{\lambda}_{k_j}/|\lambda_{k_j}| \rightarrow \mu$. Если $\mu \notin \Theta(\Lambda)$, то, очевидно, верно равенство $m(\Lambda, \mu) = 0$.

Лемма 2.1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и D — выпуклая область. Предположим, что

$$J(D) \cap \Theta(\Lambda) = \overline{J(D)} \cap \Theta(\Lambda), \quad m(\Lambda) < \infty, \quad m(\Lambda, \mu) = 0, \quad \mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(D)}. \quad (2.5)$$

Тогда верны утверждения:

- 1) для каждого $p \geq 1$ существуют $C > 0$ и $m \geq 1$ такие, что

$$p^{n_k} \exp(r_k H(-\varphi_k, K_p)) \leq C \exp(r_k H(-\varphi_k, K_m)), \quad k \geq 1;$$

- 2) для каждого $p \geq 1$ существуют $C > 0$ и $m \geq 1$ такие, что

$$\|d\|_p \leq C \|d\|_{m,0}, \quad \forall d = \{d_{k,n}\};$$

- 3) топологические векторные пространства $Q(D, \Lambda)$ и $Q_0(D, \Lambda)$ совпадают.

Доказательство. Предположим, что утверждение 1 неверно. Тогда для некоторого номера $p \geq 1$ существует подпоследовательность $\{\lambda_{k(m)}\}$ такая, что

$$p^{n_{k(m)}} \exp(r_{k(m)} H(-\varphi_{k(m)}, K_p)) \geq m \exp(r_{k(m)} H(-\varphi_{k(m)}, K_m)), \quad m \geq 1. \quad (2.6)$$

Выберем подпоследовательность $\{\lambda_{k(m(j))}\}$ так, что $\overline{\lambda_{k(m(j))}}/|\lambda_{k(m(j))}|$ сходится к некоторой точке $\mu = e^{-i\varphi_0} \in \Theta(\Lambda)$. Пусть вначале $\mu \notin J(D)$. Тогда в силу первого равенства в (2.5) $\mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(D)}$. В силу же второго равенства из (2.5) имеем: $m(\Lambda, \mu) = 0$. Поэтому найдется j_0 такое, что

$$p^{n_{k(m(j))}} = \exp(n_{k(m(j))} \ln p) \leq \exp(\alpha_p r_{k(m(j))}), \quad j \geq j_0.$$

Отсюда с учетом (2.2) получаем:

$$p^{n_{k(m(j))}} \exp(r_{k(m(j))} H(-\varphi_{k(m(j))}, K_p)) \leq \exp(r_{k(m(j))} H(-\varphi_{k(m(j))}, K_{p+1})), \quad j \geq j_0.$$

Это противоречит (2.6).

Пусть теперь $\mu \in J(D)$. В силу неравенства из (2.5) для некоторого $b > 0$ имеем: $n_k \leq br_k$, $k \geq 1$. Тогда

$$p^{n_{k(m(j))}} \exp(r_{k(m(j))} H(-\varphi_{k(m(j))}, K_p)) \leq \exp(br_{k(m(j))} \ln p + b_p r_{k(m(j))}), \quad j \geq 1, \quad (2.7)$$

где

$$b_p = \max_{z \in K_p} |z|.$$

Поскольку функция $H(\varphi, D)$ полунепрерывна снизу, то существует $\delta > 0$ такое, что

$$H(\varphi, D) > b \ln p + b_p, \quad \varphi \in [\varphi_0 - \delta, \varphi_0 + \delta].$$

Тогда в силу равенства в (2.1) для некоторого номера l имеем:

$$H(\varphi, K_l) \geq b \ln p + b_p, \quad \varphi \in [\varphi_0 - \delta, \varphi_0 + \delta].$$

Отсюда получаем:

$$H(-\varphi_{k(m(j))}, K_l) \geq b \ln p + b_p, \quad j \geq j_1.$$

Это вместе с (2.7) противоречит (2.6).

Таким образом, утверждение 1 верно. Из него следует утверждение 2. Последнее с учетом (2.3) дает нам утверждение 3. Лемма доказана. \square

Замечание 2.1. Предположим, что первое равенство в (2.5) неверно и $m(\Lambda, \mu) > 0$, где μ — точка множества $\overline{J(D)} \cap \Theta(\Lambda)$, которая не принадлежит множеству $J(D) \cap \Theta(\Lambda)$. Тогда все три утверждения из леммы 2.1 неверны. Рассмотрим для примера область $D = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ и последовательность $\Lambda = \{2^k, 2^k\}$. Имеем: $J(D) = S(0, 1) \setminus \{1\}$, $\Theta(\Lambda) = \{1\}$, $m(\Lambda) = m(\Lambda, 1) = 1$. Кроме того, $0 > H(0, K_p) \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что утверждение 1 из леммы 2.1 не выполняется. Пусть $d = \{1, 1, \dots\}$. Тогда $d \in Q_0(D, \Lambda)$ и для достаточно больших номеров p имеет место равенство $\|d\|_p = +\infty$, т.е. $d \in Q(D, \Lambda)$.

