ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 4 (2022). С. 80-99.

УДК 517.547.2

ОЦЕНКА СНИЗУ МИНИМУМА МОДУЛЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ РОДА НУЛЬ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КОРНЯМИ ЧЕРЕЗ СТЕПЕНЬ МАКСИМУМА МОДУЛЯ В ЧАСТОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЧЕК

А.Ю. ПОПОВ, В.Б. ШЕРСТЮКОВ

Аннотация. Рассматриваются целые функции нулевого рода, корни которых расположены на одном луче. Выводятся близкие к оптимальным на классе всех таких функций оценки снизу минимума модуля на последовательности окружностей через отрицательную степень максимума модуля на тех же окружностях при ограничении на отношение $a > 1$ радиусов соседних окружностей. Введено понятие оптимального показателя $d(a)$ как экстремальной степени максимума модуля в этой задаче. Для оптимального показателя доказаны двусторонние оценки при «тестовом» значении $a = 9/4$ и при $a \in (1, 9/8]$. Найдена асимптотика $d(a)$ при $a \to 1$. Полученные результаты принципиально отличаются от классической $\cos(\pi\rho)$-теоремы, не содержащей ограничений на частоту радиусов окружностей, на которых минимум модуля целой функции порядка $\rho \in [0, 1]$ оценивается через степень ее максимума модуля.

Ключевые слова: целая функция, минимум модуля, максимум модуля.

Mathematics Subject Classification: 30D15, 30D20

1. Введение. Основные результаты

Напомним классическую $\cos(\pi\rho)$-теорему об оценке снизу минимума модуля целой функции порядка $\rho \in [0, 1]$ на некоторой стремящейся к бесконечности последовательности окружностей. Как обычно, обозначим

$$M(f; r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|\leqslant r} |f(z)|, \qquad m(f; r) = \min_{|z|=r} |f(z)|,$$

где f — целая функция.

Пусть f — отличная от тождественной константы целая функция порядка $\rho \in [0, 1]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность положительных чисел $r_n \to +\infty$, что выполняется неравенство

$$m(f; r_n) > (M(f; r_n))^{\cos(\pi\rho)-\varepsilon}. \tag{1.1}$$

Для значений $\rho \in [0, 1)$ этот результат получен независимо Валироном [1] и Виманом [2], а в случае $\rho = 1$ доказан Картрайт в [3] (см. также фундаментальную работу Хеймана [4]).

A.Yu. Popov, V.B. Sherstyukov, Lower bound for minimum modulus of entire function of genus zero with positive roots in terms of degree of maximum modulus at frequent sequence of points.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00129) в МГУ имени М.В. Ломоносова.

Поступила 27 мая 2022 г.

Добавим, что в [3], [4] рассмотрен вопрос об обширности множества $E \subset \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ такого, что

$$m(f;r) > (M(f;r))^{\cos(\pi\rho)-\varepsilon}, \quad r \in E.$$

Доказано существование у E положительной логарифмической плотности, но это не исключает наличия у этого множества обширных лакун, т.е. существования последовательности $R_n \to +\infty$ и числа $p > 1$ таких, что отрезки $[R_n, R_n^p]$ лежат в $\mathbb{R}_+ \setminus E$.

Упомянутые результаты называют теоремами типа Валирона-Вимана (за дополнительными подробностями отсылаем к монографиям [5, гл. 3], [6, гл. V, §3], [7, гл. 6] и обзорам [8], [9]).

Поставим задачу о возможности степенной оценки

$$m(f;r_n) > M^{-d}(f;r_n) \tag{1.2}$$

с каким-либо показателем $d > 0$ на некоторой последовательности $r_n \to +\infty$, удовлетворяющей условию

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} < +\infty. \tag{1.3}$$

Разумеется, речь идет только о целых функциях f конечного порядка. В [4] имеется пример целой функции F бесконечного порядка, для которой

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln m(F;r)}{\ln M(F;r)} = -\infty.$$

Однако для произвольных непостоянных целых функций f даже нулевого порядка ответ на вопрос о наличии такой последовательности $\{r_n\}$, чтобы выполнялись соотношения (1.2) и (1.3) (хотя бы при каком-нибудь значении d), нам не известен. Поэтому ограничимся рассмотрением частного случая: функция f является каноническим произведением нулевого рода с корнями, лежащими на одном луче (для определенности положительными). А именно, рассмотрим всевозможные функции вида

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \tag{1.4}$$

где $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная числовая последовательность, удовлетворяющая условиям

$$0 < \lambda_n \leqslant \lambda_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty. \tag{1.5}$$

Как известно [5, гл. 2], любая целая функция порядка, меньшего 1, отличная от многочлена, получается умножением бесконечного произведения вида (1.4) с произвольными комплексными корнями, ряд из обратных величин модулей которых сходится, на az^m, где $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Условие же принадлежности всех корней одному лучу (у нас $\mathbb{R}_+$) является весьма сильным ограничением. Для всех функций (1.4), корни которых удовлетворяют условию (1.5), справедливы тождества

$$m(f;r) = |f(r)|, \quad M(f;r) = f(-r), \quad r > 0. \tag{1.6}$$

Но даже для такого узкого подкласса целых функций нам известны только два результата по сформулированной выше задаче. Первый из них был получен А.М. Гайсиным [10] для четных канонических произведений

$$L(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w^2}{\mu_n^2}\right) \tag{1.7}$$

с действительными корнями $\{\pm\mu_n\}$, для которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n^{-2}$. Гайсин доказал, что для любой функции вида (1.7) существует возрастающая последовательность $R_n \to +\infty$, удовлетворяющая условию $R_{n+1} \leqslant 4R_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, и такая, что верна оценка $m(L; R_n) > M^{-20}(L; R_n)$.

Эта теорема была усилена в [11] (см. также [12]): доказано, что для любой функции (1.4) с корнями, удовлетворяющими условию (1.5), существует такая последовательность $r_n \uparrow +\infty$, что выполняются ограничение $r_{n+1} \leqslant 3r_n + 1$ и оценка $m(f; r_n) > M^{-9}(f; r_n)$. Нетрудно убедиться в том, что если взять произвольную функцию L вида (1.7), положить $\lambda_n = \mu_n^2$, то после применения сформулированного результата из [11] к функции

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\mu_n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right),$$

учитывая очевидное тождество $f(w^2) = L(w)$, получим существование последовательности $R_n = \sqrt{r_n} \uparrow +\infty$ такой, что верны ограничение $R_{n+1} \leqslant \sqrt{3}R_n + 1$ и оценка $m(L; R_n) > M^{-9}(L; R_n)$.

В то же время, цитированный результат работы [11] был выведен из доказанной там же теоремы об оценке снизу $\max\limits_{qr \leqslant x \leqslant r} m(f; x)$ через отрицательную степень $M(f; Ar)$ (число $A > 1$ зависит от значения параметра $q \in (0, 1)$ и показателя степени максимума модуля), справедливой для произвольной непостоянной целой функции f. Специфика произведений (1.4) с положительными корнями использовалась только при выводе асимптотической оценки $M(f; Ar) = o(M^A(f; r))$, $r \to +\infty$, $A > 1$, позволяющей максимум модуля функции f на большей окружности оценить через степень максимума модуля на меньшей окружности. Поэтому естественно ожидать, что для произведений нулевого рода с корнями на одном луче можно получить более сильный результат. Нами доказана (см. §3) следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть f — произвольная функция вида* (1.4), *корни которой подчинены условию* (1.5). *Тогда для любого $R > 0$ найдется точка $r \in (R, 9R/4)$, в которой выполняется неравенство*

$$m(f; r) > M^{-3}(f; r). \tag{1.8}$$

Более того, произведение

$$\Pi(t) \equiv m(f; t)M^3(f; t)$$

превосходит 1 *«в среднем» на каждом отрезке $[R, 9R/4]$ в том смысле, что*

$$\int\limits_{R}^{9R/4} t^{-3}\ln\Pi(t)dt > 0 \qquad \forall R > 0. \tag{1.9}$$

Следствие 1.1. *Пусть L — произвольная функция вида* (1.7) *с действительными корнями $\{\pm\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тогда для любого $R > 0$ существует точка $r \in (R, 3R/2)$, в которой выполняется неравенство*

$$|L(r)| = m(L; r) > M^{-3}(L; r) = L^{-3}(ir).$$

Невозможность значительного усиления неравенства (1.8), а именно, замены показателя степени максимума модуля в (1.8) на -2, показывает такой результат (доказанный в §2).

