ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 2 (2022). С. 23-36.

УДК 517.98, 519.72, 530.145

О ДЕЛИМЫХ КВАНТОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Р.Н. ГУМЕРОВ, Р.Л. ХАЖИН

Аннотация. В статье изучаются квантовые динамические отображения, называемые также квантовыми процессами. При этом множество значений такого отображения представляет собой однопараметрическое семейство вполне положительных сохраняющих след линейных операторов, заданных на некотором конечномерном гильбертовом пространстве. В квантовой теории информации такие операторы называются квантовыми каналами. Важным понятием для квантовых динамических отображений является их делимость. Существуют различные виды этого понятия. В данной статье рассматриваются так называемые вполне положительно делимые квантовые процессы. Для двух таких процессов, которые, вдобавок, биективны и удовлетворяют условию коммутативности, мы строим составной квантовый процесс. Показывается, что он также является вполне положительно делимым. Снабжая множество квантовых каналов нормированной топологией, мы рассматриваем непрерывные квантовые динамические отображения и непрерывные вполне положительные эволюции. Последние определяются как двухпараметрические семейства, состоящие из квантовых каналов, удовлетворяющих дополнительным свойствам. Доказывается, что непрерывный биективный вполне положительно делимый квантовый процесс порождает непрерывную вполне положительную эволюцию. Далее, для того, чтобы проиллюстрировать рассматриваемые понятия и результаты о них, мы приводим примеры квантовых динамических отображений со значениями в множестве однокубитных квантовых каналов. В частности, для двух биективных коммутирующих квантовых процессов строится вполне положительно делимый составной процесс. Даются геометрическая и физическая интерпретации этого квантового процесса.

Ключевые слова: банахова алгебра, биективный процесс, вполне положительно делимый процесс, квантовое динамическое отображение, квантовый канал, квантовый процесс, непрерывная вполне положительная эволюция, операторная норма, положительно делимый процесс, следовая норма, составной процесс, топологическая группа.

Mathematics Subject Classification: 47L10, 47B49, 81P45, 94A40, 15A60, 46N50

1. Введение

Статья посвящена однопараметрическим и двухпараметрическим семействам, состоящим из вполне положительных сохраняющих след операторов. В квантовой теории информации такие операторы называются квантовыми каналами. Однопараметрические семейства квантовых каналов называются квантовыми динамическими отображениями или процессами. Квантовые процессы описывают изменения состояний квантовых систем со временем.

R.N. Gumerov, R.L. Khazhin, On divisible quantum dynamical mappings.

Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030"). Работа поддержана Программой развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2022-882.

Поступила 3 декабря 2021 г.

Одной из важных характеристик квантовых процессов является их делимость. Различные виды делимости квантовых структур и тесно связанные с этой тематикой вопросы исследовались в целом ряде статей, которые послужили мотивацией к нашей работе. Безгранично делимые измерения и марковские отображения в квантовой теории вероятностей изучались в статьях [1] и [2]. В работе [3] рассматривались делимые и инфинитезимально делимые квантовые каналы и тесно связанные с ними непрерывные вполне положительные эволюции, множества значений которых представляют собой двухпараметрические семейства квантовых каналов. Часть статей посвящена положительной и вполне положительной делимостям, которые кратко называются соответственно P-делимостью и CP-делимостью. Связь между этими видами делимостей динамических отображений и их тензорных степеней представлена в статье [4]. Биективные CP-делимые квантовые процессы исследуются в статьях [5], [6]. Соотношения между так называемыми L-делимостью, P-делимостью и CP-делимостью рассматриваются в [7]. Изучение делимости квантовых отображений имеет физическую мотивацию и представляет несомненный математический интерес (см. [8]–[11] и литературу в них).

В данной статье рассматриваются биективные CP-делимые квантовые процессы. Для двух таких процессов, удовлетворяющих дополнительному условию коммутативности, строится составной квантовый процесс. Доказывается, что он является $CP(P)$-делимым. На множестве квантовых каналов вводится топология, определяемая с помощью следовой (ядерной) нормы, заданной на пространстве линейных операторов на конечномерном гильбертовом пространстве. Это позволяет рассматривать непрерывные процессы и эволюции. Доказывается, что каждый биективный CP-делимый квантовый процесс порождает непрерывную вполне положительную эволюцию. Приводятся примеры квантовых динамических отображений, принимающих значения в множестве однокубитных каналов, которые демонстрируют изучаемые процессы и их свойства. А именно, рассматриваются два биективных квантовых процесса, составной процесс для которых является CP-делимым. Даются геометрическая и физическая интерпретации этого составного квантового процесса. Также строится разрывный в фиксированный момент времени квантовый процесс, состоящий из унитарных каналов.

Содержание работы следующее. Она состоит из введения и четырех разделов. Во втором разделе собраны необходимые для дальнейшего изложения определения и факты. В третьем разделе рассматриваются биективные CP-делимые квантовые процессы, удовлетворяющие условию коммутативности, и составные процессы для них. Четвертый раздел посвящен непрерывным квантовым процессам и вполне положительным эволюциям. В пятом разделе построены квантовые процессы, которые иллюстрируют рассматриваемые понятия и их свойства.