Замечание 2.2. Первое равенство в (2.5) используется при доказательстве утверждения 1 только для того, чтобы установить равенство $m(\Lambda, \mu) = 0$, $\mu \notin J(D)$. Если наложить условие $m(\Lambda, \mu) = 0$, $\mu \in \Theta(\Lambda) \setminus J(D)$, то, все три утверждения леммы 2.1 верны вне зависимости от первого условия в (2.5). Таким образом, мы получаем:

Лемма 2.2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и D — выпуклая область. Предположим, что

$$m(\Lambda) < \infty, \quad m(\Lambda, \mu) = 0, \quad \mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(D)}.$$

Тогда верны утверждения:

1) для каждого $p \geq 1$ существуют $C > 0$ и $m \geq 1$ такие, что

$$p^{n_k} \exp(r_k H(-\varphi_k, K_p)) \leq C \exp(r_k H(-\varphi_k, K_m)), \quad k \geq 1;$$

2) для каждого $p \geq 1$ существуют $C > 0$ и $m \geq 1$ такие, что

$$\|d\|_p \leq C \|d\|_{m,0}, \quad \forall d = \{d_{k,n}\};$$

3) топологические векторные пространства $Q(D, \Lambda)$ и $Q_0(D, \Lambda)$ совпадают.

Покажем, что пространство $Q(D, \Lambda)$ совпадает с пространством коэффициентов сходящихся в области D рядов вида (1.1).

Прежде всего, сформулируем два вспомогательных утверждения, которые доказаны в работе [7].

Лемма 2.3. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k e^{-\varepsilon |\lambda_k|}$$

сходится для любого $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma(\Lambda) = 0$.

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, Θ — замкнутое подмножество единичной окружности $S(0, 1)$. Θ — выпуклой оболочкой E называется множество

$$E(\Theta) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) < H(\varphi, E), e^{i\varphi} \in \Theta\}.$$

Отметим, что $\operatorname{int} E \subset E(\Theta)$. В самом деле, пусть $z \in \operatorname{int} E$. Тогда из определения опорной функции следуют неравенства $\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) < H_E(\varphi)$, $e^{i\varphi} \in \Theta$. Это означает, что $z \in E(\Theta)$. Если $\Theta = S(0, 1)$, то Θ -выпуклая оболочка множества совпадает с его обычной выпуклой оболочкой (точнее говоря, с внутренностью этой выпуклой оболочки) и, таким образом, является выпуклой областью. Последнее имеет место и в общем случае.

Лемма 2.4. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, Θ — замкнутое подмножество окружности $S(0, 1)$. Тогда $E(\Theta)$ — выпуклая область.

Лемма 2.5. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $E \subset \mathbb{C}$. Предположим, что

1) общий член ряда (1.1) ограничен на множестве E , т.е.

$$|d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}| \leq A(z) < +\infty, \quad k \geq 1, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad z \in E;$$

2) $m(\Lambda) < \infty$ и $m(\Lambda, \mu) = 0$, $\mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(E)}$;

3) если $\mu = e^{-i\varphi_0} \in \Theta(\Lambda) \cap (\overline{J(E)} \setminus J(E))$ и $m(\Lambda, \mu) > 0$, то существует $b(\varphi_0) \in \mathbb{R}$ такое, что множество $B(\varphi_0) = \{z \in E : \operatorname{Re}(ze^{i\varphi_0}) \geq b(\varphi_0)\}$ неограниченно;

4) если 0 — изолированная точка множества E , то последовательность $\{d_{k,n}\}_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1}$ ограничена.

Тогда $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda)$, где $D = E(\Theta(\Lambda))$.

Доказательство. Предположим, что $d \notin Q(D, \Lambda)$. Тогда $d \notin Q_p$ для некоторого $p \geq 1$, т.е. найдется подпоследовательность $\{d_{k(j), n(j)}\}$ такая, что

$$|d_{k(j), n(j)}| p^{n(j)} \exp(r_{k(j)} H(-\varphi_{k(j)}, K_p)) \rightarrow +\infty, \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\{\overline{\lambda_{k(j)}}/|\lambda_{k(j)}|\}$ сходится к $\mu = e^{-i\varphi_0} \in \Theta(\Lambda)$. Пусть вначале

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n(j)}{|\lambda_{k(j)}|} = 0. \quad (2.9)$$

