УДК 517.9

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕДУКЦИИ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ХИРОТЫ-МИВЫ

И.Т. ХАБИБУЛЛИН, А.Р. ХАКИМОВА

Аннотация. Для нелинейных дискретных уравнений в размерности $1+1$ имеются легко проверяемые симметрийные критерии интегрируемости, которые лежат в основе классификационных алгоритмов. Актуальная проблема создания эффективных методов классификации интегрируемых дискретных уравнений с тремя и более независимыми переменными остается открытой, поскольку в многомерье симметрийный подход теряет свою эффективность из-за трудностей, связанных с нелокальностями.

В наших недавних работах мы обнаружили характерное свойство дискретных уравнений в 3D, которое, по-видимому, является эффективным критерием интегрируемости трехмерных уравнений. Выяснилось, что многие известные интегрируемые цепочки, включая уравнения типа двумеризованной цепочки Тоды, уравнения типа Тоды с одной непрерывной и двумя дискретными независимыми переменными, уравнения типа Хироты-Мивы, где все независимые переменные являются дискретными, характеризуются тем, что они допускают обрывы специального вида по одной из дискретных переменных, которые сводят цепочку к системе уравнений с двумя независимыми переменными, обладающей повышенной интегрируемостью, они имеют полные наборы интегралов по каждой из характеристик, т.е. являются интегрируемыми в смысле Дарбу. Другими словами характеристические алгебры полученных конечно-полевых систем имеют конечную размерность. В настоящей работе мы приводим примеры, подтверждающие гипотезу о том, что наличие иерархии интегрируемых в смысле Дарбу двумерных редукций присуще всем интегрируемым дискретным уравнениям типа Хироты-Мивы. А именно мы проверяем, что решеточное уравнение Тоды и ее модифицированный аналог также допускают упомянутые выше редукции.

Ключевые слова: интегрируемость, решеточное уравнение Тоды, характеристические интегралы, характеристическая алгебра.

Mathematics Subject Classification: 37K10, 37K30

1. Введение

В настоящее время полностью дискретные интегрируемые уравнения с тремя независимыми переменными активно изучаются многими авторами (см. [1]–[7]). Наиболее известными представителями этого класса являются такие модели как уравнение Хироты-Мивы, Y-система, решеточное уравнение Тоды, решеточное уравнение КП, решеточное уравнение Sine-Gordon и др. Широкий класс интегрируемых дискретных моделей в 3D можно найти в работе Ферапонтова и др. [8]. Девять уравнений из списка, приведенного в [8] являются уравнениями типа октаэдра, все они точечными заменами приводятся к виду

$$u^j_{n+1,m+1} = f\left(u^{j-1}_{n+1,m}, u^j_{n+1,m}, u^j_{n,m}, u^j_{n,m+1}, u^{j+1}_{n,m+1}\right), \qquad (1.1)$$

I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, Algebraic reductions of discrete equations of Hirota-Miwa type.

© Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. 2022.

Исследование А.Р. Хакимовой выполнено при поддержке конкурса «Молодая математика России».
Поступила 22 августа 2022 г.

где искомая функция $u = u^j_{n,m}$ зависит от трех целочисленных аргументов j, n, m, функция f определена и является аналитической в некоторой области $D \subset C^5$.

Уравнение (1.1) связывает значения неизвестной функции, соответствующие вершинам октаэдра на трехмерной решетке.

В нашей работе [9] была высказана гипотеза, что все интегрируемые уравнения вида (1.1) допускают конечно-полевые редукции в виде систем дискретных уравнений «гиперболического» типа

$$\begin{aligned} u^1_{n+1,m+1} &= f^1\left(u^1_{n+1,m}, u^1_{n,m}, u^1_{n,m+1}, u^2_{n,m+1}\right), \\ u^j_{n+1,m+1} &= f\left(u^{j-1}_{n+1,m}, u^j_{n+1,m}, u^j_{n,m}, u^j_{n,m+1}, u^{j+1}_{n,m+1}\right), \quad 2 \leqslant j \leqslant N-1, \\ u^N_{n+1,m+1} &= f^N\left(u^{N-1}_{n+1,m}, u^N_{n+1,m}, u^N_{n,m}, u^N_{n,m+1}\right), \end{aligned} \tag{1.2}$$

являющихся интегрируемыми в смысле Дарбу. В [9] гипотеза была подтверждена для трех моделей из упомянутого выше списка. Цель настоящей работы, показать, что гипотеза об интегрируемых по Дарбу редукциях справедлива и для двух других моделей из этого класса, а именно, для решеточного уравнения Тоды

$$u^j_{n+1,m+1} = \frac{\left(u^{j+1}_{n,m+1} - u^j_{n+1,m}\right) u^j_{n,m+1} u^{j-1}_{n+1,m}}{u^j_{n,m}\left(u^j_{n,m+1} - u^{j-1}_{n+1,m}\right)} \tag{1.3}$$

и модифицированного варианта решеточного уравнения Тоды

$$u^j_{n+1,m+1} = \frac{\left(u^j_{n+1,m} - u^{j-1}_{n+1,m}\right)\left(u^{j+1}_{n,m+1} - u^j_{n,m}\right) u^j_{n,m+1}}{u^j_{n,m}\left(u^{j+1}_{n,m+1} - u^j_{n,m+1}\right)} + u^{j-1}_{n+1,m}. \tag{1.4}$$

Наличие иерархии интегрируемых по Дарбу конечно-полевых редукций является важным свойством уравнения (1.1). Во-первых, поскольку Дарбу интегрируемые уравнения в принципе могут быть решены явно (см., например, работы [10]–[12], где найдены в замкнутом виде общие решения дифференциальных аналогов системы (1.2)), то редукции позволяют найти частные решения исходного трехмерного уравнения. Во-вторых, такие иерархии связаны с характеристическими алгебрами, условие конечномерности которых, можно использовать для вывода условий интегрируемости нелинейных цепочек в 3D (см. [13]–[17]). Отметим, что проблема классификации интегрируемых по Дарбу уравнений в частных производных гиперболического типа активно исследуется начиная с XIX века. Обзор результатов по этой тематике можно найти в работах [18]–[22]. Обобщение метода Дарбу на дифференциально-разностные и чисто дискретные уравнения обсуждается в работах [23]–[27], [6].

Кратко остановимся на содержании работы. В §2 мы поясняем смысл таких понятий, как полный набор интегралов и интегрируемость по Дарбу систем дискретных уравнений. Вводим понятие характеристической алгебры Ли-Райнхарта, формулируем алгебраический критерий интегрируемости по Дарбу. В §§3,4 исследуются системы дискретных уравнений порядков $N = 2$ и $N = 3$, полученные путем наложения специальных условий обрыва из нелинейных цепочек (1.3), (1.4). Показано, что эти четыре системы уравнений являются интегрируемыми в смысле Дарбу. Для них описаны характеристические алгебры по каждому из направлений n и m, предъявлены полные наборы интегралов. Отметим, что в случае $N = 1$ система (1.2) для обоих цепочек (1.3), (1.4) вырождается в одно и то же скалярное уравнение:

$$u_{n+1,m+1} = \frac{u_{n+1,m} u_{n,m+1}}{u_{n,m}},$$

которое также является интегрируемым по Дарбу, его интегралы имеют вид:

$$I = \frac{u_{n+1,m}}{u_{n,m}}, \qquad J = \frac{u_{n,m+1}}{u_{n,m}}.$$

Результаты работы подтверждают гипотезу о том, что наличие иерархии Дарбу интегрируемых редукций вида (1.2) является критерием интегрируемости трехмерных цепочек вида (1.1).

2. Необходимые определения и формулы

В этом разделе мы обсудим понятие интегрируемости в смысле Дарбу системы дискретных уравнений гиперболического типа

$$u_{n+1,m+1} = f\left(n, m, u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1}\right), \tag{2.1}$$

где искомый объект $u = u_{n,m}$ является векторно-значной функцией $u = \left(u^1, u^2, \ldots, u^N\right)^T$, компоненты которой зависят от двух целочисленных переменных n и m. Правая часть уравнения имеет вид $f = \left(f^1, f^2, \ldots, f^N\right)^T$. Поскольку все вершины прямоугольного графа, на котором задано уравнение (2.1) являются равноправными, то предполагается, что уравнение (2.1) однозначно разрешимо относительно каждой из переменных $u_{n,m}$, $u_{n+1,m}$, $u_{n,m+1}$, т.е. справедливы еще три соотношения

$$\begin{aligned} u_{n+1,m-1} &= f^{1,-1}\left(n, m, u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m-1}\right), \\ u_{n-1,m+1} &= f^{-1,1}\left(n, m, u_{n,m}, u_{n-1,m}, u_{n,m+1}\right), \\ u_{n-1,m-1} &= f^{-1,-1}\left(n, m, u_{n,m}, u_{n-1,m}, u_{n,m-1}\right). \end{aligned}$$

В основе интегрируемости по Дарбу лежит понятие характеристического интеграла. Впервые это понятие было введено Дарбу в работе [28] при исследовании уравнения в частных производных гиперболического типа $u_{x,y} = f(x, y, u, u_x, u_y)$.

Определение 2.1. *Функция вида*

$$I = I\left(n, m, u_{n-k,m}, u_{n-k+1,m}, \ldots, u_{n+s,m}\right), \quad k, s \geqslant 0, \tag{2.2}$$

зависящая от n, m и сдвигов по n динамической переменной $u_{n,m}$, называется m-интегралом системы (2.1) *порядка $k+s$, если существует пара чисел $k_1, k_2 = 1, \ldots, N$, что произведение*

$$\frac{\partial I}{\partial u^{k_1}_{n+s,m}} \cdot \frac{\partial I}{\partial u^{k_2}_{n-k,m}}$$

отлично от тождественного нуля и для любого натурального r выполняется следующее равенство $D^r_m I = I$ или, в более развернутом виде

$$D^r_m I\left(n, m, u_{n-k,m}, u_{n-k+1,m}, \ldots, u_{n+s,m}\right) = I\left(n, m+r, u_{n-k,m}, u_{n-k+1,m}, \ldots, u_{n+s,m}\right), \tag{2.3}$$

где все смешанные сдвиги переменной $u_{n,m}$ исключены в силу системы (2.1).

Функция вида $I = I(n)$ называется тривиальным m-интегралом.

Здесь D_m обозначает сдвиг аргумента m, например, $D_m y(m) = y(m+1)$.

Замечание 2.1. *Устоявшийся в литературе термин «интеграл» для функции I, введенный по аналогии с дифференциальной версией системы* (2.1) *(см., например,* [23]*), не совсем соответствует смыслу равенства* (2.3). *Возможно более подходящим был бы термин инвариант оператора сдвига D_m.*

Поскольку операторы D_n и D_m коммутируют, то оператор D_n переводит m-интеграл снова в m-интеграл. Поэтому в формуле (2.2) можно положить $k = 0$.

Определение 2.2. *Будем говорить, что система* (1.2) *допускает полный набор m-интегралов, если существует набор интегралов*

$$I^j\left(n, m, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+s_j}\right), \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.4}$$

что выполняется неравенство

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial I^1}{\partial u^1_{n,m}} & \frac{\partial I^1}{\partial u^2_{n,m}} & \dots & \frac{\partial I^1}{\partial u^N_{n,m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial I^N}{\partial u^1_{n,m}} & \frac{\partial I^N}{\partial u^2_{n,m}} & \dots & \frac{\partial I^N}{\partial u^N_{n,m}} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.5}$$

Система уравнений (1.2) *называется интегрируемой по Дарбу, если она допускает полные наборы интегралов по каждому из характеристических направлений n и m.*

Эффективный критерий интегрируемости системы гиперболических уравнений в смысле Дарбу выражается в терминах характеристической алгебры. Важность понятия характеристической алгебры при исследовании систем гиперболических уравнений экспоненциального типа была осознана в работах [29], [10], где это понятие и было введено.

Назовем операторы

$$Y_{j,1} = D_m^{-1}\frac{\partial}{\partial u^j_{n,m+1}}D_m, \quad j = 1, 2, \dots, N \tag{2.6}$$

характеристическими операторами первого порядка в направлении m. В [9] доказано, что любой m-интеграл является решением системы уравнений

$$Y_{j,1}I = 0, \qquad X_{j,1}I = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \tag{2.7}$$

где

$$X_{j,1} = \frac{\partial}{\partial u^j_{n,m-1}}. \tag{2.8}$$

Кроме того m-интегралы лежат в ядре высших характеристических операторов по m, которые имеют вид

$$Y_{j,k} = D_m^{-k}\frac{\partial}{\partial u^j_{n,m+1}}D_m^k - X_{j,k-1}, \quad \text{где} \quad X_{j,k} = \frac{\partial}{\partial u^j_{n,m-k}}, \tag{2.9}$$

где $k \geqslant 2$.

Заметим, что операторы $Y_{j,k}$ можно представить в виде векторных полей. Например, для операторов первого порядка имеем

$$\begin{aligned} Y_{j,1} =& \frac{\partial}{\partial u^j_{n,m}} + \sum_{s=1}^N D_m^{-1}\left(\frac{\partial f^s}{\partial u^j_{n,m+1}}\right)\frac{\partial}{\partial u^s_{n+1,m}} + \sum_{s=1}^N D_m^{-1}\left(\frac{\partial f^{-1,1,s}}{\partial u^j_{n,m+1}}\right)\frac{\partial}{\partial u^s_{n-1,m}} \\ &+ \sum_{s=1}^N D_m^{-1}\left(\frac{\partial f^s_{10}}{\partial u^j_{n,m+1}}\right)\frac{\partial}{\partial u^s_{n+2,m}} + \sum_{s=1}^N D_m^{-1}\left(\frac{\partial f^{-1,1,s}_{-10}}{\partial u^j_{n,m+1}}\right)\frac{\partial}{\partial u^s_{n-2,m}} + \dots, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где f^s, $f^{-1,1,s}$, f^s_{10}, $f^{-1,1,s}_{-10}$ компоненты векторов f, $f^{-1,1}$, f_{10}, $f^{-1,1}_{-10}$ с номером s, $f_{i0} = f(u_{n+i,m}, u_{n+i+1,m}, u_{n+i,m+1})$, $i \neq 0$.

Для построения векторных полей, соответствующих высшим характеристическим операторам, можно воспользоваться соотношениями:

$$\begin{aligned} Y_{j,k+1} =& \sum_{s=1}^N D_m^{-1}\left(Y_{j,k}\left(f^s\right)\right)\frac{\partial}{\partial u^s_{n+1,m}} + \sum_{s=1}^N D_m^{-1}\left(Y_{j,k}\left(f^{-1,1,s}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u^s_{n-1,m}} \\ &+ \sum_{s=1}^N D_m^{-1}\left(Y_{j,k}\left(f^s_{10}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u^s_{n+2,m}} + \sum_{s=1}^N D_m^{-1}\left(Y_{j,k}\left(f^{-1,1,s}_{-10}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u^s_{n-2,m}} + \dots. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Напомним определение характеристической алгебры в направлении m (см. [9]). При этом нам понадобится некоторое обобщение понятия алгебры Ли, в котором допускается умножение операторов не только на константы, но и на некоторые функции.

Определение 2.3 ([30], [31]). *Пусть R — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей и A — коммутативная R-алгебра. Пара (A, L) называется* алгеброй Ли-Райнхарта, *если*

1) L является алгеброй Ли над R, которая действует на A левыми дифференцированиями, т.е.

$$X(ab) = X(a)b + aX(b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in A, \ X \in L;$$

2) алгебра Ли L является A-модулем.

Пара (A, L) должна удовлетворять следующим условиям совместности

$$[X, aY] = X(a)Y + a[X, Y] \quad \text{для всех} \quad X, Y \in L, \ a \in A;$$
$$(aX)(b) = a(X(b)) \quad \text{для всех} \quad a, b \in A, \ X \in L.$$

Определение 2.4. *Предположим, что семейство характеристических операторов по направлению m системы* (1.2) *удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) $\forall j$ существует число $s(j)$, что любой оператор $Y_{j,k}$, линейно выражается через операторы

$$Y_{j,1}, \ Y_{j,2}, \ Y_{j,3}, \ \ldots, \ Y_{j,s(j)} \tag{2.12}$$

с коэффициентами, зависящими от динамических переменных:

$$Y_{j,k} = \lambda_1 Y_{j,1} + \lambda_2 Y_{j,2} + \lambda_3 Y_{j,3} + \ldots + \lambda_{s(j)} Y_{j,s(j)}; \tag{2.13}$$

2) алгебра Ли-Райнхарта L_m, порожденная операторами $\{X_{j,k}, Y_{j,k}\}_{j=1,k=1}^{N,K}$, где $K = \max s(j)$ над полем рациональных функций от динамических переменных из следующего класса:

$$S_k = \{u_{n,m-j}\}_{j=1}^{K} \cup \{u_{n+i,m}\}_{i=-\infty}^{+\infty}, \tag{2.14}$$

имеет конечную размерность.

Алгебру L_m будем называть характеристической алгеброй по направлению m. При выполнении условий 1) и 2) будем говорить, что система (1.2) *допускает конечномерную характеристическую алгебру по направлению m.*

Замечание 2.2. *Примеры характеристических алгебр приведены в разделах 3 и 4. В алгебрах, рассмотренных в §3, для $\forall j$ $s(j) = 1$. В алгебрах L_m из §4 числа $s(j)$ также равны единице, в то время как для алгебр L_n $s(j) = 2$.*

Связь интегралов и характеристической алгебры выражается в следующем критерии. Для систем дифференциальных уравнений такие критерии давно известны (см., например, [32]).

Теорема 2.1 ([9]). *Система* (1.2) *допускает полный набор m-интегралов тогда и только тогда, когда она допускает конечномерную характеристическую алгебру по направлению m.*

Другими словами, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2 ([9]). *Система* (1.2) *является интегрируемой в смысле Дарбу тогда и только тогда, когда она допускает конечномерную характеристическую алгебру по обоим направлениям m и n.*

Отображение, переводящее оператор $Z \in L_m$ в оператор $D_n Z D_n^{-1}$, является автоморфизмом алгебры L_m. Это следует из соотношений, задающих действие отображения на генераторах алгебры:

$$D_n X_{j,k} D_n^{-1} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=k}^{K} \alpha_{j,k,i,s} X_{i,s}, \tag{2.15}$$

$$D_nY_{j,k}D_n^{-1}=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{k}\beta_{j,k,i,s}Y_{i,s}+\sum_{s=1}^{k-1}\gamma_{j,k,i,s}X_{i,s}\right)-D_nX_{j,k-1}D_n^{-1}, \tag{2.16}$$

где коэффициенты определяются согласно равенствам:

$$\alpha_{j,k,i,s}=D_n\left(X_{j,k}D_m^{1-s}f^{-1,1,i}\right),$$
$$\beta_{j,k,i,s}=D_m^{-k}\left(D_n\frac{\partial}{\partial u^j_{n,m+1}}D_m^{k-s}f^{-1,1,i}\right),$$
$$\gamma_{j,k,i,s}=D_m^{-k}\left(D_n\frac{\partial}{\partial u^j_{n,m+1}}D_m^{k-s-1}f^{-1,1,i}\right),$$

где $f^{-1,1,i}$ совпадает с i-той компонентой вектора $f^{-1,1}$.

Ключевую роль при исследовании характеристической алгебры L_m имеет следующая лемма.

Лемма 2.1. *Допустим, что векторное поле*

$$K=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha^j(k)\frac{\partial}{\partial u^j_{n+k,m}}+\alpha^j(-k)\frac{\partial}{\partial u^j_{n-k,m}}\right),$$

удовлетворяет условию

$$D_nKD_n^{-1}=hK, \tag{2.17}$$

с некоторым сомножителем h, тогда $K=0$.

Аналог Леммы 2.1 применительно к случаю систем дифференциальных уравнений гиперболического типа использовал в своих работах А.Б. Шабат (см., например, [32]).

3. Решеточное уравнение Тоды

Накладывая на цепочку (1.3) формальные условия обрыва $u^0_{n,m}=\infty$, $u^{N+1}_{n,m}=0$, получим систему дискретных уравнений вида (1.2):

$$\begin{aligned}
u^1_{n+1,m+1}&=-\frac{\left(u^2_{n,m+1}-u^1_{n+1,m}\right)u^1_{n,m+1}}{u^1_{n,m}},\\
u^j_{n+1,m+1}&=\frac{\left(u^{j+1}_{n,m+1}-u^j_{n+1,m}\right)u^j_{n,m+1}u^{j-1}_{n+1,m}}{u^j_{n,m}\left(u^j_{n,m+1}-u^{j-1}_{n+1,m}\right)},\quad 2\leqslant j\leqslant N-1,\\
u^N_{n+1,m+1}&=-\frac{u^N_{n+1,m}u^N_{n,m+1}u^{N-1}_{n+1,m}}{u^N_{n,m}\left(u^N_{n,m+1}-u^{N-1}_{n+1,m}\right)}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Ниже мы покажем, что при $N=2$ и $N=3$ система (3.1) является интегрируемой по Дарбу. Для этого в обоих случаях мы предъявим конечные базисы для характеристических алгебр и построим полные наборы m-интегралов и n-интегралов.

3.1. Случай $N=2$.

В этом случае (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned}
u_{n+1,m+1}&=-\frac{\left(w_{n,m+1}-u_{n+1,m}\right)u_{n,m+1}}{u_{n,m}},\\
w_{n+1,m+1}&=-\frac{w_{n+1,m}w_{n,m+1}u_{n+1,m}}{w_{n,m}\left(w_{n,m+1}-u_{n+1,m}\right)},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $u_{n,m}:=u^1_{n,m}$, $w_{n,m}:=u^2_{n,m}$.

Построим характеристические операторы системы (3.2). В силу формулы (2.8) находим, что операторы $X_{1,1}$ и $X_{2,1}$ имеют вид: $X_{1,1}=\dfrac{\partial}{\partial u_{n,m-1}}$, $\quad X_{2,1}=\dfrac{\partial}{\partial w_{n,m-1}}$. Операторы $Y_{1,1}$, $Y_{2,1}$ находим по формуле (2.10), где

$$
\begin{aligned}
f^1 &= -\frac{\left(w_{n,m+1}-u_{n+1,m}\right)u_{n,m+1}}{u_{n,m}},\\
f^2 &= -\frac{w_{n+1,m}w_{n,m+1}u_{n+1,m}}{w_{n,m}\left(w_{n,m+1}-u_{n+1,m}\right)},\\
f^{-1,1,1} &= \frac{u_{n,m+1}u_{n-1,m}\left(u_{n,m}w_{n,m}+w_{n,m+1}w_{n-1,m}\right)}{u_{n,m}^2w_{n,m}},\\
f^{-1,1,2} &= \frac{w_{n,m+1}w_{n-1,m}u_{n,m}}{u_{n,m}w_{n,m}+w_{n,m+1}w_{n-1,m}}.
\end{aligned}
$$

Здесь $u_{n+1,m+1}=f^1$, $w_{n+1,m+1}=f^2$, $u_{n-1,m+1}=f^{-1,1,1}$, $w_{n-1,m+1}=f^{-1,1,2}$. Приведем явно несколько коэффициентов векторных полей $Y_{1,1}$, $Y_{2,1}$:

$$
\begin{aligned}
Y_{1,1} =& \frac{\partial}{\partial u_{n,m}}+\frac{u_{n+1,m}}{u_{n,m}}\frac{\partial}{\partial u_{n+1,m}}+\frac{u_{n-1,m}}{u_{n,m}}\frac{\partial}{\partial u_{n-1,m}}+\ldots,\\
Y_{2,1} =& \frac{\partial}{\partial w_{n,m}}-\frac{u_{n,m}}{u_{n,m-1}}\frac{\partial}{\partial u_{n+1,m}}+\left(\frac{w_{n+1,m}}{w_{n,m}}+\frac{u_{n,m}w_{n+1,m}}{u_{n+1,m}u_{n,m-1}}\right)\frac{\partial}{\partial w_{n+1,m}}\\
&+\frac{u_{n-1,m}w_{n-1,m}}{w_{n,m}u_{n,m-1}}\frac{\partial}{\partial u_{n-1,m}}+\frac{w_{n-1,m}\left(u_{n,m-1}-w_{n-1,m}\right)}{w_{n,m}u_{n,m-1}}\frac{\partial}{\partial w_{n-1,m}}+\ldots.
\end{aligned}
$$

Найдем коммутаторы операторов $X_{1,1}$, $X_{2,1}$, $Y_{1,1}$ и $Y_{2,1}$:

$$
\begin{aligned}
R_{1,1}=[X_{1,1},Y_{1,1}] =& 0,\\
R_{2,1}=[X_{1,1},Y_{2,1}] =& \frac{u_{n,m}}{u_{n,m-1}^2}\frac{\partial}{\partial u_{n+1,m}}-\frac{u_{n,m}w_{n+1,m}}{u_{n+1,m}u_{n,m-1}^2}\frac{\partial}{\partial w_{n+1,m}}\\
&-\frac{u_{n-1,m}w_{n-1,m}}{w_{n,m}u_{n,m-1}^2}\frac{\partial}{\partial u_{n-1,m}}+\frac{w_{n-1,m}^2}{w_{n,m}u_{n,m-1}^2}\frac{\partial}{\partial w_{n-1,m}}+\ldots,\\
R_{3,1}=[X_{2,1},Y_{1,1}] =& 0, \qquad R_{4,1}=[X_{2,1},Y_{2,1}]=0.
\end{aligned}
$$

Теорема 3.1. *Набор операторов $X_{1,1}$, $X_{2,1}$, $Y_{1,1}$, $Y_{2,1}$, $R_{2,1}$ составляет базис в характеристической алгебре L_m системы* (3.2), *т.е.* $\dim L_m=5$.

Доказательство. Докажем сначала, что коммутаторы оператора $R_{2,1}$ с операторами $X_{1,1}$, $X_{2,1}$, $Y_{1,1}$, $Y_{2,1}$ образуют линейно зависимые операторы. Для этого уточним действие автоморфизма $Z\longrightarrow D_nZD_n^{-1}$ на перечисленные операторы. Пользуясь формулами (2.15), (2.16), найдем:

$$
\begin{aligned}
D_nX_{1,1}D_n^{-1} =& \frac{u_{n,m}}{u_{n+1,m}}X_{1,1}-\frac{u_{n,m}^2w_{n,m}w_{n,m-1}}{u_{n+1,m}u_{n,m-1}\left(u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}\right)}X_{2,1},\\
D_nX_{2,1}D_n^{-1} =& \frac{w_{n,m}\left(u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}\right)}{u_{n+1,m}u_{n,m-1}w_{n+1,m}}X_{2,1},\\
D_nY_{1,1}D_n^{-1} =& \frac{u_{n,m}}{u_{n+1,m}}Y_{1,1},\\
D_nY_{2,1}D_n^{-1} =& \frac{w_{n,m}}{w_{n+1,m}\left(u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}\right)}\left(u_{n,m}^2Y_{1,1}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}Y_{2,1}\right),\\
D_nR_{2,1}D_n^{-1} =& \frac{u_{n,m}w_{n,m}}{w_{n+1,m}\left(u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}\right)}\left(u_{n,m-1}R_{2,1}-\frac{u_{n,m}}{u_{n+1,m}}X_{1,1}+\frac{u_{n,m}w_{n,m-1}}{u_{n+1,m}u_{n,m-1}}X_{2,1}\right)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

$$- \frac{u_{n,m}^2 w_{n,m}}{w_{n+1,m}\left(u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}\right)^2}\left(u_{n,m}Y_{1,1}-w_{n,m}Y_{2,1}\right).$$

Перейдем теперь к рассмотрению действия автоморфизма на операторы $P_{1,1}=[X_{1,1},R_{2,1}]$, $P_{2,1}=[X_{2,1},R_{2,1}]$, $Q_{1,1}=[Y_{1,1},R_{2,1}]$, $Q_{2,1}=[Y_{2,1},R_{2,1}]$. В данном случае имеем:

$$\begin{aligned}
D_nP_{1,1}D_n^{-1}=&\frac{2u_{n,m}^3 w_{n,m}}{w_{n+1,m}\left(u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}\right)^3}\left(u_{n,m}Y_{1,1}-w_{n,m}Y_{2,1}\right)\\
&+\frac{2u_{n,m}^3 w_{n,m}}{u_{n+1,m}w_{n+1,m}\left(u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}\right)^2}\left(w_{n,m}R_{2,1}+X_{1,1}\right.\\
&\left.-\frac{w_{n,m-1}}{u_{n,m-1}}X_{2,1}+\frac{u_{n,m-1}\left(u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}\right)}{2u_{n,m}}P_{1,1}\right),\\
D_nP_{2,1}D_n^{-1}=&\frac{u_{n,m}w_{n,m}^2}{u_{n+1,m}w_{n+1,m}^2}P_{2,1},\\
D_nQ_{1,1}D_n^{-1}=&\frac{u_{n,m}^2 w_{n,m}u_{n,m-1}}{u_{n+1,m}w_{n+1,m}\left(u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}\right)}Q_{1,1},\\
D_nQ_{2,1}D_n^{-1}=&\frac{u_{n,m}w_{n,m}^2 u_{n,m-1}}{w_{n+1,m}^2\left(u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}\right)^2}\left(u_{n,m}^2Q_{1,1}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}Q_{2,1}\right).
\end{aligned}\tag{3.4}$$

Пользуясь первым из соотношений (3.4), легко проверить, что имеет место равенство:

$$D_n\left(P_{1,1}-\frac{2}{u_{n,m-1}}R_{2,1}\right)D_n^{-1}=\frac{u_{n,m}^2 w_{n,m}u_{n,m-1}}{u_{n+1,m}w_{n+1,m}\left(u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}\right)}\left(P_{1,1}-\frac{2}{u_{n,m-1}}R_{2,1}\right).$$

Отсюда, в силу Леммы 2.1, найдем равенство: $P_{1,1}=\dfrac{2}{u_{n,m-1}}R_{2,1}$. Из соотношений (3.4) и Леммы 2.1 вытекает, что $P_{2,1}=Q_{1,1}=Q_{2,1}=0$.

Теперь покажем, что высшие операторы $Y_{1,2}$, $Y_{2,2}$ также линейно выражаются через $R_{2,1}$. Вычислим действие автоморфизма $Z\longrightarrow D_nZD_n^{-1}$ на высшие операторы $Y_{1,2}$ и $Y_{2,2}$. Воспользуемся формулами (2.16) и найдем:

$$\begin{aligned}
D_nY_{1,2}D_n^{-1}=&-\frac{u_{n,m}^2 w_{n,m}}{u_{n+1,m}\left(u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}\right)}\left(X_{1,1}-\frac{w_{n,m-1}}{u_{n,m-1}}X_{2,1}-\frac{u_{n+1,m}u_{n,m-1}}{u_{n,m}w_{n,m}}Y_{1,2}\right)\\
&-\frac{u_{n,m}^2 w_{n,m}}{\left(u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}\right)^2}\left(u_{n,m}Y_{1,1}-w_{n,m}Y_{2,1}\right),\\
D_nY_{2,2}D_n^{-1}=&\frac{u_{n,m}w_{n,m}\left(u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}\right)}{w_{n+1,m}\left(u_{n,m}w_{n,m}u_{n,m-2}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}u_{n,m-2}+u_{n,m}u_{n,m-1}w_{n,m-1}\right)}\\
&\cdot\left(\frac{u_{n,m-1}}{u_{n+1,m}}X_{1,1}-\frac{w_{n,m-1}}{w_{n+1,m}}X_2+\frac{u_{n,m-1}}{u_{n+1,m}}Y_{1,2}+\frac{u_{n,m-2}\left(u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}\right)}{u_{n+1,m}u_{n,m-1}u_{n,m}}Y_{2,2}\right.\\
&\left.+\frac{u_{n,m}u_{n,m-1}}{u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}}Y_{1,1}-\frac{w_{n,m}u_{n,m-1}}{u_{n,m}w_{n,m}+u_{n+1,m}u_{n,m-1}}Y_{2,1}\right).
\end{aligned}$$

Из найденных соотношений с учетом аналогичной формулы (3.3) для оператора $R_{2,1}$ и в силу Леммы 2.1 легко видеть, что $Y_{1,2}=w_{n,m}R_{2,1}$, $Y_{2,2}=-\dfrac{u_{n,m-1}^2}{u_{n,m-2}}R_{2,1}$. □

Таким образом, мы доказали что алгебра L_m пятимерна, следовательно m-интеграл минимального порядка зависит от пяти переменных. Будем искать m-интеграл в виде

$I = I(u_{n,m}, w_{n,m}, u_{n+1,m}, w_{n+1,m}, w_{n-1,m})$, удовлетворяющий системе уравнений

$$Y_{1,1}I = 0; \qquad Y_{2,1}I = 0; \qquad R_{2,1}I = 0,$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial I}{\partial u_{n,m}} + \frac{u_{n+1,m}}{u_{n,m}} \frac{\partial I}{\partial u_{n+1,m}} = 0, \\
&\frac{\partial I}{\partial w_{n,m}} - \frac{u_{n,m}}{u_{n,m-1}} \frac{\partial I}{\partial u_{n+1,m}} + \left(\frac{w_{n+1,m}}{w_{n,m}} + \frac{u_{n,m} w_{n+1,m}}{u_{n+1,m} u_{n,m-1}} \right) \frac{\partial I}{\partial w_{n+1,m}} \\
&\qquad + \frac{w_{n-1,m} \left(u_{n,m-1} - w_{n-1,m} \right)}{w_{n,m} u_{n,m-1}} \frac{\partial I}{\partial w_{n-1,m}} = 0, \\
&\frac{\partial I}{\partial u_{n+1,m}} - \frac{w_{n+1,m}}{u_{n+1,m}} \frac{\partial I}{\partial w_{n+1,m}} + \frac{w_{n-1,m}^2}{u_{n,m} w_{n,m}} \frac{\partial I}{\partial w_{n-1,m}} = 0.
\end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, найдем полный набор m-интегралов:

$$I_1 = \frac{u_{n+1,m} w_{n+1,m}}{u_{n,m} w_{n,m}}, \qquad I_2 = \frac{u_{n+1,m}}{u_{n,m}} + \frac{w_{n,m}}{w_{n-1,m}}.$$

Аналогично можно показать, что $\dim L_n = 5$, базис состоит из операторов:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{1,1} &= \frac{\partial}{\partial u_{n-1,m}}, \qquad \tilde{X}_{2,1} = \frac{\partial}{\partial w_{n-1,m}}, \\
\tilde{Y}_{1,1} &= \frac{\partial}{\partial u_{n,m}} + \left(\frac{u_{n,m+1} w_{n,m+1} w_{n-1,m}}{u_{n,m}^2 w_{n,m}} + \frac{u_{n,m+1}}{u_{n,m}} \right) \frac{\partial}{\partial u_{n,m+1}} - \frac{w_{n,m+1}^2 w_{n-1,m}}{u_{n,m}^2 w_{n,m}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m+1}} \\
&\quad + \frac{u_{n,m-1} - w_{n-1,m}}{u_{n,m}} \frac{\partial}{\partial u_{n,m-1}} + \frac{w_{n-1,m} w_{n,m-1}}{u_{n,m} u_{n,m-1}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}} + \ldots, \\
\tilde{Y}_{2,1} &= \frac{\partial}{\partial w_{n,m}} + \frac{w_{n,m+1}}{w_{n,m}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m+1}} + \frac{w_{n,m-1}}{w_{n,m}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}} + \ldots, \\
\tilde{R}_{3,1} &= \left[\tilde{X}_{2,1}, \tilde{Y}_{1,1} \right] = \frac{u_{n,m+1} w_{n,m+1}}{u_{n,m}^2 w_{n,m}} \frac{\partial}{\partial u_{n,m+1}} - \frac{w_{n,m+1}^2}{u_{n,m}^2 w_{n,m}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m+1}} \\
&\quad - \frac{1}{u_{n,m}} \frac{\partial}{\partial u_{n,m-1}} + \frac{w_{n,m-1}}{u_{n,m} u_{n,m-1}} \frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}} + \ldots.
\end{aligned}$$

Соответственно, искомые n-интегралы системы (3.2) удовлетворяют системе уравнений

$$\tilde{Y}_{1,1} J = 0; \qquad \tilde{Y}_{2,1} J = 0; \qquad \tilde{R}_{3,1} J = 0, \quad \text{где} \quad J = J(u_{n,m}, w_{n,m}, u_{n,m+1}, w_{n,m+1}, u_{n,m-1})$$

и имеют вид:

$$J_1 = \frac{u_{n,m+1} w_{n,m+1}}{u_{n,m} w_{n,m}}, \qquad J_2 = \frac{u_{n,m-1}}{u_{n,m}} + \frac{w_{n,m}}{w_{n,m+1}}.$$

3.2. Случай $N = 3$. В этом случае система (3.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
u_{n+1,m+1} &= -\frac{\left(v_{n,m+1} - u_{n+1,m} \right) u_{n,m+1}}{u_{n,m}}, \\
v_{n+1,m+1} &= \frac{\left(w_{n,m+1} - v_{n+1,m} \right) v_{n,m+1} u_{n+1,m}}{v_{n,m} \left(v_{n,m+1} - u_{n+1,m} \right)}, \\
w_{n+1,m+1} &= -\frac{w_{n+1,m} w_{n,m+1} v_{n+1,m}}{w_{n,m} \left(w_{n,m+1} - v_{n+1,m} \right)},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где $u_{n,m} := u_{n,m}^1$, $v_{n,m} := u_{n,m}^2$, $w_{n,m} := u_{n,m}^3$.

По аналогии с предыдущим примером, можно показать, что базис алгебры L_m системы (3.5), состоит из операторов $X_{1,1} = \dfrac{\partial}{\partial u_{n,m-1}}$, $X_{2,1} = \dfrac{\partial}{\partial v_{n,m-1}}$, $X_{3,1} = \dfrac{\partial}{\partial w_{n,m-1}}$, $Y_{1,1}$, $Y_{2,1}$, $Y_{3,1}$, $R = [X_{1,1}, Y_{3,1}]$, $P = [X_{1,1}, Y_{2,1}]$, $Q = [X_{2,1}, Y_{3,1}]$, т.е. $\dim L_m = 9$.

Решая систему линейных уравнений

$$Y_{1,1}I = 0; \qquad Y_{2,1}I = 0; \qquad Y_{3,1}I = 0; \qquad RI = 0; \qquad PI = 0; \qquad QI = 0,$$

на неизвестную $I = I\left(u_{n,m}, v_{n,m}, w_{n,m}, u_{n+1,m}, v_{n+1,m}, w_{n+1,m}, v_{n-1,m}, w_{n-1,m}, u_{n+2,m}\right)$ найдем полный набор m-интегралов:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{u_{n+1,m}v_{n+1,m}w_{n+1,m}}{u_{n,m}v_{n,m}w_{n,m}},\\
I_2 &= \frac{v_{n,m}w_{n,m}}{v_{n-1,m}w_{n-1,m}} + \frac{w_{n,m}u_{n+1,m}}{w_{n-1,m}u_{n,m}} + \frac{u_{n+1,m}v_{n+1,m}}{u_{n,m}v_{n,m}},\\
I_3 &= \frac{u_{n+2,m}}{u_{n+1,m}} + \frac{v_{n+1,m}}{v_{n,m}} + \frac{w_{n,m}}{w_{n-1,m}}.
\end{aligned}$$

Кратко остановимся на алгебре L_n для (3.5), ее базис состоит из операторов $\tilde{X}_{1,1} = \dfrac{\partial}{\partial u_{n-1,m}}$, $\tilde{X}_{2,1} = \dfrac{\partial}{\partial v_{n-1,m}}$, $\tilde{X}_{3,1} = \dfrac{\partial}{\partial w_{n-1,m}}$, $\tilde{Y}_{1,1}$, $\tilde{Y}_{2,1}$, $\tilde{Y}_{3,1}$, $\tilde{R} = \left[\tilde{X}_{2,1}, \tilde{Y}_{1,1}\right]$, $\tilde{P} = \left[\tilde{X}_{3,1}, \tilde{Y}_{1,1}\right]$, $\tilde{Q} = \left[\tilde{X}_{3,1}, \tilde{Y}_{2,1}\right]$. Приведем полный набор независимых n-интегралов системы (3.5):

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{u_{n,m+1}v_{n,m+1}w_{n,m+1}}{u_{n,m}v_{n,m}w_{n,m}},\\
J_2 &= \frac{u_{n,m-1}v_{n,m-1}}{u_{n,m}v_{n,m}} + \frac{u_{n,m-1}w_{n,m}}{u_{n,m}w_{n,m+1}} + \frac{v_{n,m}w_{n,m}}{v_{n,m+1}w_{n,m+1}},\\
J_3 &= \frac{w_{n,m+1}}{w_{n,m+2}} + \frac{v_{n,m}}{v_{n,m+1}} + \frac{u_{n,m-1}}{u_{n,m}}.
\end{aligned}$$

4. Модифицированное решеточное уравнение Тоды

В этом разделе мы исследуем Дарбу интегрируемые редукции модифицированного решеточного уравнения Тоды (1.4), соответствующие случаям $N = 2$ и $N = 3$.

Конечно-полевая система для (1.4) имеет вид:

$$\begin{aligned}
u^1_{n+1,m+1} &= \frac{\left(u^2_{n,m+1} - u^1_{n,m}\right)u^1_{n+1,m}u^1_{n,m+1}}{u^1_{n,m}\left(u^2_{n,m+1} - u^1_{n,m+1}\right)},\\
u^j_{n+1,m+1} &= \frac{\left(u^j_{n+1,m} - u^{j-1}_{n+1,m}\right)\left(u^{j+1}_{n,m+1} - u^j_{n,m}\right)u^j_{n,m+1}}{u^j_{n,m}\left(u^{j+1}_{n,m+1} - u^j_{n,m+1}\right)} + u^{j-1}_{n+1,m},\\
u^N_{n+1,m+1} &= \frac{\left(u^N_{n+1,m} - u^{N-1}_{n+1,m}\right)u^N_{n,m+1} + u^N_{n,m}u^{N-1}_{n+1,m}}{u^N_{n,m}},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где $2 \leqslant j \leqslant N-1$. Систему (4.1) можно получить наложением следующих формальных условий обрыва:

$$u^0_{n,m} = 0, \qquad u^{N+1}_{n,m} = \infty.$$

4.1. Случай $N = 2$**.** Здесь мы имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}
u_{n+1,m+1} &= \frac{\left(w_{n,m+1} - u_{n,m}\right)u_{n+1,m}u_{n,m+1}}{u_{n,m}\left(w_{n,m+1} - u_{n,m+1}\right)},\\
w_{n+1,m+1} &= \frac{\left(w_{n+1,m} - u_{n+1,m}\right)w_{n,m+1}}{w_{n,m}} + u_{n+1,m},
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где $u_{n,m} := u^1_{n,m}$, $w_{n,m} := u^2_{n,m}$.

По аналогии с предыдущими примерами построим базис для L_m. Он состоит из пяти операторов $X_{1,1} = \dfrac{\partial}{\partial u_{n,m-1}}$, $X_{2,1} = \dfrac{\partial}{\partial w_{n,m-1}}$, $Y_{1,1}$, $Y_{2,1}$, $R = [X_{1,1}, Y_{2,1}]$, а искомые m-интегралы имеют вид:

$$I_1 = \frac{u_{n+1,m}}{w_{n,m}} - \frac{w_{n+1,m}}{w_{n,m}} - \frac{u_{n+1,m}}{u_{n,m}}, \qquad I_2 = \frac{u_{n,m}w_{n-1,m}}{u_{n+1,m}\left(u_{n,m} - w_{n,m}\right)}.$$

Остановимся на характеристической алгебре L_n системы (4.2) более подробно, поскольку данный случай отличается от ранее исследованных примеров. А именно, для построения n-интегралов системы (4.2) необходимо воспользоваться также высшими операторами. Построим сначала характеристические операторы первого порядка $\tilde{Y}_{1,1}$ и $\tilde{Y}_{2,1}$, пользуясь формулой (2.10). Выпишем несколько первых коэффициентов этих операторов:

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_{1,1} =& \frac{\partial}{\partial u_{n,m}} + \frac{u_{n,m+1}}{u_{n,m}}\frac{\partial}{\partial u_{n,m+1}} + \frac{w_{n,m+1} - w_{n,m}}{u_{n,m} - w_{n,m}}\frac{\partial}{\partial w_{n,m+1}} \\
&+ \frac{u_{n,m-1}}{u_{n,m}}\frac{\partial}{\partial u_{n,m-1}} + \frac{u_{n,m-1}\left(w_{n,m} - w_{n,m-1}\right)}{u_{n,m}\left(w_{n,m} - u_{n,m-1}\right)}\frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}} + \frac{u_{n,m+2}}{u_{n,m}}\frac{\partial}{\partial u_{n,m+2}} + \ldots, \\
\tilde{Y}_{2,1} =& \frac{\partial}{\partial w_{n,m}} + \frac{w_{n,m+1} - u_{n,m}}{w_{n,m} - u_{n,m}}\frac{\partial}{\partial w_{n,m+1}} + \frac{w_{n,m-1} - u_{n,m-1}}{w_{n,m} - u_{n,m-1}}\frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}} + \ldots.
\end{aligned}$$

Легко проверить, что коммутаторы операторов $\tilde{Y}_{1,1}$, $\tilde{Y}_{2,1}$ и $\tilde{X}_{1,1} = \dfrac{\partial}{\partial u_{n-1,m}}$, $\tilde{X}_{2,1} = \dfrac{\partial}{\partial w_{n-1,m}}$ равны нулю. Поэтому система дифференциальных уравнений

$$\tilde{X}_{1,1}J = 0, \qquad \tilde{X}_{2,1}J = 0, \qquad \tilde{Y}_{1,1}J = 0, \qquad \tilde{Y}_{2,1}J = 0$$

имеет нетривиальное решение. Однако это решение не является интегралом системы (4.2). Другими словами, характеристическая алгебра имеет более высокую размерность и для ее построения нужно исследовать также и высшие характеристические операторы. Найдем сначала операторы второго порядка $\tilde{Y}_{1,2}$, $\tilde{Y}_{2,2}$. Вычислим первые несколько коэффициентов этих операторов, пользуясь формулой (2.11):

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_{1,2} =& \frac{\left(w_{n,m} - u_{n,m}\right)\left(u_{n,m+1} - u_{n,m}\right)u_{n,m+1}}{\left(w_{n-1,m} - u_{n-1,m}\right)\left(w_{n,m+1} - u_{n,m}\right)u_{n,m}}\frac{\partial}{\partial u_{n,m+1}} + \frac{w_{n,m+1} - w_{n,m}}{w_{n-1,m} - u_{n-1,m}}\frac{\partial}{\partial w_{n,m+1}} \\
&+ \frac{\left(u_{n,m} - u_{n,m-1}\right)u_{n,m-1}}{\left(w_{n-1,m} - u_{n-1,m}\right)u_{n,m}}\frac{\partial}{\partial u_{n,m-1}} + \frac{\left(w_{n,m} - u_{n,m}\right)\left(w_{n,m} - w_{n,m-1}\right)u_{n,m-1}}{\left(w_{n-1,m} - u_{n-1,m}\right)\left(w_{n,m} - u_{n,m-1}\right)u_{n,m}}\frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}} + \ldots, \\
\tilde{Y}_{2,2} =& \frac{\left(w_{n,m} - u_{n,m}\right)\left(u_{n,m+1} - u_{n,m}\right)u_{n,m+1}u_{n-1,m}}{\left(w_{n-1,m} - u_{n-1,m}\right)\left(w_{n,m+1} - u_{n,m}\right)u_{n,m}w_{n-1,m}}\frac{\partial}{\partial u_{n,m+1}} \\
&+ \frac{\left(w_{n,m+1} - w_{n,m}\right)u_{n-1,m}}{\left(w_{n-1,m} - u_{n-1,m}\right)w_{n-1,m}}\frac{\partial}{\partial w_{n,m+1}} + \frac{\left(u_{n,m} - u_{n,m-1}\right)u_{n,m-1}u_{n-1,m}}{\left(w_{n-1,m} - u_{n-1,m}\right)u_{n,m}w_{n-1,m}}\frac{\partial}{\partial u_{n,m-1}} \\
&+ \frac{\left(w_{n,m} - u_{n,m}\right)\left(w_{n,m} - w_{n,m-1}\right)u_{n,m-1}u_{n-1,m}}{\left(w_{n-1,m} - u_{n-1,m}\right)\left(w_{n,m} - u_{n,m-1}\right)u_{n,m}w_{n-1,m}}\frac{\partial}{\partial w_{n,m-1}} + \ldots.
\end{aligned}$$

Можно показать, что $\tilde{Y}_{2,2} = \dfrac{u_{n-1,m}}{w_{n-1,m}}\tilde{Y}_{1,2}$, а коммутаторы оператора $\tilde{Y}_{1,2}$ с $\tilde{X}_{1,1}$ и $\tilde{X}_{2,1}$ имеют вид: $\left[\tilde{X}_{1,1}, \tilde{Y}_{1,2}\right] = \dfrac{1}{w_{n-1,m} - u_{n-1,m}}\tilde{Y}_{1,2}$, $\left[\tilde{X}_{2,1}, \tilde{Y}_{1,2}\right] = -\dfrac{1}{w_{n-1,m} - u_{n-1,m}}\tilde{Y}_{1,2}$. Следовательно, можем предположить, что характеристическая алгебра L_n состоит из операторов $\tilde{X}_{1,1}$, $\tilde{X}_{2,1}$, $\tilde{Y}_{1,1}$, $\tilde{Y}_{2,1}$, $\tilde{Y}_{1,2}$. Решая линейную систему уравнений

$$\tilde{Y}_{1,1}J = 0; \qquad \tilde{Y}_{2,1}J = 0; \qquad \tilde{Y}_{1,2}J = 0, \quad \text{где} \quad J = J(u_{n,m}, w_{n,m}, u_{n,m+1}, w_{n,m+1}, u_{n,m-1}),$$

находим функции:

$$J_1 = \frac{w_{n,m} - u_{n,m}}{w_{n,m+1} - u_{n,m}} + \frac{u_{n,m}\left(w_{n,m+1} - w_{n,m}\right)}{u_{n,m+1}\left(w_{n,m+1} - u_{n,m}\right)},$$
$$J_2 = \frac{u_{n,m}}{u_{n,m-1}} - \frac{u_{n,m}\left(w_{n,m+1} - u_{n,m}\right)\left(u_{n,m} - u_{n,m-1}\right)}{u_{n,m-1}\left(u_{n,m} - w_{n,m}\right)\left(u_{n,m+1} - u_{n,m}\right)}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что найденные функции образуют полный набор n-интегралов. Следовательно, система (4.2) является интегрируемой в смысле Дарбу.

4.2. Случай $N = 3$. Формальные условия обрыва $u^0_{n,m} = 0$, $u^4_{n,m} = \infty$ приводят цепочку (1.4) к системе уравнений

$$\begin{aligned} u_{n+1,m+1} &= \frac{\left(v_{n,m+1} - u_{n,m}\right)u_{n+1,m}u_{n,m+1}}{u_{n,m}\left(v_{n,m+1} - u_{n,m+1}\right)},\\ v_{n+1,m+1} &= \frac{\left(v_{n+1,m} - u_{n+1,m}\right)\left(w_{n,m+1} - v_{n,m}\right)v_{n,m+1}}{v_{n,m}\left(w_{n,m+1} - v_{n,m+1}\right)} + u_{n+1,m},\\ w_{n+1,m+1} &= \frac{\left(w_{n+1,m} - v_{n+1,m}\right)w_{n,m+1}}{w_{n,m}} + v_{n+1,m}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $u_{n,m} := u^1_{n,m}$, $v_{n,m} := u^2_{n,m}$, $w_{n,m} := u^3_{n,m}$.

Здесь $\dim L_m = 9$, а базис алгебры состоит из операторов $X_{1,1} = \dfrac{\partial}{\partial u_{n,m-1}}$, $X_{2,1} = \dfrac{\partial}{\partial v_{n,m-1}}$, $X_{3,1} = \dfrac{\partial}{\partial w_{n,m-1}}$, $Y_{1,1}$, $Y_{2,1}$, $Y_{3,1}$, $R = [X_{1,1}, Y_{2,1}]$, $P = [X_{1,1}, Y_{3,1}]$, $Q = [X_{2,1}, Y_{3,1}]$. Искомый набор независимых m-интегралов находим путем решения линейной системы уравнений

$$Y_{1,1}I = 0; \qquad Y_{2,1}I = 0; \qquad Y_{3,1}I = 0; \qquad RI = 0; \qquad PI = 0; \qquad QI = 0,$$

где $I = I\left(u_{n,m}, v_{n,m}, w_{n,m}, u_{n+1,m}, v_{n+1,m}, w_{n+1,m}, v_{n-1,m}, w_{n-1,m}, u_{n+2,m}\right)$:

$$I_1 = \frac{u_{n+1,m}}{v_{n,m}} + \frac{v_{n+1,m}}{w_{n,m}} - \frac{u_{n+1,m}}{u_{n,m}} - \frac{v_{n+1,m}}{v_{n,m}} - \frac{w_{n+1,m}}{w_{n,m}},$$
$$I_2 = \frac{u_{n+2,m}\left(u_{n+1,m} - v_{n+1,m}\right)\left(v_{n,m} - w_{n,m}\right)}{u_{n+1,m}v_{n,m}w_{n-1,m}},$$
$$I_3 = \frac{u_{n+1,m}\left(u_{n,m} - v_{n,m}\right)}{u_{n,m}v_{n-1,m}} + \frac{u_{n+1,m}\left(v_{n,m} - w_{n,m}\right)}{u_{n,m}w_{n-1,m}} - \frac{\left(u_{n+1,m} - v_{n+1,m}\right)\left(v_{n,m} - w_{n,m}\right)}{v_{n,m}w_{n-1,m}}.$$

Характеристическая алгебра L_n системы (4.3) порождается операторами $\tilde{X}_{1,1} = \dfrac{\partial}{\partial u_{n-1,m}}$, $\tilde{X}_{2,1} = \dfrac{\partial}{\partial v_{n-1,m}}$, $\tilde{X}_{3,1} = \dfrac{\partial}{\partial w_{n-1,m}}$, $\tilde{Y}_{1,1}$, $\tilde{Y}_{2,1}$, $\tilde{Y}_{3,1}$, $\tilde{X}_{1,2} = \dfrac{\partial}{\partial u_{n-2,m}}$, $\tilde{X}_{2,2} = \dfrac{\partial}{\partial v_{n-2,m}}$, $\tilde{X}_{3,2} = \dfrac{\partial}{\partial w_{n-2,m}}$, $\tilde{Y}_{1,2}$, $\tilde{Y}_{3,2}$ и их кратными коммутаторами. Базис алгебры состоит из перечисленных выше операторов и оператора $\tilde{R} = \left[\tilde{X}_{3,1}, \tilde{Y}_{1,2}\right]$. Далее мы ищем функции $J = J(u_{n,m}, v_{n,m}, w_{n,m}, u_{n,m+1}, v_{n,m+1}, w_{n,m+1}, u_{n,m-1}, v_{n,m-1}, w_{n,m+2})$, которые аннулируются всеми базисными операторами. В результате находим полный набор независимых n-интегралов:

$$J_1 = \frac{\left(v_{n,m+1} - v_{n,m}\right)\left(u_{n,m} - u_{n,m-1}\right)\left(w_{n,m+2} - w_{n,m+1}\right)}{u_{n,m-1}\left(u_{n,m} - v_{n,m}\right)\left(v_{n,m+1} - w_{n,m+1}\right)},$$

$$J_2 = \frac{(u_{n,m+1} - u_{n,m})(v_{n,m+1} - v_{n,m})(w_{n,m+1} - w_{n,m})}{u_{n,m+1}(v_{n,m+1} - u_{n,m})(w_{n,m+1} - v_{n,m})},$$

$$J_3 = \frac{v_{n,m} - w_{n,m}}{w_{n,m+1} - w_{n,m}} - \frac{u_{n,m-1}(v_{n,m} - u_{n,m})(w_{n,m+1} - v_{n,m})}{(v_{n,m+1} - v_{n,m})(w_{n,m+1} - w_{n,m})(u_{n,m} - u_{n,m-1})} + \frac{u_{n,m}(v_{n,m} - w_{n,m})(v_{n,m} - u_{n,m-1})}{(w_{n,m+1} - w_{n,m})(u_{n,m} - u_{n,m-1})(v_{n,m} - v_{n,m-1})}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Hirota. *Discrete analogue of a generalized Toda equation* // J. Phys. Soc. Japan. **50**:11, 3785–3791 (1981).
2. T. Miwa. *On Hirota's difference equation* // Proc. Japan Acad. Ser. A. **58**:1, 9–12 (1982).
3. I. Krichever, P. Wiegmann. A. Zabrodin, *Elliptic solutions to difference non-linear equations and related many-body problems* // Commun. Math. Phys. **193**:2, 373–396 (1998).
4. А.В. Забродин. *Разностные уравнения Хироты* // ТМФ. **113**:2, 179–230 (1997).
5. A. Kuniba, T. Nakanishi, J. Suzuki. *T-systems and Y-systems in integrable systems* // J. Phys. A: Math. Theor. **44**:10, 103001, 146 pp. (2011).
6. С.В. Смирнов. *Интегрируемость по Дарбу дискретных двумеризованных цепочек Тоды* // ТМФ. **182**:2, 231–255 (2015).
7. А.К. Погребков. *Высшие разностные уравнения Хироты и их редукции* // ТМФ. **197**:3, 444–463 (2018).
8. E.V. Ferapontov, V.S. Novikov, I. Roustemoglou. *On the classification of discrete Hirota-type equations in 3D* // Int. Math. Res. Not. IMRN **2015**:13, 4933–4974 (2015).
9. И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова. *Интегралы и характеристические алгебры систем дискретных уравнений на прямоугольном графе* // ТМФ. **213**:2, 320–346 (2022).
10. А.Н. Лезнов, А.Б. Шабат. *Условия обрыва рядов теории возмущений* // Интегрируемые системы. БФАН СССР. 34–44 (1982).
11. Т.В. Чекмарев. *Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными* // Дифференц. уравнения. **18**:9, 1614–1622 (1982).
12. А.В. Жибер, О.С. Костригина. *Задача Гурса для нелинейных гиперболических систем уравнений с интегралами первого и второго порядка* // Уфимск. матем. журн. **3**:3, 67–79 (2011).
13. I. Habibullin, M. Poptsova. *Classification of a Subclass of Two-Dimensional Lattices via Characteristic Lie Rings* // SIGMA. **13**, 26 pp. (2015).
14. И.Т. Хабибуллин, М.Н. Кузнецова. *О классификационном алгоритме интегрируемых двумеризованных цепочек на основе алгебр Ли–Райнхарта* // ТМФ. **203**:1, 161–173 (2020).
15. E.V. Ferapontov, I.T. Habibullin, M.N. Kuznetsova, V.S. Novikov. *On a class of 2D integrable lattice equations* // J. Math. Phys. **61**:7, 073505 (2020).
16. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova. *Characteristic Lie Algebras of Integrable Differential-Difference Equations in 3D* // J. Phys. A: Math. Theor. **54**:29, 295202 (2021).
17. I.T. Habibullin, M.N. Kuznetsova. *An algebraic criterion of the Darboux integrability of differential-difference equations and systems* // J. Phys. A: Math. Theor. **54**:2021, 505201, 20 pp. (2021).
18. E. Goursat. *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre* // Annales de la faculté des Sciences de l'Université de Toulouse: Mathématiques, Serie 2. **1**:1, 31–78 (1899).
19. E. Goursat. *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre* // Annales de la faculté des Sciences de l'Université de Toulouse: Mathématiques, Serie 2. **1**:4, 439–463 (1899).
20. А.В. Жибер, Н.Х. Ибрагимов, А.Б. Шабат. *Уравнения типа Лиувилля* // Докл. АН СССР. **249**:1, 26–29 (1979).
21. А.В. Жибер, В.В. Соколов. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* // УМН. **56**:1(337), 63–106 (2001).
22. О.В. Капцов. *О проблеме классификации Гурса* // Программирование. **2**, 68–71 (2012).
23. В.Э. Адлер, С.Я. Старцев. *О дискретных аналогах уравнения Лиувилля* // ТМФ. **121**:2, 271–284 (1999).

24. I. Habibullin. *Characteristic Algebras of Fully Discrete Hyperbolic Type Equations* // SIGMA. **1**, 23 pp. (2005).
25. I. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan. *Complete list of Darboux integrable chains of the form* $t_{1,x} = t_x + d(t, t_1)$ // J. Math. Phys. **50**, 1–23 (2009).
26. R.N. Garifullin, R.I. Yamilov. *Generalized symmetry classification of discrete equations of a class depending on twelve parameters* // J. Phys. A: Math. Theor. **45**:34, 23 pp. (2012).
27. G. Gubbiotti, R. I. Yamilov. *Darboux integrability of trapezoidal H4 and H4 families of lattice equations I: first integrals* // J. Phys. A: Math. Theor. **50**:34, 345205, 26 pp. (2017).
28. G. Darboux. *Lecons sur la théorie générale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal.* Paris: Gauthier-Villars. 1896.
29. А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов. *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана.* Препринт. Уфа: БФАН СССР. 1981.
30. G. Rinehart. *Differential forms for general commutative algebras* // Trans. Amer. Math. Soc. **108**, 195–222 (1963).
31. Д.В. Миллионщиков, С.В. Смирнов. *Характеристические алгебры и интегрируемые системы экспоненциального типа* // Уфимск. матем. журн. **13**:2, 44–73 (2021).
32. А.В. Жибер, Р.Д. Муртазина, И.Т. Хабибуллин, А.Б. Шабат. *Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения.* М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2012.

Исмагил Талгатович Хабибуллин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `habibullinismagil@gmail.com`

Айгуль Ринатовна Хакимова,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `aigul.khakimova@mail.ru`