2. Предварительные сведения

На протяжении всей статьи $\mathcal{H}$ означает конечномерное комплексное гильбертово пространство. Комплексное векторное пространство всех линейных операторов на $\mathcal{H}$ будет обозначаться через $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

Линейное вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi : \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ называется *квантовым каналом*. Напомним, что по определению Φ вполне положительный, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ линейное отображение Φ_n, корректно задаваемое формулой

$$\Phi_n : \mathfrak{L}(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n) : X \otimes Y \longmapsto \Phi(X) \otimes Y,$$

положительно, т.е. для каждого $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n)$ имеет место равенство $\Phi_n(A^*A) = B^*B$ для некоторого $B \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^n)$. Здесь, как обычно, $\mathbb{C}^n$ означает n-мерное комплексное пространство со стандартным скалярным произведением, $*$ – гильбертово сопряжение. Значок $\otimes$ использован как для обозначения гильбертова тензорного произведения пространств, так и для тензорного произведения операторов. Выпуклое множество всех квантовых каналов из $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ будет обозначаться через $\mathcal{O}_c(\mathcal{H})$. Оно является полугруппой, в которой в качестве умножения берется композиция операторов, обозначаемая символом $\circ$. Единицей в полугруппе $\mathcal{O}_c(\mathcal{H})$ служит тождественный канал $\mathcal{I} : \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Необходимые сведения о квантовых каналах содержатся в книге [12].

Мы также используем заглавные греческие буквы для обозначения операторнозначных функций вида

$$\Phi : [0;T] \longrightarrow \mathcal{O}_c(\mathcal{H}) : t \longmapsto \Phi(t), \quad \text{где} \quad \Phi(0) = \mathcal{I},$$

и соответствующих им однопараметрических семейств квантовых каналов

$$\Phi = \{\Phi(t) \in \mathcal{O}_c(\mathcal{H}) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ \Phi(0) = \mathcal{I}\},$$

которые называются *квантовыми динамическими отображениями* или *квантовыми процессами*. Кратко каждое из этих Φ будет называться *процессом*. Здесь и далее в тексте T – произвольное фиксированное положительное число.

Квантовый процесс Φ называется *делимым*, если для любых $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$ существует линейный оператор $\Phi(t_2, t_1) : \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{H})$, такой, что выполняется равенство

$$\Phi(t_2) = \Phi(t_2, t_1) \circ \Phi(t_1). \tag{2.1}$$

При этом, если каждый оператор $\Phi(t_2, t_1)$ является квантовым каналом, то процесс Φ называется *вполне положительно делимым* или *CP-делимым*. Если же каждый оператор $\Phi(t_2, t_1)$ сохраняет положительность и сохраняет след, то процесс Φ называется *положительно делимым* или *P-делимым*.

Следующим шагом определим квантовые процессы, которые заведомо являются делимыми. Прежде напомним, что оператор, обратный к вполне положительному оператору, вообще говоря, не является вполне положительным.

Квантовый процесс Φ называется *биективным*, если для каждого $t \in [0;T]$ существует линейный оператор $\Phi(t)^{-1} : \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{H})$, являющийся обратным для оператора $\Phi(t)$, т.е. имеет место равенство

$$\Phi(t) \circ \Phi(t)^{-1} = \Phi(t)^{-1} \circ \Phi(t) = \mathcal{I}. \tag{2.2}$$

Очевидно, что каждый биективный квантовый процесс является делимым. Действительно, для такого процесса в равенстве (2.1) в качестве линейного оператора $\Phi(t_2, t_1)$ выступает композиция операторов $\Phi(t_2) \circ \Phi(t_1)^{-1}$, где $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$.

На комплексном векторном пространстве $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ мы будем рассматривать *следовую (ядерную) норму*, задаваемую формулой

$$\|A\|_{tr} := tr\sqrt{A^*A}, \quad \text{где} \quad A \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}), \tag{2.3}$$

в которой справа стоит след арифметического квадратного корня из положительного оператора $A^*A \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. В свою очередь эта норма индуцирует операторную норму $\|\cdot\|$ на комплексном векторном пространстве $\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))$ всех линейных операторов, действующих из нормированного пространства $(\mathfrak{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{tr})$ в себя. Эту норму можно определить формулой

$$\|\Lambda\| := \max\{\, \|\Lambda(A)\|_{tr} \mid A \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}), \|A\|_{tr} \leqslant 1\}, \tag{2.4}$$

где $\Lambda \in \mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))$. Для любого положительного сохраняющего след оператора $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))$ выполняется равенство $\|\Phi\| = 1$ [13, Следствие 3.40]).

Как всякая операторная норма, индуцированная следовая норма является *(суб)мультипликативной*, т.е. для любых $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))$ справедливо неравенство

$$\|\Lambda_2 \circ \Lambda_1\| \leqslant \|\Lambda_1\| \cdot \|\Lambda_2\|. \tag{2.5}$$

Нормированное пространство $(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H})), \|\cdot\|)$ с композицией в качестве умножения и с тождественным отображением $\mathcal{I}$ в качестве единицы становится унитальной банаховой алгеброй [14, Гл. 5].