В силу определения величины $m(\Lambda, \mu)$ для каждого $\varepsilon > 0$ найдется j_0 такое, что

$$n_{k(j)} \leq \varepsilon r_{k(j)}, \quad j \geq j_0. \quad (2.10)$$

Отсюда с учетом (2.2) и (2.8) получаем:

$$|d_{k(j), n(j)}| \exp(r_{k(j)} H(-\varphi_{k(j)}, K_{p+1})) \rightarrow +\infty, \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Поскольку K_{p+2} — компакт в области $D = E(\Theta(\Lambda))$, то из определений множества $E(\Theta(\Lambda))$ и опорной функции следует, что для некоторого $z_0 \in E$ верна оценка: $\operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi_0}) > H(-\varphi_0, K_{p+2})$. Тогда с учетом (2.2) и непрерывности опорной функции компакта найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\operatorname{Re}(z e^{i\varphi}) > H(-\phi, K_{p+2}) \geq H(-\varphi, K_{p+1}) + \alpha_{p+1}, \quad z \in B(z_0, \delta), \quad e^{i\varphi} \in B(e^{i\varphi_0}, \delta). \quad (2.12)$$

Выберем номер $j_1 \geq j_0$ так, что

$$\lambda_{k(j)} / |\lambda_{k(j)}| = e^{i\varphi_{k(j)}} \in B(e^{i\varphi_0}, \delta), \quad j \geq j_1. \quad (2.13)$$

Возможны два случая.

1. Множество $B(z_0, \delta) \cap E$ содержит точку $z_1 \neq 0$.
2. $z_0 = 0$ — изолированная точка множества E .

Рассмотрим первый случай. В силу (2.10)

$$|z_1|^{n(j)} \geq \exp(-\alpha_{p+1} r_{k(j)}), \quad j \geq j_2 \geq j_1.$$

Отсюда с учетом (2.12), (2.13) и (2.11) получаем:

$$|d_{k(j), n(j)}(z_1)^{n(j)} e^{\lambda_{k(j)} z_1}| \geq |d_{k(j), n(j)}| \exp(r_{k(j)} H(-\varphi_{k(j)}, K_{p+1})) \rightarrow +\infty, \quad j \rightarrow \infty.$$

Это противоречит условию 1).

Если $z_0 = 0$ — изолированная точка E , то с учетом (2.11)–(2.13) имеем:

$$|d_{k(j), n(j)}| = |d_{k(j), n(j)} e^{\lambda_{k(j)} z_0}| \geq |d_{k(j), n(j)}| \exp H(-\varphi_{k(j)}, K_{p+1}) \rightarrow +\infty, \quad j \rightarrow \infty.$$

Это противоречит условию 4).

Пусть теперь (2.9) неверно. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n(j)}{|\lambda_{k(j)}|} > 0. \quad (2.14)$$

Согласно условию 2) возможны два случая.

1. $\mu \in J(E)$.
2. $\mu \in \Theta(\Lambda) \cap (\overline{J(E)} \setminus J(E))$.

В силу (2.7) и (2.8) получаем:

$$|d_{k(j), n(j)}| \exp(b r_{k(j)} \ln p + b_p r_{k(j)}) \rightarrow +\infty, \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

Рассмотрим первый случай. Так как $\mu \in J(E)$, то из определений множества $E(\Theta(\Lambda))$ и опорной функции следует, что для некоторого $z_0 \in E$ верна оценка:

$$\operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi_0}) > b \ln p + b_p.$$

Можно считать, что $|z_0| \geq 1$. Выберем $\delta > 0$ такое, что

$$\operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi}) > b \ln p + b_p, \quad e^{i\varphi} \in B(e^{i\varphi_0}, \delta).$$

Тогда с учетом (2.15) имеем:

$$|d_{k(j), n(j)}(z_0)^{n(j)} e^{\lambda_{k(j)} z_0}| \geq |d_{k(j), n(j)}| e^{\lambda_{k(j)} z_0} \rightarrow +\infty, \quad j \rightarrow \infty.$$

Это противоречит условию 1).

Пусть, наконец, $\mu \in \Theta(\Lambda) \cap (\overline{J(E)} \setminus J(E))$. В силу условия 3) леммы множество $B(\varphi_0)$ неограниченно. Следовательно, с учетом (2.14) найдется $z_0 \in E$ такое, что

$$|(z_0)^{n(j)}| \geq \exp((b \ln p + b_p - b(\varphi_0)) r_{k(j)}), \quad j \geq j_3.$$

Отсюда и (2.15) получаем:

$$|d_{k(j), n(j)}(z_0)^{n(j)} e^{\lambda_{k(j)} z_0}| \rightarrow +\infty, \quad j \rightarrow \infty.$$

Это противоречит условию 1). Таким образом, $d \in Q(D, \Lambda)$. Лемма доказана. \square

Замечание 2.3. Условие 4) леммы 2.5 является существенным. В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{2k} z e^{kz}.$$

Здесь $\Theta(\Lambda) = \{1\}$. Пусть $E = \{-2, 0\}$. Тогда $E(\Theta(\Lambda))$ совпадает с полуплоскостью $\operatorname{Re} z < 0$, а общий член ряда ограничен на E . Однако ряд не сходится в этой полуплоскости (он расходится на окружности $S(0, 1)$). Он сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z < -2$, которая совпадает с множеством $E'(\Theta(\Lambda))$, где $E' = \{-2\}$. В этом случае нарушено условие 4) леммы 2.1 (остальные выполнены), и ее утверждение становится неверным.