Теорема 1.2. *Для любого значения $\rho \in (0, 1)$ и произвольной «быстро» стремящейся к $+\infty$ последовательности положительных чисел $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (т.е. такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}(R_n/R_{n+1}) = 0$) существует целая функция F порядка ρ, являющаяся каноническим* *произведением нулевого рода с положительными корнями, для которой справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \max\Big\{m(F;r)M^2(F;r) \mid R_n \leqslant r \leqslant 9R_n/4\Big\} = 0.$$

Теоремы 1.1 и 1.2 демонстрируют существенное различие между задачами получения оценки снизу минимума модуля целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ через степень максимума ее модуля на уходящей в бесконечность последовательности окружностей без ограничения на частоту их радиусов (или со слабым условием ограниченности отношения логарифмов соседних радиусов) и при требовании наличия соответствующей оценки на любом отрезке с постоянным отношением его концов. В первом случае, как видно из $\cos(\pi\rho)$-теоремы, именно порядок функции определяет наилучший показатель степени максимума модуля в оценке (1.1). Во втором случае, когда требуется получить степенную оценку $m(f;r)$ через $M(f;r)$ в некоторой подходящей точке отрезка $R \leqslant r \leqslant aR$ (в теоремах 1.1, 1.2 рассматривается значение $a = 9/4$), порядок функции f, возможно, играет какую-то роль (нам ее не удалось выявить), но не определяющую: наилучший показатель d в оценке (1.2), как мы установили, лежит между числами 2 и 3.

Дадим строгое определение оптимального показателя в степенной оценке (1.2) на классе произведений (1.4) с условиями на корни (1.5), когда отношение r_{n+1}/r_n ограничено сверху заданным числом. Предварительно необходимо сформулировать один результат.

В §2 будет доказана следующая теорема. Для произвольного $a > 1$ обозначим

$$s(a) = \frac{\ln\frac{1}{1-1/a}}{\ln(1+1/a)}. \tag{1.10}$$

Заметим, что $s(a) > 1$ при всех $a > 1$.

Теорема 1.3. *Для любого $\rho \in (0,1)$ и любой числовой последовательности $R_n \to +\infty$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}(R_n/R_{n+1}) = 0$ существует целая функция f порядка ρ, являющаяся каноническим произведением* (1.4) *с условием на корни* (1.5), *для которой справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{R_n\leqslant r\leqslant aR_n} \big(m(f;r)M^{s(a)}(f;r)\big) = 0$$

при показателе $s(a)$, заданном формулой (1.10).

Определение 1.1. *Оптимальным показателем $d(a)$ назовем точную верхнюю грань таких значений s, для которых верно утверждение, аналогичное теореме 1.3, а именно, существуют каноническое произведение f вида* (1.4), (1.5) *и последовательность $R_n \to +\infty$, для которых*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{R_n\leqslant r\leqslant aR_n} (m(f;r)M^{s}(f;r)) = 0.$$

Из данного определения следует, что если взять произвольный показатель степени $d > d(a)$, то для любого канонического произведения f вида (1.4), (1.5) величина

$$\max_{R\leqslant r\leqslant aR} \big(m(f;r)M^{d}(f;r)\big) \tag{1.11}$$

при всех достаточно больших R отделена от нуля. За счет произвольности $d > d(a)$ в этом утверждении автоматически получается, что максимум в (1.11) стремится к $+\infty$ при $R \to +\infty$, если f отлична от тождественной константы.

Теоремы 1.1, 1.2 показывают, что справедливо двойное неравенство

$$2 \leqslant d\left(\frac{9}{4}\right) \leqslant 3 \tag{1.12}$$

(как выяснится позже, со строгими знаками), а из теоремы 1.3 следует оценка снизу

$$d(a) \geqslant s(a) = \frac{\ln \frac{1}{1-1/a}}{\ln(1+1/a)} > 1 \tag{1.13}$$

при любом $a \in (1, +\infty)$.

Мы нашли асимптотику

$$d(a) = \frac{\ln \frac{1}{a-1}}{\ln 2} + O(1) = \log_2 \frac{1}{a-1} + O(1), \qquad a \to 1+\,. \tag{1.14}$$

Более детальный результат дает следующая теорема (см. §3).

Теорема 1.4. *При любом $a \in (1, 9/8]$ справедливо двойное неравенство*

$$\log_2 \frac{1}{a-1} < d(a) < \log_2 \frac{1}{a-1} + \frac{7}{2}, \tag{1.15}$$

влекущее асимптотику (1.14).

2. Оценка оптимального показателя снизу

Займемся построением канонических произведений нулевого рода, для которых существует такая уходящая в бесконечность последовательность отрезков действительной оси с постоянным отношением концов, что на каждой окружности в комплексной плоскости радиуса, принадлежащего упомянутой системе отрезков, минимум модуля произведений меньше некоторой фиксированной отрицательной степени максимума модуля.

Используем одно простое утверждение. Пусть $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, столь быстро стремящаяся к $+\infty$, что выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n/A_{n+1}) = 0$. Тогда справедливы следующие асимптотические оценки

$$\sum_{j=1}^{n-1} A_j = o\left(A_n\right), \qquad \sum_{j=n+1}^{\infty} A_j^{-1} = o\left(A_n^{-1}\right), \qquad n \to \infty. \tag{2.1}$$

Пусть P — многочлен, $\deg P = p$, все корни которого $x_1, \dots, x_p$ действительны и положительны, но не обязательно различны. Предположив, что $P(0) = 1$, запишем многочлен P в виде произведения

$$P(z) = \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{z}{x_k}\right). \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *Пусть $a > 1$, $d > 0$ и выполняется неравенство*

$$\mu \equiv \max_{1\leqslant x\leqslant a} \left(|P(x)|\, P^d(-x)\right) < 1, \tag{2.3}$$

а $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная возрастающая и столь быстро стремящаяся к $+\infty$ последовательность положительных чисел, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{R_{n+1}} = 0. \tag{2.4}$$

Тогда для любого $\rho \in (0, 1)$ существует целая функция F нормального типа при порядке ρ, являющаяся каноническим произведением нулевого рода с корнями, лежащими на луче $(0, +\infty)$ действительной оси, такая, что выполнено предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \max\left\{m(F; r) M^d(F; r) \mid R_n \leqslant r \leqslant aR_n\right\} = 0. \tag{2.5}$$

Доказательство. Возьмем произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел ν_n, для которой верно порядковое соотношение

$$\nu_n \asymp R_n^{\rho}, \quad n \to \infty. \tag{2.6}$$

Из (2.4), (2.6) видно, что $\{\nu_n\}$, как и $\{R_n\}$, очень быстро стремится к бесконечности и сильно лакунарна:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n}{\nu_{n+1}} = 0. \tag{2.7}$$

Нетрудно проверить, что по теореме Линделефа (см., например, [5, гл. 2, §2.9]) в силу (2.6) бесконечное произведение

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} P^{\nu_n}\left(\frac{z}{R_n}\right) \tag{2.8}$$

является целой функцией нормального типа при порядке ρ и все ее корни лежат на луче $(0, +\infty)$ действительной оси, причем $F(0) = 1$. Другими словами, функция F является каноническим произведением нулевого рода:

$$F(z) = \prod_{l=1}^{\infty} (1 - \xi_l z), \qquad \xi_l > 0, \qquad \sum_{l=1}^{\infty} \xi_l < +\infty. \tag{2.9}$$

Из (2.9) следуют равенства

$$m(F; r) = |F(r)|, \qquad M(F; r) = F(-r), \qquad r > 0, \tag{2.10}$$

и аналогичные равенства

$$m(P; r) = |P(r)|, \qquad M(P; r) = P(-r), \qquad r > 0, \tag{2.11}$$

верны для многочлена (2.2). Формулы (2.8), (2.10), (2.11) показывают, что максимизируемая в (2.5) функция $m(F;r)M^d(F;r)$ разлагается в следующее произведение

$$m(F;r)M^d(F;r) = \prod_{n=1}^{\infty} \left| P^{\nu_n}\left(\frac{r}{R_n}\right)\right| P^{d\nu_n}\left(-\frac{r}{R_n}\right), \qquad r > 0.$$