В литературе по квантовой теории информации, например, в [13], норма $\|\cdot\|$ называется также *индуцированной следовой нормой*. Как известно, она, в отличие от так называемой вполне ограниченной нормы (см., например, [15]), определяет метрику, которая не обеспечена физическим обоснованием для ее введения на множестве квантовых каналов. Однако для изучения топологических свойств рассматриваемых отображений нормы $\|\cdot\|$ достаточно. Это объясняется тем фактом, что все нормы на заданном конечномерном векторном пространстве эквивалентны и задают одну и ту же топологию.

Напомним, что группа всех обратимых элементов $Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H})))$ алгебры $(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H})), \|\cdot\|)$ является топологической группой [16, Теорема 1.2.43]. При этом согласованность алгебраической и топологической структур в $Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H})))$ позволяет говорить о непрерывности отображения

$$\Pi : Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))) \times Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))) \to Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))) : (\Lambda_1, \Lambda_2) \mapsto \Lambda_1 \circ \Lambda_2^{-1} \tag{2.6}$$

из декартова квадрата группы с топологией произведения в себя [17, § 17].

3. Составные делимые квантовые процессы

Рассмотрим пару произвольных квантовых динамических отображений

$$\Phi, \Omega : [0; T] \longrightarrow \mathcal{O}_c(\mathcal{H}).$$

Поскольку множество квантовых каналов $\mathcal{O}_c(\mathcal{H})$ замкнуто относительно композиции операторов, то корректно следующее определение. Квантовое динамическое отображение

$$\Sigma(\Omega, \Phi) : [0; T] \longrightarrow \mathcal{O}_c(\mathcal{H}) : t \longmapsto \Omega(t) \circ \Phi(t),$$

называется *составным квантовым процессом* для Φ и Ω.

Как обычно, для процессов Φ и Ω через $[\Phi(s), \Omega(t)]$ обозначается коммутатор каналов $\Phi(s)$ и $\Omega(t)$, где $s, t \in [0; T]$. Далее мы будем рассматривать процессы, которые удовлетворяют условию

$$[\Omega(t_1), \Phi(t_2)] = 0 \quad \text{для всех} \quad t_1, t_2 \in [0; T], \quad \text{таких, что} \quad t_1 \leqslant t_2. \tag{3.1}$$

Мы будем говорить, что процессы Φ и Ω *коммутируют*, если в (3.1) коммутатор равен нулю для любых $t_1, t_2 \in [0; T]$.

Заметим, что для коммутирующих процессов Φ и Ω составные квантовые процессы $\Sigma(\Omega, \Phi)$ и $\Sigma(\Phi, \Omega)$ совпадают. Ясно, что составной процесс для биективных квантовых процессов является биективным.

Предложение 3.1. *Пусть Φ и Ω – биективные (положительно) вполне положительно делимые квантовые процессы, которые удовлетворяют условию (3.1). Тогда составной квантовый процесс $\Sigma(\Omega, \Phi)$ тоже является биективным (положительно) вполне положительно делимым.*

Доказательство. Докажем утверждение для случая вполне положительно делимых процессов Φ и Ω. Случай положительно делимых процессов доказывается аналогично.

Для краткости записи введем обозначение $\Sigma := \Sigma(\Omega, \Phi)$. Очевидно, что составной квантовый процесс Σ является биективным. Далее, нам нужно показать, что $\Sigma(t_2) \circ \Sigma(t_1)^{-1}$ является квантовым каналом для всех $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$.

Для этого мы зафиксируем произвольные $t_1 \leqslant t_2$ и, используя определение составного канала и свойства обратных операторов, запишем равенство

$$\Sigma(t_2) \circ \Sigma(t_1)^{-1} = (\Omega(t_2) \circ \Phi(t_2)) \circ (\Phi(t_1)^{-1} \circ \Omega(t_1)^{-1}). \tag{3.2}$$

Так как каналы Φ и Ω удовлетворяют условию (3.1), то справедливо равенство

$$\Omega(t_1) \circ \Phi(t_1) = \Phi(t_1) \circ \Omega(t_1),$$

из которого следует соотношение

$$\Phi(t_1)^{-1} \circ \Omega(t_1)^{-1} = \Omega(t_1)^{-1} \circ \Phi(t_1)^{-1}. \tag{3.3}$$

Подстановка (3.3) в (3.2) и ассоциативность полугрупповой операции в $\mathcal{O}_c(\mathcal{H})$ доставляют равенство

$$\Sigma(t_2) \circ \Sigma(t_1)^{-1} = \Omega(t_2) \circ (\Phi(t_2) \circ \Omega(t_1)^{-1}) \circ \Phi(t_1)^{-1}. \tag{3.4}$$

Поскольку каналы Φ и Ω удовлетворяют условию (3.1), то имеет место равенство

$$\Omega(t_1) \circ \Phi(t_2) = \Phi(t_2) \circ \Omega(t_1). \tag{3.5}$$

Умножая обе части равенства (3.5) слева и справа на $\Omega(t_1)^{-1}$, мы получаем

$$\Phi(t_2) \circ \Omega(t_1)^{-1} = \Omega(t_1)^{-1} \circ \Phi(t_2). \tag{3.6}$$

Наконец, после подстановки (3.6) в (3.4), имеется представление

$$\Sigma(t_2) \circ \Sigma(t_1)^{-1} = (\Omega(t_2) \circ \Omega(t_1)^{-1}) \circ (\Phi(t_2) \circ \Phi(t_1)^{-1}). \tag{3.7}$$