Лемма 2.6. Пусть D — выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $\sigma(\Lambda) = 0$. Тогда для каждого $p \geq 1$ найдутся $C_p > 0$ и номер $m(p)$ такие, что

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} |d_{k,n}| \sup_{z \in K_p} |z^n e^{z\lambda_k}| \leq C_p \|d\|_{m(p)}, \quad d = \{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda). \quad (2.16)$$

Доказательство. Фиксируем $p \geq 1$. Выберем номер $m(p) > p$ такой, что

$$m(p) \geq b_p = \max_{z \in K_p} |z|.$$

Тогда с учетом (2.2) и определения опорной функции получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} |d_{k,n}| \sup_{z \in K_p} |z^n e^{z\lambda_k}| &\leq \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} |d_{k,n}| (m(p))^n \exp(r_k H(-\varphi_k, K_p)) \\ &\leq \|d\|_{m(p)} \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} \exp(r_k (H(-\varphi_k, K_p) - H(-\varphi_k, K_{m(p)}))) \\ &\leq \|d\|_{m(p)} \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} \exp(-r_k \alpha_p). \end{aligned}$$

Отсюда и леммы 2.3 следует (2.16). Лемма доказана. \square

Теорема 2.1. Пусть D — выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Предположим, что $\sigma(\Lambda) = 0$, $m(\Lambda) < \infty$ и $m(\Lambda, \mu) = 0$, $\mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(D)}$. Тогда эквивалентны утверждения:

- 1) Ряд (1.1) сходится в области D .
- 2) Имеет место включение $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda)$.

Доказательство. Пусть выполнено 1). Положим $E = D$. В силу сходимости ряда (1.1) в области D выполнено условие 1) леммы 2.5. Согласно условию теоремы выполнено также условие 2) леммы 2.5. Поскольку $E = D$ — выпуклое множество, то оно не имеет изолированных точек. Поэтому условие 4) леммы 2.5 выполнено тривиально. Докажем, что выполнено также и условие 3) леммы 2.5.

Пусть $\mu = e^{-i\varphi_0} \in \overline{J(D)} \setminus J(D)$ и $b(\varphi_0) < H(-\varphi_0, D)$. Согласно определению опорной функции найдем точку $z_0 \in D$ такую, что

$$\operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi_0}) > b(\varphi_0).$$

Поскольку $\mu \in \overline{J(D)} \setminus J(D)$, то μ является граничной точкой открытой дуги $\gamma \subset S(0, 1)$ раствора π , которая целиком лежит на множестве $J(D)$. Пусть для определенности

$$\gamma = \{e^{-i\varphi} : \varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + \pi)\}.$$

Рассмотрим луч $z_t = z_0 + te^{-i(\varphi_0 + \pi/2)}$, $t > 0$. Имеем:

$$\operatorname{Re}(z_t e^{i\varphi_0}) = \operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi_0}) + \operatorname{Re}(te^{-i\pi/2}) = \operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi_0}) > b(\varphi_0). \quad (2.17)$$

Так как $\gamma \subset J(D)$, то

$$\operatorname{Re}(z_t e^{i\varphi}) < H(-\varphi, D) = +\infty, \quad \varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + \pi).$$

Кроме того, поскольку $z_0 \in D$, то

$$\operatorname{Re}(z_t e^{i\varphi}) = \operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi}) + t \operatorname{Re}(e^{-i(\varphi_0 + \pi/2 - \varphi)}) \leq \operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi}) < H(-\varphi, D), \quad \varphi \in [\varphi_0 - \pi, \varphi_0].$$

Из последних неравенств следует, что

$$\operatorname{Re}(z_t e^{i\varphi}) < H(-\varphi, D), \quad t > 0, \quad \varphi \in [\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi],$$

т.е. $z_t \in D$, $t > 0$. Вместе с (2.17) это означает, что множество $B(\varphi_0)$ неограниченно.

Таким образом, все условия леммы 2.5 выполнены. Тогда согласно этой лемме $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D(\Theta(\Lambda)), \Lambda)$. Поскольку D — выпуклая область, то

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) < H(\varphi, D), \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Поэтому $D \subset D(\Theta(\Lambda))$. Тогда из определения $Q(D, \Lambda)$ легко получаем вложение

$$Q(D(\Theta(\Lambda))) \subset Q(D, \Lambda).$$

Следовательно, $d \in Q(D, \Lambda)$.

Пусть теперь выполнено 2). Тогда по лемме 2.6 ряд (1.1) сходится на любом компакте области D , а значит и в самой области D . Теорема доказана. \square

Замечание 2.4. Согласно теореме 2.7 и лемме 2.6 при выполнении условий этой теоремы поточечная сходимость ряда (1.1) в области D эквивалентна его абсолютной и равномерной сходимости на компактах этой области.