Отсюда заключаем, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_n &\equiv \max_{R_n \leqslant r \leqslant aR_n} \big(m(F;r)M^d(F;r)\big) \\ &= \max_{1\leqslant x\leqslant a} \prod_{j=1}^{\infty} \left| P^{\nu_j}\left(\frac{xR_n}{R_j}\right)\right| P^{d\nu_j}\left(-\frac{xR_n}{R_j}\right) \leqslant \gamma_{n,1}\gamma_{n,2}\gamma_{n,3}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где $\gamma_{1,1} \equiv 1$,

$$\gamma_{n,1} \equiv \max_{1\leqslant x\leqslant a} \prod_{j=1}^{n-1} \left| P^{\nu_j}\left(\frac{xR_n}{R_j}\right)\right| P^{d\nu_j}\left(-\frac{xR_n}{R_j}\right) \leqslant \tilde{\gamma}_{n,1} \equiv \prod_{j=1}^{n-1} P^{(1+d)\nu_j}\left(-\frac{aR_n}{R_j}\right), \quad n \geq 2, \tag{2.13}$$

$$\gamma_{n,2} \equiv \max_{1\leqslant x\leqslant a} |P^{\nu_n}(x)|\, P^{d\nu_n}(-x) = \max_{1\leqslant x\leqslant a} \big(|P(x)|\, P^d(-x)\big)^{\nu_n}, \tag{2.14}$$

$$\gamma_{n,3} \equiv \max_{1\leqslant x\leqslant a} \prod_{j=n+1}^{\infty} \left| P^{\nu_j}\left(\frac{xR_n}{R_j}\right)\right| P^{d\nu_j}\left(-\frac{xR_n}{R_j}\right) \leqslant \tilde{\gamma}_{n,3} \equiv \prod_{j=n+1}^{\infty} P^{(1+d)\nu_j}\left(-\frac{aR_n}{R_j}\right). \tag{2.15}$$

Ввиду (2.13), (2.14) верно равенство

$$\gamma_{n,2} = \mu^{\nu_n}. \tag{2.16}$$

Требуется доказать стремление к нулю последовательности γ_n. Из (2.12)–(2.16) видно, что для этого достаточно вывести асимптотические оценки

$$\ln \tilde{\gamma}_{n,1} = o(\nu_n), \qquad \ln \tilde{\gamma}_{n,3} = o(\nu_n), \qquad n \to \infty. \tag{2.17}$$

В (2.17) требуют доказательства лишь оценки сверху, поскольку величины $\ln\tilde{\gamma}_{n,1}$, $\ln\tilde{\gamma}_{n,3}$ положительны: неравенства $\tilde{\gamma}_{n,1} > 1$, $\tilde{\gamma}_{n,3} > 1$ сразу же следуют из того, что $P(-t) > 1$ при любом $t > 0$ согласно (2.2).

Неравенство $\ln(1+u) < u$ для $u > 0$ позволяет вывести из (2.2) оценку

$$\ln P(-t) < c\,t, \quad t > 0, \quad \text{где} \quad c = \sum_{k=1}^{p} x_k^{-1}. \tag{2.18}$$

Из (2.18), (2.15), (2.6) находим

$$\ln\tilde{\gamma}_{n,3} \leqslant O\left(R_n \sum_{j=n+1}^{\infty} \nu_j R_j^{-1}\right) = O\left(R_n \sum_{j=n+1}^{\infty} R_j^{\rho-1}\right), \qquad n \to \infty. \tag{2.19}$$

Последовательность $A_n \equiv R_n^{1-\rho}$ ввиду ограничения (2.4) является сильно лакунарной, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n/A_{n+1}) = 0$. Поэтому согласно (2.1) имеем

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} R_j^{\rho-1} = o\left(R_n^{\rho-1}\right), \qquad n \to \infty. \tag{2.20}$$

Из (2.19), (2.20), (2.6) выводим требуемую оценку сверху:

$$\ln\tilde{\gamma}_{n,3} \leqslant o\left(R_n \cdot R_n^{\rho-1}\right) = o\left(R_n^{\rho}\right) = o(\nu_n), \qquad n \to \infty.$$

Считая корни многочлена P расположенными в порядке неубывания, помимо оценки (2.18), которая хороша при «малых» значениях t, имеем другую оценку

$$P(-t) \leqslant \left(\frac{2t}{x_1}\right)^p, \qquad t \geqslant x_1,$$

пригодную при «больших» t. Следовательно,

$$\ln P(-t) < 2p\ln t, \qquad t > x_1 + \frac{2}{x_1}.$$

Отсюда и из (2.13) при всех достаточно больших n находим

$$\ln\tilde{\gamma}_{n,1} \leqslant O\left(\sum_{j=1}^{n-1} \nu_j \ln\left(\frac{aR_n}{R_j}\right)\right).$$

В силу порядкового соотношения (2.6) имеем

$$\ln\left(\frac{R_n}{R_j}\right) = \ln\left(\frac{\nu_n}{\nu_j}\right) + O(1) = O\left(\ln\left(\frac{\nu_n}{\nu_j}\right)\right), \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Тем самым,

$$\ln\tilde{\gamma}_{n,1} \leqslant O\left(\sum_{j=1}^{n-1} \nu_j \ln\left(\frac{\nu_n}{\nu_j}\right)\right).$$

Отсюда видно, что для вывода первой асимптотической оценки (2.17) осталось доказать стремление к нулю суммы

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\nu_j}{\nu_n} \ln\left(\frac{\nu_n}{\nu_j}\right) < \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\nu_j}{\nu_n}\right)^{1/2}.$$

Требуемое сразу же следует из (2.1), поскольку последовательность $A_n \equiv \nu_n^{1/2}$ ввиду (2.4) и (2.6) удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n/A_{n+1}) = 0$. Асимптотические оценки (2.17) получены, и доказательство леммы завершено. □

Лемма 2.1 показывает, что для доказательства теоремы 1.3 достаточно для любого $a > 1$ предъявить такой многочлен P_a с положительными корнями и значением $P_a(0) = 1$, что

$$\max_{1\leqslant x\leqslant a}\left(|P_a(x)|\,(P_a(-x))^{s(a)}\right) < 1. \tag{2.21}$$

Если взять $P_a(z) = 1 - z/a$, то окажется, что максимум в левой части (2.21) в точности равен 1. Покажем, что соотношение (2.21) будет выполнено для многочленов $P_a(z) = 1 - z/c$ при выборе

$$c = c(a) = a\left(1 + 2^{-s(a)-1/2}\right)^{-1}, \qquad a > 1. \tag{2.22}$$

Предварительно дадим общее представление о поведении величины $s(a)$ из (1.10).

Лемма 2.2. *Функция $s(a)$ убывает на луче $1 < a < +\infty$. Кроме того,*

$$\lim_{a\to 1+} s(a) = +\infty, \qquad \lim_{a\to+\infty} s(a) = 1, \tag{2.23}$$

$$\max\left\{1, \log_2\frac{1}{a-1}\right\} < s(a) < \frac{a+1}{a-1}, \qquad a > 1. \tag{2.24}$$

Доказательство. Прямой подсчет, основанный на формуле

$$s(a) = \frac{\ln a - \ln(a-1)}{\ln(a+1) - \ln a}, \qquad a > 1,$$

приводит к следующим соотношениям

$$s'(a)a(a^2-1)\ln^2(1+1/a) = \psi(a) - \psi(a+1), \tag{2.25}$$

$$s'(a)a(a^2-1)\ln(1+1/a) = s(a)(a-1) - (a+1). \tag{2.26}$$

Здесь

$$\psi(a) \equiv a\ln a - (a-1)\ln(a-1), \quad a > 1. \tag{2.27}$$

Так как вспомогательная функция (2.27) возрастает при $a > 1$, то для всех таких a в силу (2.25) имеем $s'(a) < 0$. Поэтому функция $s(a)$ убывает на луче $1 < a < +\infty$. Обращаясь затем к тождеству (2.26) и учитывая, что его левая часть отрицательна при $a > 1$, получим правую часть (2.24). Выведем левую часть неравенства (2.24). Простейшая оценка $s(a) > 1$ отмечена в §1. В дополнение к ней из определения (1.10) сразу следует, что

$$s(a) \equiv \frac{\ln\frac{1}{1-1/a}}{\ln(1+1/a)} > \frac{\ln\frac{1}{a-1}}{\ln 2} = \log_2\frac{1}{a-1}, \qquad a > 1.$$

Это завершает доказательство двусторонней оценки (2.24). Наконец, оба предельных соотношения (2.23) легко извлекаются как из исходной формулы (1.10), так и из (2.24). Все утверждения леммы обоснованы. □

Перейдем к доказательству теоремы 1.3. Для произвольного $a > 1$ определим величину $c = c(a)$ по правилу (2.22) и построим двучлен $P_a(z) = 1 - z/c$. Сначала проверим, что

$$1 < c \equiv a\left(1 + 2^{-s(a)-1/2}\right)^{-1} < a. \tag{2.28}$$

Неравенство $c < a$ очевидно. Неравенство $c > 1$ перепишем в эквивалентном виде

$$2^{-s(a)-1/2} < a - 1 \Leftrightarrow s(a) > -\frac{1}{2} + \log_2\frac{1}{a-1},$$

что верно ввиду (2.24).