Поскольку квантовые процессы Φ и Ω вполне положительно делимы, то операторы $\Phi(t_2) \circ \Phi(t_1)^{-1}$ и $\Omega(t_2) \circ \Omega(t_1)^{-1}$ являются квантовыми каналами. Таким образом, равенство (3.7) показывает, что линейный оператор $\Sigma(t_2) \circ \Sigma(t_1)^{-1}$ представляется в виде композиции двух квантовых каналов. Поэтому он и сам является квантовым каналом. Что и требовалось доказать. □

4. Непрерывные биективные процессы и вполне положительные эволюции

Снабдим отрезок $[0;T]$ и квадрат $[0;T] \times [0;T]$ естественными топологиями, а множество $\mathcal{O}_c(\mathcal{H})$ – топологией подпространства в банаховом пространстве $(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H})), \|\cdot\|)$. Пространство $\mathcal{O}_c(\mathcal{H})$ является компактным [13, Предложение 2.28]. В этом разделе мы будем рассматривать непрерывные квантовые динамические отображения вида

$$\Phi : [0;T] \longrightarrow \mathcal{O}_c(\mathcal{H})$$

и порождаемые ими непрерывные эволюции.

Напомним [3, Раздел V], что *непрерывной вполне положительной эволюцией* называется непрерывное отображение

$$\Psi : [0,T] \times [0,T] \longrightarrow \mathcal{O}_c(\mathcal{H}) : (t_2, t_1) \longmapsto \Psi(t_2, t_1),$$

удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\Psi(t_3, t_2) \circ \Psi(t_2, t_1) = \Psi(t_3, t_1) \qquad \text{для всех} \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant T; \tag{4.1}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \|\Psi(t+\delta, t) - \mathcal{I}\| = 0 \qquad \text{для всех} \quad t \in [0,T). \tag{4.2}$$

В силу непрерывности умножения в банаховой алгебре операторов $\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))$ составной процесс для двух непрерывных процессов является непрерывным. Для полноты изложения мы проведем подробное обоснование этого факта в доказательстве следующего утверждения.

Предложение 4.1. *Пусть Φ и Ω – непрерывные биективные (положительно) вполне положительно делимые квантовые процессы, которые удовлетворяют условию (3.1). Тогда составной квантовый процесс $\Sigma(\Omega, \Phi)$ тоже является непрерывным биективным (положительно) вполне положительно делимым.*

Доказательство. В силу Предложения 3.1 нам остается убедиться в непрерывности составного процесса. С этой целью рассмотрим отображения

$$[0;T] \xrightarrow{\Omega\Delta\Phi} \mathcal{O}_c(\mathcal{H}) \times \mathcal{O}_c(\mathcal{H}) \xrightarrow{\quad m \quad} \mathcal{O}_c(\mathcal{H}).$$

Здесь $\Omega\Delta\Phi$ – диагональ отображений Ω и Φ со значением в декартовом квадрате пространства квантовых каналов $\mathcal{O}_c(\mathcal{H})$ с топологией произведения, т.е. для каждого $t \in [0;T]$

$$\Omega\Delta\Phi(t) = (\Omega(t), \Phi(t)).$$

Через m обозначена операция взятия композиции операторов в $\mathcal{O}_c(\mathcal{H})$.

Оба этих отображения непрерывны. Действительно, диагональ $\Omega\Delta\Phi$ непрерывна, поскольку по условию теоремы непрерывны оба отображения

$$p_1 \circ (\Omega\Delta\Phi) = \Omega \quad \text{и} \quad p_2 \circ (\Omega\Delta\Phi) = \Phi,$$

где $p_i : \mathcal{O}_c(\mathcal{H}) \times \mathcal{O}_c(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{O}_c(\mathcal{H})$ – проекция на i-ую координату, $i = 1, 2$ [18, Теорема 12.10]. Отображение m непрерывно в силу мультипликативного неравенства (2.5).

Поэтому составной квантовый процесс

$$\Sigma(\Omega, \Phi) = m \circ (\Omega\Delta\Phi)$$

непрерывен как композиция непрерывных отображений.

□

Теперь докажем критерий непрерывности для биективных квантовых процессов. В его формулировке и ниже в тексте присутствуют пределы, зависящие от параметра $t \in [0;T]$. Отметим, что под этими пределами для граничных значений параметра t, т.е. когда $t = 0$ или $t = T$, понимаются соответственно правосторонний или левосторонний пределы.

Предложение 4.2. *Биективный квантовый процесс*

$$\Phi : [0;T] \longrightarrow \mathcal{O}_c(\mathcal{H})$$

является непрерывным тогда и только тогда, когда для любого $t \in [0;T]$ *выполняется равенство*

$$\lim_{\delta \to 0} \Phi(t) \circ \Phi(t+\delta)^{-1} = \mathcal{I}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Ниже, в обеих доказываемых импликациях, t – произвольное фиксированное число из отрезка $[0;T]$, и в качестве δ берутся такие действительные числа, для которых выполняется условие $t + \delta \in [0;T]$.