3. АНАЛОГ ТЕОРЕМ АБЕЛЯ И КОШИ-АДАМАРА ДЛЯ РЯДОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ

Следующий результат является аналогом теоремы Абеля для ряда (1.1).

Теорема 3.1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $E \subset \mathbb{C}$. Предположим, что

1) общий член ряда (1.1) ограничен на множестве E , т.е.

$$|d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}| \leq A(z) < +\infty, \quad k \geq 1, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad z \in E;$$

2) $\sigma(\Lambda) = 0$, $m(\Lambda) < \infty$ и $m(\Lambda, \mu) = 0$, $\mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(E)}$;

3) если $\mu = e^{-i\varphi_0} \in \Theta(\Lambda) \cap (\overline{J(E)} \setminus J(E))$ и $m(\Lambda, \mu) > 0$, то существует $b(\varphi_0) \in \mathbb{R}$ такое, что множество $B(\varphi_0) = \{z \in E : \operatorname{Re}(ze^{i\varphi_0}) \geq b(\varphi_0)\}$ неограниченно;

4) если 0 — изолированная точка множества E , то последовательность $\{d_{k,n}\}_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1}$ ограничена.

Тогда для каждого $p \geq 1$ найдутся $C_p > 0$ и номер $m(p)$ такие, что

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} |d_{k,n}| \sup_{z \in K_p} |z^n e^{z\lambda_k}| \leq C_p \|d\|_{m(p)}, \quad d = \{d_{k,n}\} \in Q(D, \Lambda),$$

где $D = E(\Theta(\Lambda))$, $\{K_p\} = \mathcal{K}(D)$. В частности, ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из области D .

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда по лемме 2.5 $d \in Q(D, \Lambda)$. Следовательно, по лемме 2.6 верно (2.16). В частности, это означает, что ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из области D . Теорема доказана. \square

Замечание 3.1. Пусть E — область сходимости ряда (1.1). Из теоремы 3.1 следует, что в ее условиях внутренность множества E всегда является выпуклой и даже $\Theta(\Lambda)$ — выпуклой областью, т.е. областью вида

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) < H(\varphi), e^{i\varphi} \in \Theta(\Lambda)\},$$

где $H(\varphi)$ — полунепрерывная снизу функция.

Замечание 3.2. Если из теоремы 3.1 изъять условие $\sigma(\Lambda) = 0$, то ее утверждение становится неверным. В подтверждение этого рассмотрим ряд из книги [1]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{\lambda_k z}, \quad \lambda_k = \ln \ln k, \quad k \geq 1. \quad (3.1)$$

Он сходится как знакопередающийся ряд для всех $z = x < 0$ и расходится в точке $z = 0$. Все условия теоремы 3.1, за исключением условия $\sigma(\Lambda) = 0$, выполнены. В нашем случае $\sigma(\Lambda) = +\infty$. Если бы утверждение теоремы 3.1 было верным, то ряд (3.1) абсолютно сходился бы в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$. Однако для любого $x > 0$ и всех достаточно больших номеров k имеем:

$$|e^{\lambda_k x}| = \frac{1}{(\ln k)^x} > \frac{1}{k},$$

т.е. ряд (3.1) абсолютно расходится на отрицательной вещественной полуоси.

Замечание 3.3. Условие $m(\Lambda, \mu) = 0$, $\mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(E)}$ также существенно. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{2k} z^{2k-1} e^{kz}.$$

Нетрудно показать, что этот ряд сходится в некоторой области, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Re} z < -a$, где $a > 1$ выбрано из условия $a > 2(2 \ln a + 1)$, и в круге $B(0, r)$, где $r \in (0, 1)$ такое, что $-2^{-1} 2 \ln r > 3$. В то же время он, очевидно, расходится на окружности $S(0, 1)$. Таким образом, внутренность множества сходимости данного ряда не является выпуклой областью и даже просто областью (она несвязна).

Теорема 3.1 является аналогом теоремы Абеля для степенных рядов, которые являются частными случаями рядов экспонент. Однако, если переформулировать теорему 3.1 для этого частного случая, то в результате получится более слабое утверждение, чем теорема Абеля. Это объясняется тем, что круги, на которых должен абсолютно и равномерно сходиться степенной ряд, при указанном преобразовании переходят в неограниченные множества. В теореме же 3.1 равномерная сходимость гарантируется лишь на компактных подмножествах. Существенно усложнив доказательство этой теоремы, можно показать, что ряд (1.1) все-таки будет равномерно сходиться в некоторых случаях и на неограниченных множествах. Однако эти множества не всегда будут содержать образы кругов при преобразовании переменной, переводящем степенной ряд в ряд экспонент. Рассмотрим ряд