Убедимся в том, что функция

$$h(x) \equiv |P_a(x)|\,(P_a(-x))^{s(a)} = \left|1 - \frac{x}{c}\right|\left(1 + \frac{x}{c}\right)^{s(a)}$$

убывает на отрезке $1 \leqslant x \leqslant c$ и возрастает на отрезке $c \leqslant x \leqslant a$. Действительно, для $x \in [1, c)$ имеем

$$\ln h(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{c}\right) + s(a)\ln\left(1 + \frac{x}{c}\right),$$

откуда

$$h'(x) = h(x)\left(\frac{s(a)}{c+x} - \frac{1}{c-x}\right) = \frac{h(x)}{c^2 - x^2}\left(c\,(s(a)-1) - (s(a)+1)\,x\right).$$

Поскольку

$$c\,(s(a)-1) - (s(a)+1)\,x < a\,(s(a)-1) - (s(a)+1) = (a-1)s(a) - (a+1) < 0$$

ввиду (2.28), (2.24), то $h'(x) < 0$ при $1 \leqslant x < c$, и функция $h(x)$ убывает на отрезке $1 \leqslant x \leqslant c$. Возрастание функции $h(x)$ на отрезке $c \leqslant x \leqslant a$ очевидно, поскольку здесь она принимает вид

$$h(x) = \left(\frac{x}{c} - 1\right)\left(1 + \frac{x}{c}\right)^{s(a)},$$

являясь произведением двух положительных и возрастающих при $x \in (c, a]$ функций.

Как видим,

$$\max_{1\leqslant x\leqslant a} h(x) = \max\{h(1), h(a)\}. \tag{2.29}$$

Осталось показать, что максимум (2.29) меньше, чем 1. Во-первых,

$$h(1) = \left(1 - \frac{1}{c}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)^{s(a)} < 1.$$

В самом деле, неравенство $h(1) < 1$ равносильно такому:

$$\ln\left(1 - \frac{1}{c}\right) + s(a)\ln\left(1 + \frac{1}{c}\right) < 0,$$

или, что то же самое,

$$s(a) < \frac{\ln\frac{1}{1-1/c}}{\ln(1+1/c)} \equiv s(c).$$

Но неравенство $s(a) < s(c)$ справедливо, ибо $a > c > 1$, и по лемме 2.2 функция (1.10) убывает на луче $(1, +\infty)$. Во-вторых, с учетом (2.22), запишем

$$h(a) = \left(\frac{a}{c} - 1\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)^{s(a)} = 2^{-s(a)-1/2}\left(2 + 2^{-s(a)-1/2}\right)^{s(a)} = 2^{-1/2}\left(1 + 2^{-s(a)-3/2}\right)^{s(a)}.$$

Последовательно воспользуемся элементарными оценками:

$$1 + u < e^u \quad \text{при} \quad u = 2^{-s(a)-3/2} > 0 \quad \text{и} \quad v2^{-v} \leqslant 1/(e\ln 2) \quad \text{при} \quad v = s(a) > 1.$$

В результате получим, что

$$h(a) < 2^{-1/2}\exp\left(s(a)2^{-s(a)-3/2}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{8}e\ln 2}\right) < 0.86.$$

Таким образом, из (2.29) при любом $a > 1$ для двучлена $P_a(z) = 1 - z/c(a)$ имеем

$$\max_{1\leqslant x\leqslant a}\left(|P_a(x)|\,(P_a(-x))^{s(a)}\right) = \max_{1\leqslant x\leqslant a} h(x) = \max\{h(1), h(a)\} < 1,$$

если выбрать коэффициент $c(a)$ по правилу (2.22), а показатель $s(a)$ — по правилу (1.10). Другими словами, справедливо соотношение (2.21). Применив лемму 2.1, завершим доказательство теоремы 1.3.

Приступим к доказательству теоремы 1.2. Покажем, что если взять

$$P(z) = \left(1 - \frac{8}{11}z\right)\left(1 - \frac{7}{15}z\right),$$

то выполняется неравенство

$$\max_{1\leqslant x\leqslant 9/4}\left\{|P(x)|\,(P(-x))^{2.04}\right\} < 0.996. \tag{2.30}$$

Согласно лемме 2.1 это влечет за собой справедливость теоремы 1.2 в усиленном варианте. А именно, нижняя оценка в (1.12) уточняется: $2.04 < d(9/4)$. Попутно отметим, что вытекающая из теоремы 1.3 оценка (1.13) при $a = 9/4$ дает

$$d(9/4) \geqslant s(9/4) = \frac{\ln(9/5)}{\ln(13/9)} = 1.59\ldots,$$

но этого недостаточно для нашей ближайшей цели.

Оценим сверху максимумы функции

$$H(x) \equiv |P(x)|P^2(-x) = \left|1-\frac{8}{11}x\right|\left|1-\frac{7}{15}x\right|\left(1+\frac{8}{11}x\right)^2\left(1+\frac{7}{15}x\right)^2$$

на отрезках $[1, 11/8]$ и $[11/8, 9/4]$. Сначала докажем убывание функции H на отрезке $[1, 11/8]$. Это вместе с соотношениями

$$H(1) = \frac{3}{11}\cdot\frac{8}{15}\left(\frac{19}{11}\cdot\frac{22}{15}\right)^2 = \frac{8}{55}\left(\frac{38}{15}\right)^2 < 0.94$$

даст оценку

$$\max\left\{H(x)\mid 1\leqslant x\leqslant\frac{11}{8}\right\} = H(1) < 0.94. \tag{2.31}$$

При $x \in [1, 11/8)$ имеем

$$l(x) \equiv \ln H(x) = \ln\left(1-\frac{8x}{11}\right) + \ln\left(1-\frac{7x}{15}\right) + 2\ln\left(1+\frac{8x}{11}\right) + 2\ln\left(1+\frac{7x}{15}\right),$$

$$l'(x) = \frac{14}{15+7x} + \frac{16}{11+8x} - \frac{8}{11-8x} - \frac{7}{15-7x}.$$

Отсюда сразу же видно убывание производной l' на полуинтервале $[1, 11/8)$. Это влечет за собой оценку

$$l'(x) \leqslant l'(1) = \frac{7}{11} + \frac{16}{19} - \frac{8}{3} - \frac{7}{8} < 0,$$

которая доказывает убывание функции l на полуинтервале $[1, 11/8)$, а значит, и убывание функции H на отрезке $[1, 11/8]$.

Возрастание функции

$$H(x) = \left(\frac{8x}{11}-1\right)\left(\frac{7x}{15}-1\right)\left(1+\frac{8x}{11}\right)^2\left(1+\frac{7x}{15}\right)^2, \qquad x \geqslant \frac{15}{7},$$

на луче $[15/7, +\infty)$ очевидна, и поэтому

$$\max_{15/7\leqslant x\leqslant 9/4} H(x) = H\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{18}{11}-1\right)\left(\frac{21}{20}-1\right)\left(1+\frac{18}{11}\right)^2\left(1+\frac{21}{20}\right)^2 < 0.93. \tag{2.32}$$

Оценим сверху максимум функции H на отрезке $[11/8, 15/7]$. Имеем

$$H\left(\frac{11}{8}\right) = H\left(\frac{15}{7}\right) = 0, \qquad H(x) = \left(\frac{8x}{11}-1\right)\left(1-\frac{7x}{15}\right)\left(1+\frac{8x}{11}\right)^2\left(1+\frac{7x}{15}\right)^2,$$

$$l(x) = \ln H(x) = \ln\left(\frac{8x}{11}-1\right) + \ln\left(1-\frac{7x}{15}\right) + 2\ln\left(1+\frac{8x}{11}\right) + 2\ln\left(1+\frac{7x}{15}\right),$$

$$l'(x) = \frac{14}{15+7x} + \frac{16}{11+8x} + \frac{8}{8x-11} - \frac{7}{15-7x}, \qquad x \in \left(\frac{11}{8}, \frac{15}{7}\right).$$

Из элементарных соображений видно убывание l' на интервале $(11/8, 15/7)$. А так как

$$\lim_{x\to\frac{11}{8}+} l'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\frac{15}{7}-} l'(x) = -\infty,$$

то в силу непрерывности l' существует такая точка $x_0 \in (11/8, 15/7)$, что

$$l'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in \left(\frac{11}{8}, x_0\right), \qquad l'(x_0) = 0, \qquad l'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in \left(x_0, \frac{15}{7}\right).$$

Поэтому функция H возрастает на отрезке $[11/8, x_0]$ и убывает на отрезке $[x_0, 15/7]$. В точке x_0 функция H достигает макимума на отрезке $[11/8, 15/7]$, и мы сейчас докажем, что

$$H(x_0) = \max\left\{H(x) \mid \frac{11}{8} \leqslant x \leqslant \frac{15}{7}\right\} < 0.91. \tag{2.33}$$

Непосредственным вычислением проверяется справедливость неравенств

$$l'\left(\frac{24}{13}\right) < 0 < l'\left(\frac{11}{6}\right) < \frac{1}{11},$$