Необходимость. Введем в рассмотрение следующие отображения. Непрерывное постоянное отображение

$$\Phi_1 : [-t, T-t] \longrightarrow Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))) : \delta \longmapsto \Phi(t).$$

Отображение

$$\Phi_2 : [-t, T-t] \longrightarrow Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))) : \delta \longmapsto \Phi(t+\delta),$$

которое непрерывно как композиция непрерывных отображений. Диагональ этих отображений

$$\Phi_1 \triangle \Phi_2 : [-t, T-t] \longrightarrow Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))) \times Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))) : \delta \longmapsto (\Phi(t), \Phi(t+\delta))$$

непрерывна в силу непрерывности отображений

$$p_1 \circ (\Phi_1 \triangle \Phi_2) = \Phi_1 \quad \text{и} \quad p_2 \circ (\Phi_1 \triangle \Phi_2) = \Phi_2,$$

где $p_i : Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))) \times Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))) \longrightarrow Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H})))$ – проекция на i-ую координату, $i = 1, 2$ [18, Теорема 12.10].

Композиция $\Pi \circ (\Phi_1 \triangle \Phi_2)$ непрерывного отображения Π (см. (2.6)) с диагональным отображением $\Phi_1 \triangle \Phi_2$ непрерывна. Из этого факта и равенства (2.2) следует соотношение (4.3).

Достаточность. Покажем непрерывность отображения Φ в точке t, точнее говоря, справедливость равенства

$$\Phi(t) = \lim_{\delta \to 0} \Phi(t + \delta).$$

Она следует, с использованием условия (4.3), например, из непрерывности композиции, составленной из непрерывного диагонального отображения

$$[\Pi \circ (\Phi_1 \triangle \Phi_2)] \triangle \Phi_2) : [-t, T - t] \longrightarrow Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))) \times Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))) :$$

$$\delta \longmapsto (\Phi(t) \circ \Phi(t + \delta)^{-1}, \Phi(t + \delta))$$

и непрерывного умножения в топологической группе $Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H})))$. $\square$

Замечание 4.1. *Ясно также, что непрерывность отображения Φ эквивалентна выполнению для любого $t \in [0; T]$ условия*

$$\lim_{\delta \to 0} \Phi(t + \delta) \circ \Phi(t)^{-1} = \mathcal{I}. \tag{4.4}$$

Далее мы собираемся построить по непрерывному биективному вполне положительному процессу непрерывную вполне положительную эволюцию. Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение. Для его формулировки мы рассмотрим два треугольника, один из которых лежит над, а другой – под диагональю квадрата $[0; T] \times [0; T]$:

$$A = \{(t_1; t_2) \in [0; T] \times [0; T] \mid t_1 \leqslant t_2\},$$

$$B = \{(t_1; t_2) \in [0; T] \times [0; T] \mid t_1 \geqslant t_2\}.$$

Очевидно, что A и B являются замкнутыми подмножествами в пространстве $[0; T] \times [0; T]$ с топологией произведения. Они пересекаются по диагонали квадрата:

$$A \cap B = \{(t; t) \mid t \in [0; T]\}.$$

В формулировке вспомогательного утверждения A и B рассматриваются как пространства с топологиями, индуцированными из пространства $[0; T] \times [0; T]$. Это утверждение является частным случаем Леммы о склейке из топологии (см, например, [18, Теорема 8.7]).

Лемма 4.1. *Пусть $\Gamma : A \longrightarrow \mathcal{O}_c(\mathcal{H})$ и $\Upsilon : B \longrightarrow \mathcal{O}_c(\mathcal{H})$ – непрерывные отображения. Если $\Gamma(t, t) = \Upsilon(t, t)$ для любого $t \in [0; T]$, то формула*

$$\Psi(t_1, t_2) := \begin{cases} \Gamma(t_1, t_2), & \text{если } (t_1, t_2) \in A\,; \\ \Upsilon(t_1, t_2), & \text{если } (t_1, t_2) \in B \end{cases}$$

определяет непрерывное отображение $\Psi : [0; T] \times [0; T] \longrightarrow \mathcal{O}_c(\mathcal{H})$.

В следующей теореме указывается, как по непрерывному биективному вполне положительному процессу можно построить непрерывную вполне положительную эволюцию.

Теорема 4.1. *Пусть задан непрерывный биективный вполне положительно делимый квантовый процесс $\Phi : [0; T] \longrightarrow \mathcal{O}_c(\mathcal{H})$. Тогда формула*

$$\Psi(t_1, t_2) = \begin{cases} \Phi(t_2) \circ \Phi(t_1)^{-1}, & \text{если } t_1 \leqslant t_2\,; \\ \Phi(t_1) \circ \Phi(t_2)^{-1}, & \text{если } t_1 \geqslant t_2 \end{cases} \tag{4.5}$$

определяет непрерывную вполне положительную эволюцию

$$\Psi : [0; T] \times [0; T] \longrightarrow \mathcal{O}_c(\mathcal{H}).$$

Доказательство. Так как биективный квантовый процесс Φ вполне положительно делим, то $\Phi(t) \circ \Phi(s)^{-1} \in \mathcal{O}_c(\mathcal{H})$ при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Пусть A и B – топологические пространства, определенные перед формулировкой Леммы 4.1. Рассмотрим два отображения:

$$\Gamma : A \longrightarrow \mathcal{O}_c(\mathcal{H}) : (t_1, t_2) \longmapsto \Phi(t_2) \circ \Phi(t_1)^{-1};$$

$$\Upsilon : B \longrightarrow \mathcal{O}_c(\mathcal{H}) : (t_1, t_2) \longmapsto \Phi(t_1) \circ \Phi(t_2)^{-1}.$$

Наша цель – показать, что они удовлетворяют условиям Леммы 4.1.