$$\sum (e^{kz} + ze^{kz}). \quad (3.2)$$

Пусть $E = \{0\}$. Имеем: $\Theta(\Lambda) = \{1\}$. По теореме 3.1 ряд (3.2) сходится в области $E(\Theta(\Lambda)) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ и равномерно на ее компактах. Можно показать, что ряд (3.2) сходится равномерно и на некоторых неограниченных множествах (например, на углах раствора строго меньше π с вершинами, принадлежащими отрицательной вещественной полуоси). Но он не сходится равномерно ни в какой полуплоскости вида $\Pi(a) = \{z : \operatorname{Re} z < -a\}$, $a > 0$. Рассмотрим теперь ряд

$$\sum e^{kz}. \quad (3.3)$$

Он получается из степенного ряда $\sum w^k$ при помощи преобразования $w = e^z$. Последний сходится в круге $B(0, 1)$, а по теореме Абеля он сходится равномерно в любом круге меньшего радиуса. Эти круги при указанном преобразовании переходят в полуплоскости $\Pi(a)$. Следовательно, ряд (3.2) сходится равномерно в каждой из этих полуплоскостей. Такое отличие в множествах равномерной сходимости у рядов (3.2) и (3.3) связано с наличием множителей z в ряде (3.2). Сохраняя подобные множители, нельзя доказать теорему типа теоремы 3.1 так, чтобы ее частным случаем была теорема Абеля для степенных рядов. Однако эту ситуацию можно исправить, отказавшись от сомножителей z^n в ряде (1.1), т.е. рассматривая лишь «чистые» ряды экспонент, что и подтверждается следующим результатом из работы [7].

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, Θ — замкнутое подмножество $S(0, 1)$. Положим

$$E(\Theta, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) < H(\varphi, E), e^{i\varphi} \in \Theta\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Отметим, что в случае, когда Θ лежит в некотором угле с вершиной в нуле раствора не больше π множество $E(\Theta, \varepsilon)$ для достаточно малого $\varepsilon \geq 0$ является неограниченным.

Теорема 3.2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}$, $\sigma(\Lambda) = 0$, $E \subset \mathbb{C}$ и Θ — замкнутое подмножество $S(0, 1)$ такое, что

$$\overline{\lambda_k}/|\lambda_k| \in \Theta, \quad k \geq k_0.$$

Предположим, что общий член ряда (1.1) равномерно ограничен на множестве E , т.е.

$$|d_k e^{\lambda_k z}| \leq A, \quad k \geq 1, \quad z \in E. \quad (3.4)$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $c(\varepsilon, \Lambda) > 0$ такое, что

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k e^{\lambda_k z}| \leq Ac(\varepsilon, \Lambda), \quad z \in E(\Theta, \varepsilon).$$

В частности ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на множестве $E(\Theta, \varepsilon)$.

Замечание 3.4. Рассмотрим ряд экспонент

$$\sum d_k e^{kz}, \quad (3.5)$$

в который переходит степенной ряд $\sum d_k w^k$ при преобразовании $w = e^z$. В этом случае $\sigma(\Lambda) = 0$ и для каждого $k \geq 1$ верно включение $\lambda_k/|\lambda_k| \in \Theta = \{1\}$. Пусть $E = \{z_0\}$ и верно (3.4). Тогда по теореме 3.2 ряд (3.5) сходится абсолютно и равномерно на множестве $E(\Theta, \varepsilon) = \{z : \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} z_0 - \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Это дает нам теорему Абеля для степенного ряда.

В теореме Коши-Адамара приводится формула для вычисления радиуса сходимости степенного ряда. Аналогом круга для рядов экспонент является полуплоскость (в нее переходит круг при преобразовании $w = e^z$). Аналог радиуса круга — расстояние от начала координат до полуплоскости. Если $\Theta(\Lambda)$ состоит из двух точек, то соответствующая $\Theta(\Lambda)$ -выпуклая область сходимости ряда (1.1) является пересечением двух полуплоскостей. У этой области уже два «радиуса сходимости» — расстояния от начала координат до двух прямых, являющихся границами этих полуплоскостей. Если же $\Theta(\Lambda)$ — бесконечное множество, то и соответствующих «радиусов сходимости» ряда (1.1) будет бесконечно много. Следует отметить, что некоторые расстояния нужно брать со знаком минус. Такая ситуация возникает в случае, когда область сходимости не содержит начало координат. Рассмотрим ряд

$$\sum 2^k e^{kz}.$$

Применяя к соответствующему ему степенному ряду теорему Абеля, легко установить, что областью его сходимости является полуплоскость $\{z : \operatorname{Re} z < \ln(1/2)\}$. Чтобы не возникало путаницы, «радиусом сходимости» здесь следует считать величину $-\ln 2$, равную

расстоянию от начала координат до прямой, ограничивающей полуплоскость, взятому со знаком минус, а не само расстояние. Поясним сказанное. Рассмотрим еще ряд

$$\sum 2^{-k} e^{kz}.$$

Областью сходимости этого ряда является полуплоскость $\{z : \operatorname{Re} z < \ln 2\}$. Здесь уже «радиус сходимости» равен $\ln 2$, т.е. расстоянию от начала координат до прямой, ограничивающей полуплоскость.