из которых находим

$$\frac{11}{6} < x_0 < \frac{24}{13}, \qquad 0 < l'(x) < \frac{1}{11} \quad \forall x \in \left(\frac{11}{6}, x_0\right). \tag{2.34}$$

Имеем также

$$H\left(\frac{11}{6}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{13}{90}\cdot\left(\frac{7\cdot 167}{3\cdot 90}\right)^2 < 0.903.$$

Поэтому

$$l\left(\frac{11}{6}\right) < \ln 0.903 < -0.1. \tag{2.35}$$

Из (2.34), (2.35) следуют неравенства

$$l(x_0) - l\left(\frac{11}{6}\right) = \int\limits_{11/6}^{x_0} l'(x)dx < \frac{1}{11}\left(x_0 - \frac{11}{6}\right) < \frac{1}{11}\left(\frac{24}{13} - \frac{11}{6}\right) = \frac{1}{858},$$

$$l(x_0) < l\left(\frac{11}{6}\right) + \frac{1}{858} < -0.098 \quad\Longrightarrow\quad H(x_0) < \exp(-0.098) < 0.91.$$

Соотношение (2.33) доказано. Из (2.32), (2.33) выводим следующую оценку максимума функции H на отрезке $[11/8, 9/4]$:

$$\max\left\{H(x) \mid \frac{11}{8} \leqslant x \leqslant \frac{9}{4}\right\} < 0.93. \tag{2.36}$$

Теперь из неравенств (2.31), (2.36) выведем неравенство (2.30). Ввиду возрастания квадратного трехчлена

$$P(-x) = \left(1 + \frac{8x}{11}\right)\left(1 + \frac{7x}{15}\right)$$

на луче $(0, +\infty)$ имеем

$$\max\left\{P(-x) \mid 1 \leqslant x \leqslant \frac{11}{8}\right\} = P\left(-\frac{11}{8}\right) = 2\left(1 + \frac{77}{120}\right) = \frac{197}{60} < \exp(1.2), \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}\max\left\{P(-x) \mid \frac{11}{8} \leqslant x \leqslant \frac{9}{4}\right\} &= P\left(-\frac{9}{4}\right) = \left(1 + \frac{18}{11}\right)\left(1 + \frac{21}{20}\right) \\ &= \frac{1189}{220} < \exp(1.69).\end{aligned} \tag{2.38}$$

Из (2.31), (2.37) следует оценка

$$\max_{1\leqslant x\leqslant 11/8}\left\{|P(x)|\,(P(-x))^{2.04}\right\} < 0.94\exp(0.048) < 0.987,$$

а из (2.36), (2.38) находим

$$\max_{11/8\leqslant x\leqslant 9/4}\left\{|P(x)|\,(P(-x))^{2.04}\right\} < 0.93\exp(1.69\cdot 0.04) < 0.996.$$

Таким образом, предъявлен многочлен P второй степени, удовлетворяющий условию (2.30). Для такого многочлена соотношение (2.3) заведомо выполнено со значениями $a = 9/4$ и $d = 2.04$. Применив лемму 2.1, завершим доказательство теоремы 1.2.

3. Оценка оптимального показателя сверху

Метод оценки сверху величины $d(a)$ основывается на следующей лемме.

Лемма 3.1. *Если числа $a > 1$, $b > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ таковы, что функция*

$$\Phi(x; a, b, \alpha) \equiv \int_x^{ax} t^{\alpha}\left(\ln|1-t| + b\ln(1+t)\right)dt$$

положительна всюду на луче $0 < x < +\infty$, то при любом $R > 0$ для произвольного канонического произведения (1.4) *с условием на корни* (1.5) *справедливо неравенство*

$$\int_R^{aR} t^{\alpha}\ln\left(m(f;t)M^b(f;t)\right)dt > 0. \tag{3.1}$$

В частности, для любого $R > 0$ существует такая точка $r \in (R, aR)$, для которой

$$m(f;r) > M^{-b}(f;r).$$

Доказательство. Согласно (1.4), (1.6) на луче $t > 0$ вне корней функции f имеем

$$\ln\left(m(f;t)M^b(f;t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left|1-\frac{t}{\lambda_n}\right| + b\ln\left(1+\frac{t}{\lambda_n}\right)\right). \tag{3.2}$$

Для фиксированного $R > 0$ при $t \in [R, aR]$ все члены ряда в (3.2) интегрируемы в несобственном смысле. Более того, за возможным исключением конечного числа (зависящего от $R > 0$ и $a > 1$) слагаемых, этот ряд состоит из непрерывных на отрезке $[R, aR]$ функций

$$u_n(t) \equiv \ln\left|1-\frac{t}{\lambda_n}\right| + b\ln\left(1+\frac{t}{\lambda_n}\right) \leqslant \frac{(1+b)aR}{\lambda_n}, \qquad n \geqslant n_0, \quad t \in [R, aR],$$

причем ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n(t)$ равномерно сходится на таком отрезке благодаря (1.5). Умножим обе части тождества (3.2) на t^{α} и проинтегрируем это произведение по отрезку $[R, aR]$. Поскольку корректен переход к почленному интегрированию ряда в (3.2), то

$$\int_R^{aR} t^{\alpha}\ln\left(m(f;t)M^b(f;t)\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_R^{aR} t^{\alpha}\left(\ln\left|1-\frac{t}{\lambda_n}\right| + b\ln\left(1+\frac{t}{\lambda_n}\right)\right)dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{\alpha+1}\int_{R/\lambda_n}^{aR/\lambda_n} u^{\alpha}\left(\ln(1-u) + b\ln(1+u)\right)du = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{\alpha+1}\Phi\left(\frac{R}{\lambda_n}; a, b, \alpha\right).$$

Получили представление интеграла в (3.1) в виде суммы сходящегося числового ряда

$$\int_R^{aR} t^\alpha \ln\left(m(f;t)M^b(f;t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\alpha+1} \Phi\left(\frac{R}{\lambda_n}; a, b, \alpha\right). \tag{3.3}$$

Отметим, что из определения функции Φ несложно выводится асимптотическая оценка

$$\Phi(x; a, b, \alpha) = O\left(x^{\alpha+2}\right), \qquad x \to 0+,$$

которая вместе с (1.5) подтверждает сходимость ряда в (3.3).

По условию леммы функция Φ положительна. Поэтому положительна сумма ряда в (3.3), а вместе с ней и интеграл в (3.1). Лемма доказана. □

Перейдем к доказательству теоремы 1.1. Как показывает лемма 3.1, достаточно проверить положительность функции $\Phi(x; 9/4, 3, -3)$ при любом $x > 0$. Нужный факт вынесем в отдельное утверждение.

Лемма 3.2. *Функция*

$$\Phi(x) = \Phi\left(x; \frac{9}{4}, 3, -3\right) \equiv \int_x^{9x/4} t^{-3} \left(\ln|1-t| + 3\ln(1+t)\right) dt \tag{3.4}$$

положительна всюду на луче $x > 0$.

Доказательство. Из определения (3.4) видно, что $\Phi(x)$ непрерывна при $x > 0$. Обозначим

$$\varphi(x) \equiv \ln|1-x| + 3\ln(1+x), \qquad x > 0, \quad x \neq 1, \tag{3.5}$$

и проинтегрируем в (3.4) по частям. После элементарных вычислений приходим к представлению

$$\begin{aligned} 2\Phi(x) &\equiv 2\int_x^{9x/4} t^{-3}\varphi(t)dt \\ &= \left(1 - \frac{16}{81x^2}\right)\varphi\left(\frac{9x}{4}\right) - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\varphi(x) - 8\ln\frac{3}{2} + \frac{10}{9x}, \qquad x > 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Поясним, что несмотря на равенство $\lim\limits_{x\to1}\varphi(x) = -\infty$, выражение (3.6) в точках $x = 4/9$ и $x = 1$ разрывов не имеет, принимая конечные значения

$$2\Phi(4/9) = \frac{65}{16}\varphi\left(\frac{4}{9}\right) - 8\ln\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1.35\ldots, \qquad 2\Phi(1) = \frac{65}{81}\varphi\left(\frac{9}{4}\right) - 8\ln\frac{3}{2} + \frac{10}{9} = 0.88\ldots.$$

Проверим справедливость предельных соотношений

$$\lim_{x\to0+}\Phi(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = 0. \tag{3.7}$$

С одной стороны, при $x \in (0, 4/9)$ согласно (3.5), (3.6) функция $2\Phi(x)$ совпадает с величиной

$$\left(1 - \frac{16}{81x^2}\right)\left(\ln\left(1 - \frac{9x}{4}\right) + 3\ln\left(1 + \frac{9x}{4}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(\ln(1-x) + 3\ln(1+x)\right) - 8\ln\frac{3}{2} + \frac{10}{9x}.$$

Поэтому, взяв асимптотики логарифмов

$$\ln\left(1 \pm \frac{9x}{4}\right) = \pm\frac{9x}{4} + O\left(x^2\right), \qquad \ln(1 \pm x) = \pm x + O\left(x^2\right), \qquad x \to 0+,$$

приходим к соотношению

$$2\Phi(x)=\left(1-\frac{16}{81x^2}\right)\left(\frac{9x}{2}+O\left(x^2\right)\right)-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(2x+O\left(x^2\right)\right)-8\ln\frac{3}{2}+\frac{10}{9x}=\frac{20}{9x}+O(1),$$

где $x\to 0+$.