Во-первых, для любого $t \in [0;T]$ справедливо равенство $\Gamma(t,t) = \Upsilon(t,t) = \mathcal{I}$. Отсюда следует, что формула (4.5) корректно определяет отображение, заданное на квадрате $[0;T] \times [0;T]$ со значениями в пространстве квантовых каналов $\mathcal{O}_c(\mathcal{H})$.

Во-вторых, отображения Γ и Υ непрерывны. Для доказательства этого утверждения рассмотрим следующие непрерывные отображения. Пусть

$$R : A \longrightarrow [0,T] \times [0,T] : (t_1, t_2) \longmapsto (t_2, t_1);$$

$$\widetilde{\Phi} : [0,T] \longrightarrow Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))) : t \longmapsto \Phi(t).$$

Далее построим декартов квадрат отображения $\widetilde{\Phi}$:

$$\widetilde{\Phi} \times \widetilde{\Phi} : [0,T] \times [0,T] \longrightarrow Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))) \times Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))) : (t_1, t_2) \longmapsto (\Phi(t_1), \Phi(t_2)).$$

Непрерывность введенных отображений следует из определений непрерывности и простых правил построения непрерывных функций (см, например, [18, Теоремы 8.6, 12.10]). Теперь рассмотрим композицию непрерывных отображений

$$\widetilde{\Gamma} = \Pi \circ (\widetilde{\Phi} \times \widetilde{\Phi}) \circ R : A \longrightarrow Inv(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))),$$

где Π – отображение (2.6). Поскольку отображение $\widetilde{\Gamma}$ непрерывно, $\Gamma(t_1, t_2) = \widetilde{\Gamma}(t_1, t_2)$ для любой пары $(t_1, t_2) \in A$, то, используя [18, Теорема 8.6, пункт 4)], мы получаем непрерывность Γ. Подобным образом, без использования оператора R, показывается непрерывность отображения Υ.

Значит, отображения Γ и Υ удовлетворяют условиям Леммы 4.1. Следовательно, отображение Ψ непрерывно.

Свойство (4.1) для отображения Ψ проверяется непосредственно с использованием формул (4.5) и (2.2).

Из непрерывности отображения Ψ и произвольной нормы, а также из равенства $\Psi(t,t) = \mathcal{I}$, справедливого для каждого $t \in [0,T]$, вытекает выполнение условия (4.2) для Ψ.

Таким образом, отображение Ψ является непрерывной вполне положительной эволюцией, что и требовалось доказать. □

Замечание 4.2. *Выполнение условия (4.2) для отображения Ψ в Теореме 4.1 следует также из свойств (4.3) и (4.4).*

5. Квантовые динамические отображения со значениями в множестве однокубитных квантовых каналов

На протяжении этого раздела под комплексным гильбертовым пространством $\mathcal{H}$ понимается двумерное комплексное пространство $\mathbb{C}^2$ со стандартным скалярным произведением и каноническим ортонормированным базисом. Через $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ обозначается пространство комплекснозначных матриц размера 2×2. Мы часто отождествляем оператор из $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ с его матрицей из $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, используя для их обозначения одни и те же символы. В свою очередь, в пространстве $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ фиксируется базис Паули $\{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$, состоящий из тождественного оператора и операторов Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Мы также отождествляем операторы из $\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))$ с соответствующими им в базисе Паули матрицами размера 4×4.

5.1. Коммутирующие биективные вполне положительно делимые квантовые процессы.

Зафиксируем вещественный параметр k. Рассмотрим линейное отображение $\Phi_k : \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{H})$, определенное действием на базисные векторы:

$$\Phi_k(I) = I, \quad \Phi_k(\sigma_x) = k \cdot \sigma_x, \quad \Phi_k(\sigma_y) = k \cdot \sigma_y, \quad \Phi_k(\sigma_z) = \sigma_z, \tag{5.1}$$

т.е. в базисе Паули матрица оператора Φ_k выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Строение квантовых каналов вида $\Phi : \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ детально изучено в [19]. В частности, там получены необходимые и достаточные условия того, что линейное отображение из $\mathfrak{B}(\mathfrak{L}(\mathcal{H}))$ является вполне положительным [19, см. (12), (13)]. Из этих результатов (см. также [20, Appendix B]) вытекает следующее условие:

Отображение Φ_k является квантовым каналом тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$|k| \leqslant 1. \tag{5.2}$$

Далее, пусть $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) := \{\rho \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \mid \rho \geqslant 0;\, tr\rho = 1\}$ – множество всех операторов плотности. Возьмем произвольный $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и разложим его по базису Паули:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z), \tag{5.3}$$

где r_x, r_y, r_z – вещественные параметры, такие, что выполняется неравенство $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \leqslant 1$. Вектор, составленный из этих параметров, называют *вектором Блоха* данного $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, и говорят, что множество состояний представляет собой шар единичного радиуса с центром в начале координат в пространстве $\mathbb{R}^3$.