Пусть $e^{i\varphi} \in \Theta(\Lambda)$. Для последовательности коэффициентов d ряда (1.1) положим

$$h_0(d, \varphi) = \inf_{\lambda_{k(j)}} \lim_{j \rightarrow \infty} \min_{0 \leq n \leq n_{k(j)} - 1} \frac{-\ln |d_{k(j),n}|}{r_{k(j)}},$$

$$h(d, \varphi) = \inf_{\{\lambda_{k(j)}\}} \inf_{p \in \mathbb{N}} \lim_{j \rightarrow \infty} \min_{0 \leq n \leq n_{k(j)} - 1} \frac{-(\ln |d_{k(j),n}| + n \ln p)}{r_{k(j)}},$$

где инфимум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k(j)}\}$ таким, что $\overline{\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|} \rightarrow e^{i\varphi}$, $j \rightarrow \infty$. Из определения функции $h(d, \varphi)$ следует, что она является полунепрерывной снизу. Тогда, как и в лемме 2.4, доказанной в работе [7], показывается, что множество

$$D(d, \Lambda) = \{z : \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) < h_0(d, \varphi), e^{i\varphi} \in \Theta(\Lambda)\}$$

является $\Theta(\Lambda)$ — выпуклой областью. Из определения величин $h_0(d, \varphi)$ и $h(d, \varphi)$ следует, что в случаях, когда $m(\Lambda, e^{i\varphi}) = 0$ или $m(\Lambda, e^{i\varphi}) < \infty$ и $h_0(d, \varphi) = +\infty$ верно равенство $h_0(d, \varphi) = h(d, \varphi)$.

Теорема 3.3. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Предположим, что $D(d, \Lambda) \neq \emptyset$,

$$\sigma(\Lambda) = 0, \quad m(\Lambda) < \infty, \quad m(\Lambda, \mu) = 0, \quad \mu \in \Theta(\Lambda) \setminus \overline{J(D(d, \Lambda))}, \quad (3.6)$$

$$h(d, \varphi) > -\infty, \quad e^{i\varphi} \in \Theta(\Lambda) \cap \left(\overline{J(D(d, \Lambda))} \setminus J(D(d, \Lambda)) \right). \quad (3.7)$$

Тогда ряд (1.1) сходится в каждой точке области $D(d, \Lambda)$ и расходится в каждой точке ее внешности $\mathbb{C} \setminus \overline{D(d, \Lambda)}$ за исключением начала координат, если ряд $\sum d_{k,0}$ сходится.

Доказательство. Пусть $\{K_p\} = \mathcal{K}(D)$, где $D = D(d, \Lambda)$. Покажем, что $d \in Q(D, \Lambda)$. Предположим, что это неверно. Тогда для некоторого $p \geq 1$, т.е. найдется подпоследовательность $\{d_{k(j),n(j)}\}$ такая, что выполнено (2.8) и $\{\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|\}$ сходится к $\mu = e^{-i\varphi_0} \in \Theta(\Lambda)$. Пусть вначале верно (2.9). Тогда имеет место соотношение (2.11).

Поскольку K_{p+1} — компакт в области D , то из ее определения следует, что

$$H(-\varphi_0, K_{p+1}) \leq h_0(d, -\varphi_0) - 2\varepsilon$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда согласно определению величины $h_0(d, -\varphi_0)$ найдется номер $j_1 \geq j_0$ такой, что

$$\frac{-\ln |d_{k(j),n(j)}|}{r_{k(j)}} \geq H(-\varphi_0, K_{p+1}) + \varepsilon, \quad j \geq j_1.$$

В силу непрерывности опорной функции компакта можно считать, что

$$H(-\varphi_0, K_{p+1}) + \varepsilon \geq H(-\varphi_{k(j)}, K_{p+1}), \quad j \geq j_1.$$

Тогда

$$\frac{-\ln |d_{k(j),n(j)}|}{r_{k(j)}} \geq H(-\varphi_{k(j)}, K_{p+1}), \quad j \geq j_1.$$

Отсюда получаем:

$$|d_{k(j),n(j)}| \leq \exp(-r_{k(j)} H(-\varphi_{k(j)}, K_{p+1})), \quad j \geq j_1.$$

Это противоречит (2.11).

Пусть теперь (2.9) неверно. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что верно (2.14). Согласно (3.6) возможны два случая.

1. $\mu \in J(D)$.
2. $\mu \in \Theta(\Lambda) \cap (\overline{J(D)} \setminus J(D))$.

Как и в лемме 2.5 верно (2.15). Рассмотрим первый случай. Так как $\mu \in J(D)$, то $h_0(d, -\varphi_0) = +\infty$. Поэтому найдется номер j_2 такой, что

$$\frac{-\ln |d_{k(j),n(j)}|}{r_{k(j)}} \geq b \ln p + b_p, \quad j \geq j_2.$$

Отсюда получаем:

$$|d_{k(j),n(j)}| \leq \exp(-br_{k(j)} \ln p - b_p r_{k(j)}), \quad j \geq j_2.$$

Это противоречит (2.15).