С другой стороны, при $x\in(1,+\infty)$ получим для функции $2\Phi(x)$ выражение

$$\left(1-\frac{16}{81x^2}\right)\left(\ln\left(\frac{9x}{4}-1\right)+3\ln\left(\frac{9x}{4}+1\right)\right)-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)(\ln(x-1)+3\ln(x+1))-8\ln\frac{3}{2}+\frac{10}{9x}.$$

Поэтому, взяв асимптотики логарифмов

$$\ln\left(\frac{9x}{4}\pm 1\right)=\ln\frac{9x}{4}+o(1),\qquad \ln(x\pm 1)=\ln x+o(1),\qquad x\to+\infty,$$

приходим к соотношению

$$2\Phi(x)=4\ln\frac{9x}{4}-4\ln x-8\ln\frac{3}{2}+o(1)=o(1),\qquad x\to+\infty.$$

Тем самым, равенства (3.7) обоснованы.

Продифференцировав (3.4), получим, что

$$x^3\Phi'(x)=\frac{16}{81}\varphi\left(\frac{9x}{4}\right)-\varphi(x),\qquad x>0, \tag{3.8}$$

с уточнением $\Phi'(4/9)=-\infty$, $\Phi'(1)=+\infty$. В остальных точках полуоси $0<x<+\infty$ производная Φ' конечна, а ее знак, согласно (3.8), совпадает со знаком функции

$$\psi(x)\equiv\frac{16}{81}\varphi\left(\frac{9x}{4}\right)-\varphi(x),\qquad x>0,\quad x\neq\frac{4}{9},\quad x\neq 1. \tag{3.9}$$

Для определения последнего примем во внимание соотношения

$$\lim_{x\to 0+}\psi(x)=0,\qquad \lim_{x\to 4/9}\psi(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to 1}\psi(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\psi(x)=-\infty, \tag{3.10}$$

без труда извлекаемые из определений (3.5), (3.9). Прямой подсчет, также основанный на формулах (3.5), (3.9), показывает, что

$$\psi'(x)=-\frac{10(234x^3-133x^2+16)}{9(81x^2-16)(x^2-1)} \tag{3.11}$$

при всех $x\in(0,4/9)\cup(4/9,1)\cup(1,+\infty)$. Поскольку $234x^3-133x^2+16>0$ при $x>0$, то, как видно из (3.10), (3.11), функция ψ на интервале $(0,4/9)$ убывает от 0 до $-\infty$, затем, на интервале $(4/9,1)$, возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, и, наконец, на луче $(1,+\infty)$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Следовательно, существуют такие точки $x_1\in(4/9,1)$, $x_2\in(1,+\infty)$, что $\psi(x)<0$ при $x\in(0,4/9)\cup(4/9,x_1)\cup(x_2,+\infty)$ и $\psi(x)>0$ при $x\in(x_1,1)\cup(1,x_2)$.

Сочетая (3.7)–(3.9), делаем следующий вывод о поведении интеграла (3.4) на положительной полуоси: на интервале $(0,x_1)$ функция Φ убывает от $+\infty$ до значения $\Phi(x_1)$; на отрезке $[x_1,x_2]$ функция Φ возрастает от $\Phi(x_1)$ до $\Phi(x_2)$; на луче $(x_2,+\infty)$ функция Φ убывает от $\Phi(x_2)$ до 0. (В качестве дополнительной информации укажем, что график функции Φ имеет четыре точки перегиба и вертикальные касательные в двух из таких точек — с абсциссами 4/9 и 1.)

Таким образом, для доказательства неравенства $\Phi(x)>0$ при $x>0$ достаточно проверить положительность функции Φ только в точке минимума $x_1\in(4/9,1)$. Поскольку $\Phi'(x_1)=0$, то (см. (3.8)) выполнено равенство

$$\varphi\left(\frac{9x_1}{4}\right)=\frac{81}{16}\varphi(x_1).$$

Используя его в (3.6), получим, что

$$2\Phi(x_1) = \left(1 - \frac{16}{81x_1^2}\right)\frac{81}{16}\,\varphi(x_1) - \left(1 - \frac{1}{x_1^2}\right)\varphi(x_1) - 8\ln\frac{3}{2} + \frac{10}{9x_1} = \frac{65}{16}\,\varphi(x_1) - 8\ln\frac{3}{2} + \frac{10}{9x_1}.$$

Введем вспомогательную функцию

$$\chi(x) \equiv \frac{65}{16}\,\varphi(x) + \frac{10}{9x} = \frac{65}{16}\,(\ln(1-x) + 3\ln(1+x)) + \frac{10}{9x}, \qquad x \in (4/9, 1),$$

чтобы записать последний результат в компактной форме

$$2\Phi(x_1) = \chi(x_1) - 8\ln\frac{3}{2}. \tag{3.12}$$

Осталось оценить снизу величину (3.12). Для этого проверим, что $x_1 < 0.68 = 17/25$. Действительно, так как

$$\frac{16}{81}\psi\left(\frac{153}{100}\right) - \psi\left(\frac{17}{25}\right) = \frac{16}{81}\left(\ln\frac{53}{100} + 3\ln\frac{253}{100}\right) - \left(\ln\frac{8}{25} + 3\ln\frac{42}{25}\right) > 0.0077,$$

то $\Phi'(17/25) > 0$ ввиду (3.8). Но $17/25 \in (4/9, 1)$, откуда и получаем уточненную локализацию точки минимума: $x_1 \in (4/9, 17/25)$. Убывание функции χ на всем интервале $(4/9, 1)$ влечет неравенство $\chi(x_1) > \chi(17/25)$. Применив это неравенство в (3.12), запишем

$$2\Phi(x_1) > \chi(17/25) - 8\ln\frac{3}{2} = \frac{65}{16}\left(\ln\frac{8}{25} + 3\ln\frac{42}{25}\right) + \frac{250}{153} - 8\ln\frac{3}{2} > 0.0841.$$

Итак, при всех $x > 0$ имеем $\Phi(x) \geqslant \Phi(x_1) > 0$. Лемма доказана. □

Согласно леммам 3.1, 3.2 выбор параметров $a = 9/4$, $b = 3$, $\alpha = -3$ обеспечивает выполнение неравенства (3.1). Другими словами, имеет место (1.9) с очевидным следствием (1.8). Доказательство теоремы 1.1 завершено. Вытекающая из этой теоремы верхняя оценка в (1.12) допускает небольшое усиление: $d(9/4) < 2.95$. Как показывает компьютерный расчет, функция $\Phi(x; 9/4, b, -3)$ с параметром $b \in (2.91, 2.95)$ положительна при всех $x > 0$, а функция $\Phi(x; 9/4, 2.9, -3)$ этим свойством уже не обладает.

Наконец, для доказательства теоремы 1.4 потребуется следующий вспомогательный факт.

Лемма 3.3. *Функция*

$$\Phi(x) = \Phi\left(x; a, s(a) + 3, 0\right) \equiv \int_x^{ax} \left(\ln|1-t| + (s(a)+3)\ln(1+t)\right) dt \tag{3.13}$$

положительна всюду на луче $0 < x < +\infty$ *при любом значении параметра* $a \in (1, 9/8]$.

Доказательство. Рассуждения проводим при фиксированном $a \in (1, 9/8]$. Положительность интеграла (3.13) на интервале $0 < x < a^{-2}$ следует из положительности подынтегральной функции на отрезках $[x, ax] \subset (0, a^{-1})$. Действительно, функция

$$\mathcal{L}(t) \equiv \ln(1-t) + s(a)\ln(1+t)$$

непрерывна и вогнута на полуинтервале $[0, 1)$. Верны также равенства $\mathcal{L}(0) = \mathcal{L}(a^{-1}) = 0$. Отсюда сразу же следует положительность $\mathcal{L}(t)$ при $t \in (0, a^{-1})$. Тем самым, подынтегральная функция в (3.13) на всех отрезках $[x, ax]$ при $0 < x < a^{-2}$ превосходит величину $3\ln(1+t) > 0$.

Имеем далее

$$\int_{1/a}^{1} \ln(1-t)dt = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{a}\right) - \left(1 - \frac{1}{a}\right), \qquad \int_{1/a}^{1} \ln(1+t)dt > \left(1 - \frac{1}{a}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{a}\right).$$

Отсюда и из (3.13) находим

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{1}{a}\right) &> \left(1-\frac{1}{a}\right)\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)-\left(1-\frac{1}{a}\right)+(s(a)+3)\left(1-\frac{1}{a}\right)\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{a}\right)\left[\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)-1+\ln\frac{1}{1-1/a}+3\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)\right]\\ &= \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(3\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)-1\right)\geqslant\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(3\ln\frac{17}{9}-1\right).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\Phi\left(\frac{1}{a}\right) > 0.9\left(1-\frac{1}{a}\right). \tag{3.14}$$

Поскольку функция Φ, будучи непрерывной на $\mathbb{R}$, дифференцируема на интервале $(-1/a, 1/a)$ и ее производная абсолютно интегрируема на этом интервале, то

$$\Phi\left(\frac{1}{a}\right)-\Phi(x)=\int\limits_x^{1/a}\Phi'(y)dy, \qquad x\in\left(-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right).$$

И если вывести оценку сверху

$$\Phi'(y)\leqslant C \qquad \forall y\in\left(a^{-2},a^{-1}\right) \tag{3.15}$$

(заметим, что снизу на интервале (a^{-2}, a^{-1}) производная не ограничена), то при любом значении $x\in[a^{-2},a^{-1})$ мы получим неравенство

$$\Phi(x)=\Phi\left(\frac{1}{a}\right)-\int\limits_x^{1/a}\Phi'(y)dy\geqslant\Phi\left(\frac{1}{a}\right)-C\left(\frac{1}{a}-x\right)\geqslant\Phi\left(\frac{1}{a}\right)-C\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right). \tag{3.16}$$

Из (3.14), (3.16) при всех $x\in[a^{-2},a^{-1})$ имеем

$$\Phi(x)\geqslant 0.9\left(1-\frac{1}{a}\right)-\frac{C}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)=\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(0.9-\frac{C}{a}\right)>\left(1-\frac{1}{a}\right)(0.9-C). \tag{3.17}$$

Покажем, что оценка (3.15) верна, если взять $C = 0.7$. Тогда согласно (3.14), (3.17) положительность $\Phi(x)$ при $a^{-2}\leqslant x\leqslant a^{-1}$ будет доказана. При $x\in(a^{-2},a^{-1})$ запишем

$$\begin{aligned}\Phi'(x)&=a\left(\ln(1-ax)+(s(a)+3)\ln(1+ax)\right)-\left(\ln(1-x)+(s(a)+3)\ln(1+x)\right)\\ &=(a-1)\left(\ln(1-ax)+(s(a)+3)\ln(1+ax)\right)+\ln\frac{1-ax}{1-x}+(s(a)+3)\ln\frac{1+ax}{1+x}.\end{aligned}$$

Ввиду равенств

$$\max\left\{\frac{1-ax}{1-x}\mid\frac{1}{a^2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{a}\right\}=\frac{1-1/a}{1-1/a^2}=\frac{a}{a+1},$$
$$\max\left\{\frac{1+ax}{1+x}\mid\frac{1}{a^2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{a}\right\}=\frac{2}{1+1/a}=\frac{2a}{a+1}$$

и отрицательности функции $\mathcal{L}$ на интервале $(a^{-1},1)$ верна оценка

$$\Phi'(x)<\frac{a-1}{2}\left(s(a)+3+6\ln 2\right)+\ln\frac{a}{a+1}, \qquad x\in\left(a^{-2},a^{-1}\right). \tag{3.18}$$

Действительно, при таких x имеем

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &< (a-1)\left(\ln(1-ax)+(s(a)+3)\ln(1+ax)\right)+\ln\frac{a}{a+1}+(s(a)+3)\ln\frac{2a}{a+1}\\ &= (a-1)\mathcal{L}(ax)+3(a-1)\ln(1+ax)+\ln\frac{a}{a+1}+(s(a)+3)\ln\left(1+\frac{a-1}{a+1}\right)\\ &< 3(a-1)\ln 2+\ln\frac{a}{a+1}+\frac{a-1}{a+1}\,(s(a)+3) < \frac{a-1}{2}\,(s(a)+3+6\ln 2)+\ln\frac{a}{a+1}.\end{aligned}$$

Обозначим $\delta = a-1$ и оценим сверху функцию

$$\Phi_1(a) \equiv (a-1)s(a) = \frac{\delta\,(\ln(1+\delta)-\ln\delta)}{\ln(1+1/a)} \leqslant \frac{\delta\,(\ln(1+\delta)-\ln\delta)}{\ln(17/9)} < \frac{\delta\,(\delta-\ln\delta)}{\ln(17/9)} < 1.6\,\delta\,(\delta-\ln\delta)\,.$$

Легко проверить, что функция $\Phi_2(\delta) \equiv \delta\,(\delta-\ln\delta)$ возрастает на луче $0<\delta<+\infty$. Поэтому при $a\in(1,9/8]$ верна оценка

$$\Phi_1(a) < 1.6\,\Phi_2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1.6}{8}\left(\frac{1}{8}+\ln 8\right) < \frac{1}{2}.$$

Отсюда и из (3.18) выводим оценку производной

$$\Phi'(x) < \frac{1}{4}+\frac{(a-1)(3+6\ln 2)}{2} \leqslant \frac{1}{4}+\frac{3+6\ln 2}{16} < \frac{1}{4}+\frac{7.2}{16} = 0.7, \qquad x\in\left(a^{-2},a^{-1}\right),$$

которую и требовалось доказать. Положительность функции Φ на полуинтервале $(0,a^{-1}]$ обоснована.

По аналогии с выводом (3.14) имеем

$$\Phi(1) > (a-1)\left(\ln(a-1)-1+3\ln 2+s(a)\ln 2\right), \tag{3.19}$$

поскольку

$$\begin{aligned}\Phi(1) &= \int_1^a \left(\ln(t-1)+(s(a)+3)\ln(t+1)\right)dt\\ &= (a-1)\ln(a-1)-(a-1)+(s(a)+3)\int_1^a \ln(t+1)dt\\ &> (a-1)\ln(a-1)-(a-1)+(a-1)\,(s(a)+3)\ln 2\\ &= (a-1)\left(\ln(a-1)-1+3\ln 2+s(a)\ln 2\right).\end{aligned}$$

Из определения величины $s(a)$ сразу же следует оценка снизу

$$s(a)\ln 2 > \ln\frac{1}{a-1} \qquad \forall a>1,$$

которая вместе с (3.19) дает неравенство

$$\Phi(1) > (a-1)(3\ln 2-1) > a-1 > 0.$$

Отсюда видно, что для доказательства положительности функции Φ на луче $[1,+\infty)$ достаточно доказать положительность ее производной на $(1,+\infty)$. Согласно (3.13) при $x>1$ имеем

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= a\left(\ln(ax-1)+(s(a)+3)\ln(ax+1)\right)-\left(\ln(x-1)+(s(a)+3)\ln(x+1)\right)\\ &= (a-1)\left(\ln(ax-1)+(s(a)+3)\ln(ax+1)\right)+\ln\frac{ax-1}{x-1}+(s(a)+3)\ln\frac{ax+1}{x+1}\\ &> (a-1)\left(\ln(ax-1)+(s(a)+3)\ln(ax+1)\right) > (a-1)\left(\ln(a-1)+(s(a)+3)\ln(a+1)\right).\end{aligned}$$

(Мы воспользовались возрастанием функций $\ln(t-1)$ и $\ln(t+1)$ на луче $(1,+\infty)$.) Непосредственно проверяется положительность величины $\ln(a-1)+s(a)\ln(a+1)$ при любом $a>1$. Это сразу же при всех $x>1$ и $a>1$ дает неравенство $\Phi'(x)>3(a-1)\ln(a+1)$, которое доказывает требуемое.