После действия квантового канала Φ_k на ρ получаем выражение

$$\Phi_k(\rho) = \frac{1}{2}(I + k \cdot r_x\sigma_x + k \cdot r_y\sigma_y + r_z\sigma_z),$$

т.е. вектор Блоха преобразуется по правилу $(r_x, r_y, r_z) \to (k \cdot r_x,\ k \cdot r_y,\ r_z)$. Таким образом, единичный шар в $\mathbb{R}^3$ сжимается в k раз вдоль к оси z.

Пусть задана монотонно убывающая функция $k : [0, T] \longrightarrow (0, 1]$, такая, что выполняется условие $k(0) = 1$. По функции k определим процесс

$$\Phi_{dec} := \{\Phi_{k(t)} \in O_c(H) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ \Phi_{k(0)} = \mathcal{I}\},$$

составленный из каналов декогеренции $\Phi_{k(t)}$, задаваемых формулами (5.1).

Предложение 5.1. *Квантовый процесс Φ_{dec} является биективным вполне положительно делимым.*

Доказательство. Данный процесс является биективным, так как функция k положительна, а значит для каждого $t \in [0;T]$ существует обратный линейный оператор

$$\Phi_{k(t)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что процесс Φ_{dec} является вполне положительно делимым. Для этого рассмотрим пару чисел $t_1, t_2 \in [0;T]$, таких, что $t_1 \leqslant t_2$. В силу условия (5.2), композиция

$$\Phi_{k(t_2)} \circ \Phi_{k(t_1)}^{-1} = \Phi_{\frac{k(t_2)}{k(t_1)}}$$

является квантовым каналом тогда и только тогда, когда выполнено неравенство $\frac{k(t_2)}{k(t_1)} \leqslant 1$. Но оно справедливо в силу того, что функция $k(t)$ монотонно убывает и $t_1 \leqslant t_2$.

Таким образом, предложение доказано. □

С целью построения второго процесса, мы рассмотрим семейство унитарных операторов

$$\Omega = \left\{ U(t) = \exp\left(\frac{it\sigma_z}{2}\right) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \mid \quad 0 \leqslant t \leqslant T \right\}. \tag{5.4}$$

По этому семейству определим процесс

$$\Phi_\Omega := \left\{ \Phi_{U(t)} \in O_c(H) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ \Phi_{U(0)} = \mathcal{I} \right\},$$

состоящий из унитарных каналов, действующих по правилу

$$\Phi_{U(t)}(X) = U(t) \circ X \circ (U(t))^*, \quad X \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}).$$

Очевидно, что имеет место

Предложение 5.2. *Квантовый процесс Φ_Ω является биективным вполне положительно делимым.*

Прямым вычислением находятся формулы для преобразования векторов базиса Паули под действием канала $\Phi_{U(t)}$ из семейства Φ_Ω:

$$\Phi_{U(t)}(I) = I, \qquad \Phi_{U(t)}(\sigma_x) = cos(t) \cdot \sigma_x - sin(t) \cdot \sigma_y,$$
$$\Phi_{U(t)}(\sigma_y) = sin(t) \cdot \sigma_x + cos(t) \cdot \sigma_y, \qquad \Phi_{U(t)}(\sigma_z) = \sigma_z.$$

Или в матричном виде:

$$\Phi_{U(t)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(t) & sin(t) & 0 \\ 0 & -sin(t) & cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записывая оператор плотности $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ (см. (5.3)) в виде вектора-столбца

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

и применяя к нему линейное преобразование $\Phi_{U(t)}$, мы получаем вектор

$$\Phi_{U(t)}(\rho) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ cos(t) \cdot r_x + sin(t) \cdot r_y \\ -sin(t) \cdot r_x + cos(t) \cdot r_y \\ r_z \end{pmatrix}.$$

Это преобразование соответствует повороту вектора Блоха (r_x, r_y, r_z) на угол t вокруг оси z.

Непосредственно проверяется, что для всех $t_1, t_2 \in [0; T]$ справедливо равенство

$$\Phi_{U(t_1)} \circ \Phi_{k(t_2)} = \Phi_{k(t_2)} \circ \Phi_{U(t_1)},$$

т.е. имеет место

Предложение 5.3. *Квантовые процессы Φ_{dec} и Φ_Ω коммутируют.*

Замечание 5.1. *Следует отметить, что каналы $\Phi_{k(t)}$, составляющие процесс Φ_{dec}, являются ковариантными относительно максимальной абелевой группы унитарных операторов $\{\exp(it\sigma_z) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Этот факт гарантирует коммутирование процессов Φ_{dec} и Φ_Ω. Определение ковариантных каналов и связанных с ним понятий содержатся в* [21]–[23].