Пусть, наконец, $\mu \in \Theta(\Lambda) \cap (\overline{J(D)} \setminus J(D))$. Из (3.7) и (2.14) следует, что

$$\frac{-\ln |d_{k(j),n(j)}|}{r_{k(j)}} \rightarrow +\infty, \quad j \rightarrow \infty.$$

Это противоречит (2.15).

Таким образом $d \in Q(D, \Lambda)$. Тогда по теореме 2.7 ряд (1.1) сходится в области D .

Пусть теперь $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Если $z = 0$ и ряд $\sum d_{k,0}$ сходится, то ряд (1.1) сходится в точке $z = 0$. Пусть $z \neq 0$. По определению области D найдется $e^{i\varphi} \in \Theta(\Lambda)$ такое, что

$$\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) > h_0(d, \varphi). \quad (3.8)$$

Согласно определению величины $h_0(d, \varphi)$ существует подпоследовательность

$$\overline{\lambda_{k(j)}}/|\lambda_{k(j)}| \rightarrow e^{-i\varphi},$$

для которой

$$h_0(d, -\varphi) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-\ln |d_{k(j),n(j)}|}{r_{k(j)}}. \quad (3.9)$$

Предположим, что ряд (1.1) сходится в точке z . Тогда ряд (1.1) сходится в каждой точке множества $E = \{z\} \cup D$. Поэтому общий член ряда (1.1) ограничен на множестве E . Это дает нам условие 1) леммы 2.5. По построению

$$H(\psi, E) = \max\{H(\psi, D), \operatorname{Re}(ze^{-i\psi})\}, \quad \psi \in [0, 2\pi].$$

Следовательно, $J(D) = J(E)$. Тогда из (3.6) получаем условие 2) леммы 2.5. Условие 3) леммы 2.5 выполнено по тем же соображениям, что и в теореме 2.7. Наконец, условие 4) выполнено тривиально, т.к. множество E имеет единственную изолированную точку $z \neq 0$. Тогда согласно лемме 2.5 $d \in Q(D_0, \Lambda)$, где $D_0 = E(\Theta(\Lambda))$.

В силу (3.8) в области D_0 найдется точка z_0 такая, что

$$\operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi}) > h_0(d, -\varphi). \quad (3.10)$$

Выберем номер p , для которого компакт $K_{0,p} \in \mathcal{K}(D_0)$ содержит z_0 . Так как $d \in Q(D_0, \Lambda)$, то

$$|d_{k,n}| \leq Bp^{-n} \exp(-r_k H(-\varphi_k, K_{0,p})) \leq B \exp(-r_k H(-\varphi_k, K_{0,p})), \quad k \geq 1, \quad n = \overline{0, n_k - 1},$$

где $B > 0$. Поскольку $z_0 \in K_{0,p}$, то

$$\operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi_k}) \leq H(-\varphi_k, K_{0,p}), \quad k \geq 1.$$

Отсюда с учетом предыдущего получаем:

$$|d_{k,n}| \leq B \exp(-r_k \operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi_k})), \quad k \geq 1.$$

Тогда в силу (3.10) имеем:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-\ln |d_{k(j),n(j)}|}{r_{k(j)}} \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-\ln B + r_{k(j)} \operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi_k})}{r_{k(j)}} = \operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi}) > h_0(d, -\varphi).$$

Это противоречит (3.9). Теорема доказана. \square

Замечание 3.5. В частном случае для ряда (3.5) имеем формулу

$$h_0(d, 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-\ln |d_k|}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (-\ln \sqrt[k]{|d_k|}).$$

Делая преобразование $w = e^z$, переводящее ряд (3.5) в степенной ряд, получаем следующую формулу для радиуса сходимости последнего

$$R = \exp h_0(d, 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|d_k|}}.$$

Таким образом, мы получили формулу Коши-Адамара для степенных рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Ф. Леонтьев. *Целые функции. Ряды экспонент*. М.: Наука. 1983.
2. А.Ф. Леонтьев. *Ряды экспонент*. М.: Наука. 1976.
3. E. Hille. *Note on Dirichlet's series with complex exponents* // Ann. of Math. **25**, 261–278 (1924).
4. Г.Л. Лунц. *О некоторых обобщениях рядов Дирихле* // Матем. сб. **10(52)**:1–2, 35–50 (1942).
5. Г.Л. Лунц. *Об одном классе обобщенных рядов Дирихле* // УМН. **12:3(75)**, 173–179 (1957).
6. А.В. Братищев. *Базисы Кете, целые функции и их приложения*. Дисс. докт. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 1995.
7. О.А. Кривошеева. *Область сходимости рядов экспоненциальных мономов* // Уфимск. матем. журн. **3:2**, 43–56 (2011).
8. К. Лейхтвейс. *Выпуклые множества*. М.: Наука. 1985.

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

Олеся Александровна Кривошеева,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru