ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 3 (2022). С. 23-34.

УДК 517.53

МАКСИМАЛЬНЫЙ ЧЛЕН РЯДА ДИРИХЛЕ, СХОДЯЩЕГОСЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ: ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

А.М. ГАЙСИН, Т.И. БЕЛОУС

Аннотация. Исследуется задача об эквивалентности логарифмов максимальных членов адамаровской композиции (измененного ряда) $\sum\limits_n a_n b_n e^{\lambda_n z}$ рядов Дирихле $\sum\limits_n a_n e^{\lambda_n z}$ и $\sum\limits_n b_n e^{\lambda_n z}$ с положительными показателями, область сходимости которых есть полуплоскость. Аналогичная задача для целых рядов Дирихле впервые изучалась А.М. Гайсиным в 2003 году — им был тогда получен критерий устойчивости максимального члена $\mu(\sigma) = \max\limits_{n\geqslant 1}\{|a_n|e^{\lambda_n\sigma}\}$. Этот результат оказался весьма полезным при изучении асимптотических свойств ряда Дирихле на произвольных кривых, уходящих в бесконечность, а именно при доказательстве известной гипотезы Полиа.

Как в случае целых рядов Дирихле, и в случае рядов, сходящихся лишь в полуплоскости, в задачах такого типа ключевую роль играют формулы А.Ф. Леонтьева для коэффициентов. Функции соответствующей биортогональной системы содержат множитель — производную характеристической функции в точках λ_n $(n \geqslant 1)$. Это обстоятельство естественным образом и приводит к рассматриваемой здесь постановке задачи об устойчивости максимального члена.

Получен критерий того, чтобы логарифм максимального члена ряда Дирихле, область сходимости которого есть полуплоскость, на асимптотическом множестве был эквивалентным логарифму максимального члена измененного ряда.

Ключевые слова: ряд Дирихле, полуплоскость сходимости, максимальный член, адамаровская композиция, асимптотическое множество.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

Устойчивость максимального члена ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \tag{1.1}$$

абсолютно сходящегося во всей плоскости, впервые исследована в [1]. При этом свойство устойчивости максимального члена сыграло важную роль при доказательстве проблемы Полиа (более подробно об этом см. в [1]). Позже результаты работы [1] были перенесены на случай полуплоскости (см. [2], [3]). Так, в [2] была доказана теорема об устойчивости максимального члена ряда (1.1), абсолютно сходящегося в полуплоскости

A.M. Gaisin, T.I. Belous, The maximum term of a Dirichlet series converging in the half-plane: a theorem on stability.

Работа поддержана РНФ (грант № 21-11-00168).

Поступила 2 марта 2022 г.

$\Pi_0 = \{\mathrm{s} : \mathrm{Re s} < 0\}$. А статья [3] была посвящена применениям этой теоремы к исследованию поведения ряда Дирихле (1.1) на кривой, произвольным образом приближающейся к границе полуплоскости Π_0 — прямой сходимости. Для наглядности стоит пояснить суть и значимость рассматриваемых в [3] задач в частном случае, а именно для лакунарных степенных рядов

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \qquad 0 < p_n \uparrow \infty, \qquad p_n \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

область сходимости которых есть единичный круг $D(0,1) = \{z : |z| < 1\}$. Пусть γ — любая кривая, начинающаяся в $D(0,1)$ и оканчивающаяся на границе $D(0,1)$ или асимптотически приближающаяся к ней, например, по спирали. Рассматривается специальный измененный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(p_n) z^{p_n}, \tag{1.3}$$

где

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{{p_n}^2}\right).$$

При выполнении условий на $\{p_n\}$, обеспечивающих эквивалентность логарифмов максимальных членов рядов (1.2), (1.3) (т.е. при устойчивости максимального члена ряда (1.1)), в [3] показано следующее: существует последовательность $\{\xi_n\}, \xi_n \in \gamma$, $|\xi_n| \to 1$, такая, что

$$\ln M_f(|\xi_n|) = (1 + o(1)) \ln |f(\xi_n)|,$$

где

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \qquad 0 < r < 1.$$

Как видно, в [2] устойчивость максимального члена ряда Дирихле (1.1) (или ряда (1.2)) рассматривается в связи с конкретными задачами, исследуемыми в [3]. По этой причине ограничения на последовательность показателей $\Lambda = \{\lambda_n\}$ в [2], [3] оказались достаточно жесткими, а именно λ_n являются нулями целой функции конечного порядка. Однако проблема устойчивости максимального члена является и самостоятельной задачей. Поэтому условия на показатели λ_n могут быть существенно ослаблены.

Цель настоящей статьи — для наиболее широкого класса последовательностей $\Lambda = \{\lambda_n\}$ доказать критерий устойчивости максимального члена ряда (1.1) в терминах множителей b_n измененного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n z}$, сходящегося также в полуплоскости Π_0.

2. Определения. Основной результат

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, удовлетворяющая условию:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0. \tag{2.1}$$

Через $D_c(\Lambda)$ обозначим класс всех функций F, представимых в полуплоскости $\Pi_c = \mathrm{s} : \mathrm{Re s} < \mathrm{c} \quad (-\infty < c \leqslant \infty)$ рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{2.2}$$

сходящимися лишь в данной полуплоскости. Из условия (2.1) следует, что ряд (2.2) сходится в полуплоскости Π_c абсолютно, а его сумма F — аналитическая в Π_c функция [4].

Наряду с рядом (2.2) введем в рассмотрение и ряд

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{2.3}$$

где $B = \{b_n\}$ — последовательность комплексных чисел $b_n (b_n \neq 0$ при $n \geqslant N)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln |b_n|}{\lambda_n} = 0. \tag{2.4}$$

Тогда ряд (2.3) также абсолютно сходится в полуплоскости Π_c, а F^* — аналитическая в этой полуплоскости функция. Условие (2.4) позволяет рассматривать и ряды Дирихле $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n b_n^{-1} e^{\lambda_n s}$, абсолютно сходящиеся в полуплоскости Π_c.

Если F — функция, заданная в полуплоскости Π_0 рядом (2.2), а

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n s}, \tag{2.5}$$

то ряд (2.3) есть адамаровская композиция рядов (2.2) и (2.5), т.е.

$$(F * G)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s} = F^*(s).$$

Ясно, что если $F \in D_0(\Lambda)$, то $F^* \in D_0(\Lambda)$ (это следует из условия (2.4)).

Пусть $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$ — максимальные члены рядов (2.2) и (2.3) соответственно. Через L обозначим класс всех непрерывных, неограниченно возрастающих на $[0, \infty)$ функций. Пусть

$$W = \{w \in L : \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty\},$$

$$\underline{W}_{\varphi} = \{w \in W : \underline{\lim}_{t\to\infty} \varphi(t) J(t; w) = 0\},$$

$$W_{\varphi} = \{w \in W : \lim_{t\to\infty} \varphi(t) J(t; w) = 0\},$$

где $\varphi \in L$, а

$$J(t; w) = \int_t^{\infty} \frac{w(x)}{x^2} dx.$$

Пусть M — класс функций Φ из L, таких, что $x\Phi(x) < \Phi(kx)$ при $x \geq x_0$, где k — некоторая постоянная. Ясно, что все функции из M растут быстрее любой степени, т.е. x^n $(n = 1, 2, ...)$.

Каждой функции Φ из M поставим в соответствие ее обратную функцию φ. Тогда получим новый класс функций, обозначим его через M^{-1}. Таким образом, классы $M = \{\Phi\}$ и $M^{-1} = \{\varphi\}$ состоят из взаимно обратных функций. Легко показать, что если $\varphi \in M^{-1}$, то функция $\omega(x) = \sqrt{x}$ принадлежит классу $\underline{W}_{\varphi}$.

Пусть $e \subset [-1, 0)$ — измеримое по мере Лебега множество. Верхней De и нижней de плотностями множества e называются величины [5]:

$$De = \overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\mathrm{m}(\mathrm{e} \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|}, \quad de = \underline{\lim}_{\sigma\to 0-} \frac{\mathrm{m}(\mathrm{e} \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|}.$$

Пусть

$$\underline{D}_0(\Phi) = \left\{ F \in D_0(\Lambda) : \sup_{\tau>0} \varliminf_{\sigma\to\ 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{|\sigma|\Phi(\frac{\tau}{|\sigma|})} > 0 \right\},$$

где $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (2.2).

Будем говорить, что максимальный член $\mu(\sigma)$ ряда (2.2) $B(d)$ $(B(D))$ — устойчив (см. [2]), если при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1, 0)$ нулевой нижней плотности de (нулевой верхней плотности De) имеет место асимптотическое равенство

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma).$$

Множество $A = [-1, 0)\backslash e$ называется асимптотическим множеством.

Будем говорить, что последовательность $\{b_n\}$ $(b_n \neq 0 \quad \text{при} \quad n \geq N)$ W_φ — нормальна, если найдется функция $\theta \in W_\varphi$, такая, что

$$-\ln |b_n| \leq \theta(\lambda_n) \quad (n \geq N).$$

Пусть $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ — считающая функция последовательности Λ, а $n_l(t)$ — наименьшая вогнутая мажоранта функции $\ln n(t)$. В силу условия (2.1), $n_l(t) = o(t)$ при $t \to \infty$.

Сформулируем основной результат.

Имеет место следующая

Теорема 2.1. *Пусть Φ — некоторая фиксированная функция из класса M, а φ — обратная к Φ функция. Пусть $n_l \in W_\varphi$, а $B = \{b_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая условию*

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \leqslant e^{w(\lambda_n)} \quad (n \geq N), \tag{2.6}$$

где $w \in W$ и такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\lambda_n) \ln |b_n|}{\lambda_n} = 0. \tag{2.7}$$

Для того, чтобы для любой функции $F \in \underline{D}_0(\Phi)$ максимальный член представляющего ее ряда (2.2) был $B(d)$ — устойчив, достаточно, а для W_φ–нормальной последовательности $\{b_n\}$ и необходимо, чтобы для некоторой функции $w \in \underline{W}_\varphi$ выполнялись оценки (2.6).

В [2] последовательность Λ была подчинена слишком жесткому условию

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \lambda_n} < \infty.$$

Это означает, что $\ln n = \ln n(\lambda_n) \leqslant a \ln \lambda_n$ $(n \geqslant 1)$. Значит, $n_l(t) \leqslant a \ln t$ и потому $n_l \in W_\varphi$. Обратное, очевидно, не верно.

Отметим также, что условие согласования (2.7) в теореме 2.1 существенно (см. [2]).

Условие $n_l \in W_\varphi$ может быть ослаблено, а именно, заменено на условие $\varphi(t)J(t; \ln n) = o(1)$, $t \to \infty$. Но доказательство этого результата требует несколько другого подхода и будет опубликовано в другой статье.

3. Необходимые сведения и факты

1. Выпуклый полигон Ньютона.

Для доказательства теоремы 2.1 нам понадобятся некоторые свойства максимального члена ряда Дирихле. Хорошо известно геометрическое описание максимального члена степенного ряда или ряда Дирихле, задающего целую функцию, через выпуклый полигон Ньютона (см., например, [4]). Аналогичное описание максимального члена степенного ряда, сходящегося лишь в единичном круге, дается также в ряде работ (см., например, [6]).

Построим выпуклый полигон Ньютона для ряда Дирихле (2.2), абсолютно сходящегося лишь в полуплоскости Π_0. Для этого, предполагая, что $\sup_n |a_n| = \infty$ (можно также считать, что $a_1 \neq 0$) отметим на плоскости точки $P_n = (\lambda_n, g_n)$, где $g_n = -\ln|a_n|$ (если $a_n = 0$, то полагаем $g_n = \infty$). Поскольку $F \in D_0(\Lambda)$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} = 0. \tag{3.1}$$

Учитывая это, через $Q(F)$ обозначим выпуклую оболочку точек $P_n \quad (n \geq 1)$. Пусть $\gamma(x) = \inf\{y : (x, y) \in Q(F)\}$. Линия, описываемая уравнением $y = \gamma(x) \quad (x \geq \lambda_1)$, называется диаграммой или выпуклым полигоном Ньютона [6]. Из (3.1) следует, что диаграмма Ньютона, обозначим ее $L(F)$, есть выпуклая вниз ломаная линия.

Пусть $F \in D_0(\Lambda)$,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \qquad \sup_n |a_n| = \infty.$$

Положим

$$\widehat{F}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n e^{\lambda_n s}, \qquad T_n = e^{-\gamma(\lambda_n)} \quad (n \geq 1). \tag{3.2}$$

Функция $\widehat{F}$ называется мажорантой Ньютона функции $F \in D_0(\Lambda)$.

Пусть $\gamma(\lambda_n) = G_n$ $(n \geq 1)$. Тогда $(\lambda_n, G_n) \in L(F)$. Для бесконечного множества значений λ_n, в частности, для абсцисс λ_{n_i} $(i \geq 1,\ n_1 = 1)$ всех вершин полигона $L(F)$ имеем: $G_n = -\ln|a_n|$. Отметим, что точка $P_n = (\lambda_n, -\ln|a_n|)$ лежит либо на полигоне $L(F)$ (точка P_{n_i} обязательно лежит на полигоне), либо над ним. Угловой коэффициент отрезка, соединяющего вершины P_{n_i} и $P_{n_{i+1}}$ полигона $L(F)$, равен

$$R_i = \frac{G_{n_{i+1}} - G_{n_i}}{\lambda_{n_{i+1}} - \lambda_{n_i}} \qquad (i \geq 1,\ \lambda_1 = 1).$$

Ясно, что $R_i \uparrow 0$ при $i \to \infty$. Следовательно, при $R_{i-1} \leq \sigma < R_i$ центральный индекс $\nu(\sigma) = n_i = const$, а $\ln\mu(\sigma) = \ln|a_{n_i}| + \lambda_{n_i}\sigma$ [4]. Отсюда, в частности, следует, что $\mu(\sigma) = \widehat{\mu}(\sigma)$, $\nu(\sigma) = \widehat{\nu}(\sigma)$, где $\widehat{\mu}(\sigma)$ и $\widehat{\nu}(\sigma)$ — максимальный член и центральный индекс ряда (3.2). Известно также, что функция $\ln\mu(\sigma)$ непрерывна, а при $\sup_n |a_n| = \infty$ неограниченно возрастает на интервале $[-1, 0)$ [4].

2. Лемма типа Бореля-Неванлинны

Пусть L — класс всех непрерывных, неограниченно возрастающих на $[0, \infty)$ функций, а W — класс сходимости, введенный выше. Для функции w из W введем обозначение

$$J(t; w) = \int_t^{\infty} \frac{w(x)}{x^2} dx.$$

Через H обозначим подкласс L, состоящий из функций Φ, для которых (см. [5]):

$$1)\ \varphi(2t) \leq c\varphi(t), \quad 0 < c < \infty; \qquad 2)\ \varphi(t)t^{-1}\ln t = o(1), \quad t \to \infty,$$

где функция φ является обратной к Φ.

Хорошо известна следующая теорема Бореля-Неванлинны, которая широко используется для исследования асимптотических свойств функций, заданных рядами Дирихле (см. [7]).

Теорема (Бореля-Неванлинна). *Пусть на* $[r_o, \infty)$ *задана непрерывная функция* $u(r)$, *неубывающая, стремящаяся к* $+\infty$ *при* $r \to \infty$. *Пусть* $\varphi(u)$ *— непрерывная, положительная функция, заданная на* $[u_o, +\infty)$ $(u_o = u(r_o))$, *невозрастающая, стремящаяся к 0 при* $u \to \infty$, *причем*

$$\int_{u_0}^{\infty} \varphi(u)du < \infty.$$

Тогда для любого $r > r_o$, *кроме, возможно, конечной меры, выполняется неравенство*

$$u(r + \varphi(u(r))) < u(r) + 1.$$

В работе [5] доказан следующий вариант теоремы Бореля-Неванлинны.

Лемма 3.1. *Пусть* $u(t)$ *— непрерывная, неубывающая на* $[-1, 0)$ *функция,* $u(t) \to \infty$ *при* $t \to 0-$, *причем для некоторой функции* Φ *из* H

$$\varlimsup_{t\to 0-} e^{u(t)}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|t|}\right) > 0.$$

Если для некоторой функции w *из* W

$$\varphi(t)J(t; w) = o(1), \quad t \to \infty,$$

то при $t \to 0-$ *вне некоторого множества* $e \subset [-1, 0)$, $\quad de = 0$,

$$u(t + \delta(t)) = u(t) + o(1), \quad \delta(t) = \frac{w(v(t))}{v(t)},$$

где $v = v(t)$ *— решение уравнения*

$$w(v) = e^{u(t)}. \tag{3.3}$$

В работе [2] доказан более общий вариант леммы 3.1, который и нам понадобится далее.

Лемма 3.2. *Пусть* $u(t)$ *— непрерывная, неубывающая на* $[-1, 0)$ *функция,* $u(t) \to \infty$ *при* $t \to 0-$. *Пусть* $w \in W$, *а* $v = v(t)$ *— решение уравнения* (3.3).

Если

$$\frac{w(v(t))}{|t|v(t)} = o(1), \quad t \to 0-,$$

а для некоторой последовательности $\{\tau_j\}$ $\quad (\tau_j \uparrow 0)$

$$\lim_{\tau_j\to 0-} \frac{1}{|\tau_j|}J(v_j; w) = 0, \qquad v_j = v(\tau_j), \tag{3.4}$$

то при $t \to 0-$ *вне некоторого множества* $e \subset [-1, 0)$,

$$m(e \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|), \quad \tau_j \to 0-,$$

имеет место асимптотическое равенство

$$u\left(t + \frac{w(v(t))}{v(t)}\right) = u(t) + o(1).$$

4. Доказательство теоремы 1.1

Приступим теперь к доказательству теоремы 2.1.

Достаточность. Пусть выполняется условие (2.7), и

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \leqslant e^{w(\lambda_n)} \quad (n \geq N), \tag{4.1}$$

где $w = w(x)$ — некоторая функция из $\underline{W}_\varphi$. Можно считать, что $w(x)\varphi(x) = o(x)$ при $x \to \infty$ (это следует из (2.7)). Не теряя общности, предположим также, что $n_l(x) \leqslant w(x)$ (это позволит упростить некоторые выкладки). Тогда существует функция $w^* \in \underline{W}_\varphi$, такая, что $\sqrt{x} \leqslant w^*(x)$, $\frac{w^*(x)\varphi(x)}{x} = o(1)$, $w(x) = o(w^*(x))$ при $x \to \infty$ [5]. Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = 2\ln\mu(\sigma). \tag{4.2}$$

Ясно, что $v(\sigma) \uparrow \infty$ при $\sigma \uparrow 0$. Поскольку $w^* \in \underline{W}_\varphi$, то найдется последовательность $\{\tau_j\}$ $(\tau_j \uparrow 0)$, такая, что

$$\lim_{v_j \to \infty} \varphi(v_j) J(v_j; w^*) = 0, \tag{4.3}$$

где $v_j = v(\tau_j) \to \infty$ при $\tau_j \to 0-$,

$$J(v_j; w^*) = \int\limits_{v_j}^{\infty} \frac{w^*(x)}{x^2} dx.$$

Далее, уравнение (4.2) можно записать в виде

$$w^*(v) = e^{u(\sigma)}, \quad u(\sigma) = \ln 2 + \ln\ln\mu(\sigma). \tag{4.4}$$

Поскольку $F \in \underline{D}_0(\Phi)$, то, кроме того, для некоторого $\tau > 0$

$$\varliminf_{\sigma \to\ 0-} \frac{e^{u(\sigma)}}{|\sigma|\Phi(\frac{\tau}{|\sigma|})} > 0.$$

Следовательно, учитывая (4.4) и то, что $\Phi \in M$, отсюда имеем:

$$w^*(v(\sigma)) > \varepsilon_o |\sigma| \Phi\left(\frac{\tau}{|\sigma|}\right) > \varepsilon_o \Phi\left(\frac{\varepsilon_1}{|\sigma|}\right),$$

где $\varepsilon_o > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\sigma' < \sigma < 0$. Поскольку $w^*(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, то из этих оценок получаем, что

$$\frac{1}{|\sigma|} < \varepsilon_1^{-1} \varphi(\varepsilon_o^{-1} w^*(v)) < \varepsilon_1^{-1} \varphi(v), \tag{4.5}$$

где $v = v(\sigma)$, $\sigma' < \sigma'' < \sigma < 0$. Последняя оценка верна, в частности, для $\sigma = \tau_j$ $(j \geqslant j')$. Так что из (4.2)–(4.4) видим, что для функции w^* условия (3.3), (3.4) леммы 3.2 выполнены. Кроме того, из (4.5) следует, что

$$0 < \frac{w^*(v(\sigma))}{|\sigma| v(\sigma)} < \varepsilon_1^{-1} \frac{\varphi(v(\sigma)) w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)} \to 0$$

при $\sigma \to 0-$. Поэтому, применяя лемму 3.2, при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e_1 \subset [-1, 0)$, $m(e_1 \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$ $(\tau_j \to 0-)$ получаем, что

$$\mu(\sigma + h) < \mu(\sigma)^{(1+o(1))}, \quad h = \frac{w^*(v)}{v}, \quad v = v(\sigma). \tag{4.6}$$

Пусть

$$R_v = \sum_{\lambda_n > v} |a_n| e^{\lambda_n \sigma}.$$

Далее, $\ln n = \ln n(\lambda_n) \leqslant n_l(\lambda_n)$. Поскольку функция $n_l(t)$ вогнутая, то, кроме того,

$$n_l(\lambda_n) \leqslant \frac{w(v)}{v}\lambda_n \tag{4.7}$$

при $\lambda_n \geqslant v$. Следовательно, при $\sigma \in [\sigma_o, 0)\backslash e_1$

$$R_v \leqslant \mu(\sigma+h)\sum_{\lambda_n>v} e^{-h\lambda_n} \leqslant C_o\mu(\sigma+h)\exp[\max_{t\geqslant v}\psi(t)],$$

где $\psi(t) = 2n_l(t) - ht, \quad C_o = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Отсюда, если учесть оценку (4.7), при $\sigma \to 0-$ будем иметь

$$\max_{t\geqslant v}(\psi(t)) \leqslant 2\frac{w(v)}{v}t - ht \leqslant -v(1+o(1))h.$$

Тогда с учетом (4.2), (4.6) при $\sigma \to 0-$ вне e_1 получаем, что

$$R_v \leqslant C_o\mu(\sigma)^{(1+o(1))}\exp[-w^*(v)(1+o(1))] = \mu(\sigma)^{-1(1+o(1))}. \tag{4.8}$$

Значит, при $\sigma \in [\sigma_1, 0)\backslash e_1$ получаем, что $\lambda_{\nu(\sigma)} \leqslant v(\sigma)$, где $\nu = \nu(\sigma)$ — центральный индекс ряда (2.2). Тогда при $\sigma \to 0-$ вне e_1 с учетом (4.1), (4.2) имеем:

$$\mu(\sigma) = |a_\nu|e^{\lambda_\nu\sigma} = |a_\nu b_\nu|e^{\lambda_\nu\sigma}|b_\nu|^{-1} \leqslant \mu^*(\sigma)e^{w(v)} = \mu^*(\sigma)\mu(\sigma)^{o(1)}.$$

Следовательно, при $\sigma \to 0-$ вне $e_1 \subset [-1, 0)$ получаем оценку

$$(1+o(1))\ln\mu(\sigma) \leqslant \ln\mu^*(\sigma). \tag{4.9}$$

С другой стороны, поскольку $|b_n| \leqslant e^{w(\lambda_n)}$ $(n \geqslant 1)$, то

$$\mu^*(\sigma) = |a_k b_k|e^{\lambda_k\sigma} \leqslant \mu(\sigma)e^{w(\lambda_k)}, \tag{4.10}$$

где $k = k(\sigma)$ — центральный индекс ряда (2.3).

Пусть $x = x(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(x) = 3\ln\mu^*(\sigma), \tag{4.11}$$

а $R_x^* = \sum\limits_{\lambda_n>x}|a_n||b_n|e^{\lambda_n\sigma}$. Получим для R_x^* оценку типа (4.8).

Пусть $\{\tau_j\}$ — последовательность, введенная выше. Из (4.9) при $\sigma \in [\sigma_2, 0)\backslash e_1$ имеем:

$$\ln\mu(\sigma) < \frac{3}{2}\ln\mu^*(\sigma). \tag{4.12}$$

Если для некоторой подпоследовательности $\{\tau_{j_n}\}$ последовательности $\{\tau_j\}$ имеют место оценки $\ln\mu(\tau_{j_n}) < \frac{3}{2}\ln\mu^*(\tau_{j_n})$, то, учитывая (4.2), (4.11), получаем, что

$$2\ln\mu(\tau_{j_n}) = w^*(v(\tau_{j_n})) < 3\ln\mu^*(\tau_{j_n}) = w^*(x(\tau_{j_n})) \quad (n \geqslant 1).$$

Следовательно, $v(\tau_{j_n}) < x(\tau_{j_n}) \quad (n \geqslant 1)$. Далее, поскольку $F \in \underline{D}_0(\Phi)$, то при некоторых $\tau > 0, \quad p > 0$

$$\frac{\ln\mu(\sigma)}{|\sigma|\Phi\left(\frac{\tau}{|\sigma|}\right)} \geq p > 0, \quad \sigma = \tau_{j_n} \quad (n \geq 1).$$

Пользуясь тем, что $\Phi \in M$, при некотором $q \quad (0 < q < 1)$ отсюда получаем, что

$$\ln \mu(\sigma) \geq p\frac{\Phi(\tau|\sigma|^{-1})}{|\sigma|^{-1}} > p\Phi(q|\sigma|^{-1}), \quad \sigma = \tau_{j_n} \ (n \geq n_0). \tag{4.13}$$

Отсюда с учетом (4.2) получаем оценки:

$$\frac{1}{|\tau_{j_n}|} < A\varphi(v(\tau_{j_n})) \quad (n \geqslant n_1). \tag{4.14}$$

Но $v(\tau_{j_n}) < x(\tau_{j_n}) \quad (n \geqslant 1)$. Следовательно, из (4.3), (4.14) имеем

$$\frac{1}{|\tau_{j_n}|}J(x(\tau_{j_n}); w^*) < A\varphi(v_{j_n})J(v_{j_n}; w^*) = o(1)$$

при $\tau_{j_n} \to 0-$. Учитывая это, применим лемму 3.2 к функции $u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln \mu^*(\sigma)$. Тогда при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e_2 \subset [-1, 0)$,

$$m(e_2 \cap [\tau_{j_n}, 0)) = o(|\tau_{j_n}|), \quad \tau_{j_n} \to 0-,$$

получаем оценку

$$\mu^*(\sigma + h^*) < \mu^*(\sigma)^{1+o(1)}, \quad h^* = \frac{w^*(x)}{x}, \quad x = x(\sigma). \tag{4.15}$$

Отсюда тем же способом, каким была получена оценка (4.8), получаем, что при $\sigma \to 0-$ вне e_2

$$R_x^* < \mu^*(\sigma)^{-2(1+o(1))}. \tag{4.16}$$

Пусть теперь для любого $\tau_j \quad (j \geqslant j_1) \quad \frac{3}{2}\ln \mu^*(\tau_j) \leqslant \ln \mu(\tau_j)$. Тогда рассмотрим множество $A_j = \{x : x \geqslant \tau_j, \ \ln \mu(\tau_j) < \frac{3}{2}\ln \mu^*(x)\} \quad (j \geqslant j_1)$. Поскольку $\tau_j \notin A_j$ для $j \geqslant j_1$, то из непрерывности функции $\mu^*(\sigma)$ следует, что $\ln \mu(\tau_j) = \frac{3}{2}\ln \mu^*(x_j)$, где $x_j = \inf\{x : x \in A_j\}$. Следовательно, из (4.2), (4.11) получаем, что $w^*(v(\tau_j)) = w^*(x(x_j))$, т.е. $v(\tau_j) = x(x_j) \quad (j \geqslant j_1)$. Далее, из (4.12) следует, что $\{\tau_j\} \subset e_1$, $\{x_j\} \subset e_1$. Поскольку $m(e_1 \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$ при $\tau_j \to 0-$, то при этом $x_j - \tau_j = o(|\tau_j|)$, т.е. $x_j = (1 + o(1))\tau_j$. Следовательно, учитывая (4.3) и оценку типа (4.14), имеем:

$$\frac{1}{|x_j|}J(x(x_j); w^*) = \frac{1}{(1 + o(1))|\tau_j|}J(v_j; w^*) \to 0$$

при $j \to \infty \quad (v_j = v(\tau_j))$. Видим, что функции w^* и $u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln \mu^*(\sigma)$ удовлетворяют всем условиям леммы 3.2. Значит, согласно этой лемме, оценка (4.15), а следовательно, и (4.16), справедлива при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества

$$e_3 \subset [-1, 0), \quad m(e_3 \cap [x_j, 0)) = o(|x_j|), \quad x_j \to 0-.$$

Следовательно, тем более $m(e_3 \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|), \quad \tau_j \to 0-$. Таким образом, при $\sigma \to 0-$ вне множества $e_4 = e_2 \cup e_3, \quad m(e_4 \cap [\tau_{j_n}, 0)) = o(|\tau_{j_n}|), \quad \tau_{j_n} \to 0-$, имеет место оценка (4.16). Но это означает, что $\lambda_{k(\sigma)} \leqslant x(\sigma)$, если $\sigma \in [\sigma_3, 0) \setminus e_4$. Следовательно, из (4.10) получаем, что для таких σ

$$\mu^*(\sigma) \leqslant \mu(\sigma)e^{w(x(\sigma))} = \mu(\sigma)\mu^*(\sigma)^{o(1)},$$

т.е.

$$(1 + o(1))\ln \mu^*(\sigma) \leqslant \ln \mu(\sigma). \tag{4.17}$$

Из оценок (4.9), (4.17) окончательно получаем, что при $\sigma \to 0-$ вне множества $e = e_1 \cup e_4$, $m(e \cap [\tau_{j_n}, 0)) = o(|\tau_{j_n}|)$, $\tau_{j_n} \to 0-$, выполняется требуемое равенство

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1))\ln \mu^*(\sigma).$$

Поскольку $de = 0$, то достаточность установлена.

Необходимость.

Мы должны показать, что если последовательность $\{b_n\}$ W_φ — нормальна, а для любой функции $F \in \underline{D}_0(\Phi)$ максимальный член представляющего ее ряда (2.2) $B(d)$ — устойчив, то существует функция $w \in \underline{W}_\varphi$, такая, что

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \leqslant e^{w(\lambda_n)} \quad (n \geqslant N).$$

Пусть это не так. Тогда для последовательности $\{\ln |b_n|\}_{n=N}^{\infty}$ не существует мажоранты $w(\lambda_n)$, $w \in \underline{W}_{\varphi}$. Это означает, что

$$\varlimsup_{t\to\infty} \varphi(t) \int\limits_t^\infty \frac{\alpha(x)}{x^2} dx > 0, \tag{4.18}$$

где $\alpha = \alpha(t)$ — наименьшая неубывающая мажоранта последовательности $\{\ln |b_n|\}_{n=N}^{\infty}$, т.е. $\alpha(t) = \max\limits_{\lambda_n \leqslant t} \{\ln |b_n| : n \geqslant N\}$. Не теряя общности, можно считать, что $\alpha(t) > 0$ при $t \geqslant \lambda_N$. Заметим, что $\alpha(t)$ — непрерывная справа ступенчатая функция. Пусть $T = \{t_n\}$ $(t_n = \lambda_{j_n})$ — последовательность всех точек разрыва функции $\alpha(t)$. Пусть q $(0 < q < 1)$ — произвольное, но фиксированное число, $\beta(t) = q\alpha(t)$, $I_n = J(t_n; \beta)$, $G_n = -t_n I_n$ $(n \geq 1)$. Положим

$$a_k = \begin{cases} e^{-G_1}, & \text{если} \quad k = 1, 2, \ldots, j_1; \\ e^{-G_n}, & \text{если} \quad k = j_n \quad (n \geq 1); \\ e^{-\gamma_n(\lambda_k) - 1}, & \text{если} \quad j_n < k < j_{n+1} \quad (n \geq 1), \end{cases}$$

где $y = \gamma_n(x)$ — уравнение прямой, проходящей через точки $P_n = (t_n, G_n)$ и $P_{n+1} = (t_{n+1}, G_{n+1})$.

Убедимся, что $R_n \uparrow 0$ при $n \to \infty$, где

$$R_n = \frac{G_{n+1} - G_n}{t_{n+1} - t_n}.$$

Действительно, $R_n = -I_n + \frac{\beta(t_n)}{t_n}$ $(n \geq 1)$ (мы воспользовались тем, что $\beta(t) = q\alpha(t)$, а $\alpha(t) = \alpha(t_n)$ при $t_n \leq t < t_{n+1}$). Отсюда получаем, что

$$R_{n+1} - R_n = q \left(\frac{\alpha(t_{n+1}) - \alpha(t_n)}{t_{n+1}} \right) > 0 \quad (n \geq 1).$$

Но так как $G_n = o(t_n)$ при $n \to \infty$, то, действительно, $R_n \uparrow 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, совокупность всех отрезков прямых, соединяющих точки P_n и P_{n+1} $(n \geqslant 1)$ есть выпуклый полигон Ньютона $L(F)$ для ряда Дирихле [4]

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k s}, \tag{4.19}$$

а поскольку точки $(\lambda_k, -\ln |a_k|)$ при $j_n < k < j_{n+1}$ $(n \geqslant 1)$ лежат выше $L(F)$, вершинами полигона $L(F)$ являются как раз точки $P_n = (t_n, G_n)$, $t_n = \lambda_{j_n}$ $(n \geqslant 1)$. Имея это в виду, оценим максимальный член $\mu(\sigma)$ ряда (4.19) сверху. При $R_{n-1} \leqslant \sigma < R_n$ максимальный член равен $|a_n| e^{\lambda_n \sigma}$ [4]. Следовательно, для любого $n \geqslant 1$

$$\ln \mu(\sigma) = -G_n + t_n \sigma < \frac{t_n t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\beta(x)}{x^2} dx = q\alpha_n. \tag{4.20}$$

С другой стороны, $\mu^*(\sigma) \geqslant |a_{j_n} b_{j_n}| e^{\lambda_{j_n}\sigma}, \quad b_{j_n} = e^{\alpha(t_n)}, \quad \alpha(t_n) = \alpha_n \quad (n \geqslant 1)$. Следовательно, для $R_{n-1} \leqslant \sigma < R_n$ получаем, что для любого $n \geqslant 1$

$$\ln \mu^*(\sigma) \geqslant \alpha_n + t_n(I_n + \sigma) = \alpha_n + \ln \mu(\sigma) > \alpha_n. \tag{4.21}$$

Таким образом, из (4.20), (4.21) получаем, что $\ln \mu(\sigma) < q \ln \mu^*(\sigma)$, если $R_{n-1} \leqslant \sigma < R_n$. Значит,

$$\varlimsup_{\sigma \to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\ln \mu^*(\sigma)} \leqslant q < 1,$$

и максимальный член $\mu(\sigma)$ не обладает свойством $B(d)$ — устойчивости.

Убедимся, что $F \in \underline{D}_0(\Phi)$. Действительно, из представления [4]

$$\ln \mu(\sigma) = \ln \mu(-1) + \int_{-1}^{\sigma} \lambda_{\nu(t)} dt$$

получаем, что

$$\ln \mu(\frac{\sigma}{2}) \geqslant \int_{\sigma}^{\sigma/2} \lambda_{\nu(t)} dt \geqslant \frac{|\sigma|}{2} \lambda_{\nu(\sigma)} \quad (\sigma < 0). \tag{4.22}$$

Далее, $R_n = -I_n + \frac{\beta(t_n)}{t_n}, \quad \beta(t_n) = \alpha_n q \quad (n \geqslant 1)$. Следовательно, с учетом (2.7), (4.18) имеем

$$|R_n| \varphi(t_n) = I_n \varphi(t_n) - \frac{\beta(t_n)}{t_n} \varphi(t_n) \geqslant \gamma > 0 \quad (n \geqslant 1).$$

Пусть $R_{n-1} \leqslant \sigma < R_n$. Тогда $\lambda_{\nu(\sigma)} = t_n$, и

$$\varphi(\lambda_\nu) \geqslant \frac{\gamma}{|R_n|} > \frac{\gamma}{|\sigma|}, \quad \nu = \nu(\sigma).$$

Следовательно, из (4.22) получаем, что для $R_{n-1} \leqslant \sigma < R_n \quad (n \geqslant 1)$

$$\ln \mu\left(\frac{\sigma}{2}\right) > \frac{|\sigma|}{2} \lambda_\nu > \frac{|\sigma|}{2} \Phi\left(\frac{\gamma}{|\sigma|}\right), \quad n \to \infty.$$

Это означает, что

$$\varliminf_{\sigma \to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{|\sigma| \Phi\left(\frac{\tau}{|\sigma|}\right)} > 0, \quad \tau = \frac{\gamma}{2}.$$

Значит, $F \in \underline{D}_0(\Phi)$.

Теорема 2.1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.М. Гайсин. *Оценки роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых* // Математ. сборник. **194**:8, 55–82 (2003).
2. А.М. Гайсин, Т.И. Белоус. *B-устойчивость максимального члена адамаровской композиции двух рядов Дирихле* // Сибир. математ. журнал. **43**:6, 1271–1282 (2002).
3. А.М. Гайсин, Т.И. Белоус. *Оценка на кривых функций, представленных в полуплоскости рядами Дирихле* // Сибир. математ. журнал. **44**:1, 27–43 (2003).
4. А.Ф. Леонтьев. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976.
5. А.М. Гайсин. *Поведение логарифма модуля суммы ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости* // Изв. РАН. Сер. матем. **53**:4, 173–185 (1994).

6. Г.Г. Цегелик. *Свойства мажоранты и диаграммы Ньютона функции,аналитической в круге* // Укр. математ. журнал. **29**:4, 560–562 (1997).
7. А.А. Гольдберг, И.В. Островский. *Распределение значений мероморфных функций.* М.: Наука. 1970.

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: gaisinam@mail.ru

Татьяна Ивановна Белоус,
ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет»,
ул. Карла Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: belousti@yandex.ru