Осталось доказать положительность $\Phi(x)$ на интервале $a^{-1}<x<1$. При этих значениях переменной x справедливо равенство

$$J(x;a)\equiv\int\limits_x^{ax}\ln|1-t|dt=(ax-1)\ln(ax-1)+(1-x)\ln(1-x)-(ax-x).$$

Обозначив $u=ax-1$, $v=1-x$, получим

$$J(x;a)=u\ln u+v\ln v-(u+v),\qquad u+v=x(a-1)<a-1.$$

Нетрудно убедиться в том, что функция двух переменных $H(u,v)\equiv u\ln u+v\ln v$ в треугольнике

$$T_h\equiv\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\mid u>0,v>0,u+v\leqslant h\right\},$$

хотя и не замкнутом, принимает свое наименьшее значение в точке $u=v=h/2$, каково бы ни было число $h\in(0,1/e)$. Поэтому верна оценка снизу

$$J(x;a)\geqslant(a-1)\ln\frac{a-1}{2}-(a-1)\qquad\forall x\in(a^{-1},1)\quad\forall a\in(1,1+1/e).\tag{3.20}$$

Оценим снизу интеграл

$$I(x;a)\equiv\int\limits_x^{ax}\ln(1+t)dt.$$

Ввиду вогнутости функции $\ln(1+t)$ на луче $0<t<+\infty$ интеграл от нее по любому отрезку, лежащему на $(0,+\infty)$, больше длины этого отрезка, умноженной на полусумму значений $\ln(1+t)$ на его концах. Следовательно, при любом $x>a^{-1}$ выполняется неравенство

$$I(x;a)>\int\limits_{a^{-1}}^{1}\ln(1+t)dt>\left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)+\ln 2\right),\tag{3.21}$$

из которого находим

$$s(a)I(x;a)>\frac{a-1}{a}\ln\left(\frac{a}{a-1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\ln 2}{\ln(1+1/a)}\right)\qquad\forall x\in(a^{-1},1).\tag{3.22}$$

А так как согласно (3.13) справедливо представление

$$\Phi(x)=\Phi\left(x;a,s(a)+3,0\right)=J(x;a)+\left(s(a)+3\right)I(x;a),$$

то из (3.20)–(3.22) выводим для $x\in(a^{-1},1)$ оценку

$$\begin{aligned}\Phi(x)>&(a-1)\ln\frac{a-1}{2}-(a-1)+\\&+\frac{a-1}{a}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\ln 2}{\ln(1+1/a)}\right)(\ln a-\ln(a-1))+\frac{3}{2}\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{2}\ln 2\right)\\=&\frac{a-1}{a}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\ln 2}{\ln(1+1/a)}-a\right)\ln\frac{1}{a-1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\ln 2}{\ln(1+1/a)}\right)\ln a\right.\\&\left.+\frac{3}{2}\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{3}{2}-a\right)\ln 2-a\right)\\>&\frac{a-1}{a}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\ln 2}{\ln(1+1/a)}-a\right)\ln\frac{1}{a-1}+\ln a+\frac{3}{2}\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{3}{2}-a\right)\ln 2-a\right).\end{aligned}$$

Отсюда видно, что для завершения доказательства положительности $\Phi(x)$ на луче $x > 0$ при любом значении $a \in (1, 9/8]$ требуется проверить положительность функции

$$\xi(a) = \xi_1(a) + \xi_2(a)$$

на полуинтервале $(1, 9/8]$, где

$$\xi_1(a) \equiv \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\ln 2}{\ln(1+1/a)} - a\right)\ln\frac{1}{a-1}, \qquad \xi_2(a) \equiv \ln a + \frac{3}{2}\ln\left(1+\frac{1}{a}\right) + \left(\frac{3}{2} - a\right)\ln 2 - a.$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $\xi_2(a)$ убывает на луче $[1, +\infty)$ и выполняется неравенство

$$\xi_2\left(\frac{9}{8}\right) = \ln\frac{9}{8} + \frac{3}{2}\ln\frac{17}{9} + \frac{3}{8}\ln 2 - \frac{9}{8} > 0.2.$$

Следовательно,

$$\xi_2(a) > 0.2 \qquad \forall a \in (1, 9/8]. \tag{3.23}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}\xi_1(a) &= \left(1 - a + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{\ln(1+1/a)} - 1\right)\right)\ln\frac{1}{a-1} \\ &= \left(1 - a + \frac{1}{2}\frac{\ln\frac{2a}{a+1}}{\ln(1+1/a)}\right)\ln\frac{1}{a-1} > \left(1 - a + \frac{\ln\frac{2a}{a+1}}{2\ln 2}\right)\ln\frac{1}{a-1}.\end{aligned}$$

Воспользовавшись хорошо известной оценкой логарифма $\ln t > (t-1)/t$ ($\forall t > 1$), взяв $t = 2a/(a+1) > 1$ при том же $a \in (1, 9/8]$, а затем — убыванием функции $t \ln t$ на интервале $0 < t < 1/e$, запишем

$$\begin{aligned}\xi_1(a) &> \left(1 - a + \frac{a-1}{4a\ln 2} - 1\right)\ln\frac{1}{a-1} = (a-1)\left(1 - \frac{1}{4a\ln 2}\right)\ln(a-1) \\ &\geqslant \left(1 - \frac{2}{9\ln 2}\right)(a-1)\ln(a-1) \geqslant \left(1 - \frac{2}{9\ln 2}\right)\frac{1}{8}\ln\frac{1}{8} = -\frac{3}{8}\left(\ln 2 - \frac{2}{9}\right).\end{aligned}$$

Тем самым,

$$\xi_1(a) > -0.18 \qquad \forall a \in (1, 9/8]. \tag{3.24}$$

Из (3.23), (3.24) при любом $a \in (1, 9/8]$ находим

$$\xi(a) = \xi_1(a) + \xi_2(a) > 0.02,$$

что завершает проверку положительности функции Φ на интервале $(a^{-1}, 1)$.

Итак, интеграл (3.13) положителен при всех $x > 0$, каково бы ни было значение параметра $a \in (1, 9/8]$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1.4, заключающееся в выводе двойного неравенства (1.15), будет несложным. С одной стороны, сочетая оценки (1.13) и (2.24), получим при любом $a > 1$, что

$$d(a) \geqslant s(a) > \log_2\frac{1}{a-1}.$$

С другой стороны, в силу лемм 3.1 и 3.3 при всех $a \in (1, 9/8]$ верна оценка

$$d(a) \leqslant s(a) + 3,$$

и нужно лишь проверить выполнение неравенства

$$s(a) < \log_2\frac{1}{a-1} + \frac{1}{2} \qquad \forall a \in (1, 9/8].$$

Для таких a имеем

$$s(a) - \log_2 \frac{1}{a-1} = \frac{1}{\ln(1+1/a)} \left(\ln a + \ln \frac{2a}{a+1} \cdot \log_2 \frac{1}{a-1} \right) < \frac{1}{\ln \frac{17}{9}} \left(\ln \frac{9}{8} + \frac{a-1}{a+1} \log_2 \frac{1}{a-1} \right)$$
$$< \frac{1}{\ln \frac{17}{9}} \left(\ln \frac{9}{8} - \frac{1}{2\ln 2}(a-1)\ln(a-1) \right) < \frac{\ln \frac{9}{8} + \frac{3}{16}}{\ln \frac{17}{9}} < 0.49,$$

что и требовалось. Неравенство (1.15) получено. Его очевидным следствием является асимптотика (1.14). Теорема 1.4 доказана.

В заключение отметим, что задача исследования поведения оптимального показателя $d(a)$ при больших значениях a еще ждет своего решения. Оно должно включать оценку $d(a)$ сверху и возможное уточнение неравенства (1.13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Valiron. *Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulièr* // Ann. Fac. Sci. Toulouse. **5**, 117–257 (1913).
2. A. Wiman. *Über eine Eigenschaft der ganzen Functionen von der Höhe Null* // Math. Ann. **76**, 197–211 (1915).
3. M.L. Cartwright. *On the minimum modulus of integral functions* // Proc. Cambridge Philos. Soc. **30**, 412–420 (1934).
4. W.K. Hayman. *The minimum modulus of large integral functions* // Proc. London Math. Soc. **2**:3, 469–512 (1952).
5. R.P. Boas. *Entire Functions.* New York: Academic Press Inc. 1954.
6. А.А. Гольдберг, И.В. Островский. *Распределение значений мероморфных функций.* М.: Наука. 1970.
7. W.K. Hayman. *Subharmonic Functions. V. 2.* London, New York: Academic Press. 1989.
8. А.А. Гольдберг, И.В. Островский. *Новые исследования о росте и распределении значений целых и мероморфных функций рода нуль* // УМН. **16**:4(100), 51–62 (1961).
9. W.K. Hayman, E.F. Lingham. *Research Problems in Function Theory* (Fiftieth Anniversary Edition). Problem Books in Mathematics. Springer. 2019.
10. А.М. Гайсин. *Решение проблемы Пойа* // Матем. сб. **193**:6, 39–60 (2002).
11. А.Ю. Попов. *Оценка снизу минимума модуля аналитической функции на окружности через отрицательную степень ее нормы на большей окружности* // Труды МИАН. **319** (2022).
12. А.Ю. Попов. *Новая оценка снизу минимума модуля аналитической функции* // Челяб. физ.-матем. журн. **4**:2, 155–164 (2019).

Антон Юрьевич Попов,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Ленинские горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: aypopov.msu@yandex.ru

Владимир Борисович Шерстюков,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Ленинские горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: shervb73@gmail.com