Далее, рассмотрим составной процесс

$$\Sigma(\Phi_{dec}, \Phi_\Omega) := \{\Phi_{k(t)} \circ \Phi_{U(t)} \in O_c(H) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ \Phi(0) = I\}.$$

Из Предложений 5.1, 5.2, 5.3 и 3.1 следует

Теорема 5.1. *Квантовый процесс $\Sigma(\Phi_{dec}, \Phi_\Omega)$ является биективным вполне положительно делимым.*

Этот подраздел завершим геометрической и физической интерпретациями составного квантового процесса $\Sigma(\Phi_{dec}, \Phi_\Omega)$. Заметим, что любой канал из этого процесса записывается в матричном виде следующим образом:

$$\Phi_{k(t)} \circ \Phi_{U(t)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k(t) \cdot cos(t) & k(t) \cdot sin(t) & 0 \\ 0 & -k(t) \cdot sin(t) & k(t) \cdot cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После действия линейного преобразования $\Phi_{k(t)} \circ \Phi_{U(t)}$ на произвольное состояние, представленное вектором Блоха (5.5), получается вектор-столбец

$$\Phi_{k(t)} \circ \Phi_{U(t)}(\rho) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ k(t)(cos(t) \cdot r_x - sin(t) \cdot r_y) \\ k(t)(sin(t) \cdot r_x + cos(t) \cdot r_y) \\ r_z \end{pmatrix}.$$

Так как функция $k : [0, T] \to (0, 1]$ монотонно убывает, то при увеличении параметра t вектор Блоха (r_x, r_y, r_z) испытывает спиралевидное движение, приближаясь к оси z.

5.2. Непрерывное биективное вполне положительно делимое квантовое динамическое отображение. Здесь, демонстрируя применение Предложения 4.2, мы докажем непрерывность процесса Φ_Ω из предыдущего подраздела.

Мы будем использовать матричную форму записи. Рассмотрим однопараметрическое семейство унитарных матриц (5.4):

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}, \quad t \in [0; T].$$

У нас имеется биективный вполне положительно делимый квантовый процесс Φ_Ω, состоящий из унитарных квантовых каналов

$$\Phi_{U(t)} : \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) : X \longmapsto U(t)X(U(t))^*, \quad t \in [0; T].$$

Покажем справедливость следующего утверждения.

Предложение 5.4. *Квантовый процесс* Φ_Ω *является непрерывным.*

Доказательство. В силу Предложения 4.2 достаточно показать выполнение условия (4.3) для произвольного $t \in [0;T]$. С этой целью фиксируем $t, t+\delta \in [0;T]$. Нетрудно видеть, что справедливы приводимые ниже формулы, в которых фигурируют индуцированная следовая норма (2.4) и следовая норма (2.3), а максимум берется по всем матрицам

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}), \quad \text{для которых} \quad \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\|_{tr} \leqslant 1.$$

Действительно, имеем оценку

$$\begin{aligned} \left\| \Phi_{U(t)} \circ \Phi^{-1}_{U(t+\delta)} - \mathcal{I} \right\| &= \max \left\{ \left\| (\Phi_{U(t)} \circ \Phi^{-1}_{U(t+\delta)} - \mathcal{I}) \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \right\|_{tr} \right\} \\ &= \max \left\| \begin{pmatrix} 0 & b(e^{-i\delta}-1) \\ c(e^{i\delta}-1) & 0 \end{pmatrix} \right\|_{tr} \\ &= \max tr \begin{pmatrix} |c(e^{i\delta}-1)| & 0 \\ 0 & |b(e^{-i\delta}-1)| \end{pmatrix} \\ &= |e^{i\delta}-1| \max(|c|+|b|) \leqslant |e^{i\delta}-1| \max(|c|+|b|+|a|+|d|). \end{aligned}$$

Далее, на пространстве $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ рассмотрим l_1- норму, которая задается формулой

$$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\|_1 = |a|+|b|+|c|+|d|.$$

Поскольку все нормы на $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ эквивалентны, то найдется вещественное число $C > 0$, такое, что

$$\| \cdot \|_1 \leqslant C \cdot \| \cdot \|_{tr}.$$

С учетом этого неравенства и полученной выше оценки, имеем неравенство

$$\left\| \Phi_{U(t)} \circ \Phi^{-1}_{U(t+\delta)} - \mathcal{I} \right\| \leqslant C \cdot |e^{i\delta}-1|.$$

Переход в нем к пределу при $\delta \longrightarrow 0$ доставляет требуемое равенство (4.3). □

Замечание 5.2. *В случае непрерывной функции* k *можно показать, используя, например,* [18, Теорема 12.10], *что квантовый процесс* Φ_{dec} *из подраздела 5.1 непрерывен.*

5.3. Разрывное биективное вполне положительно делимое квантовое динамическое отображение. Зафиксируем произвольные положительные числа t_0, δ_1, δ_2, такие, что выполняются условия: $0 < t_0 < T$ и $\delta_1 - \delta_2 \neq 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Определим однопараметрическое семейство унитарных матриц формулой

$$U(t) = \begin{cases} e^{it} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant t_0; \\ \begin{pmatrix} e^{i(t+\delta_1)} & 0 \\ 0 & e^{i(t+\delta_2)} \end{pmatrix}, & \text{если } t_0 < t \leqslant T. \end{cases}$$

Для каждой из матриц $U(t)$ рассмотрим биективное вполне положительное сохраняющее след отображение

$$\Phi_{U(t)} : \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) : X \longmapsto U(t)X(U(t))^*.$$

Заметим, что для каждого $t \in [t; t_0]$ канал $\Phi_{U(t)}$ является тождественным отображением на $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

В результате у нас имеется биективный вполне положительно делимый квантовый процесс

$$\Phi := \left\{ \Phi_{U(t)} \in O_c(\mathcal{H}) \mid 0 \leqslant t \leqslant T \right\},$$

состоящий из унитарных каналов.

Предложение 5.5. *Квантовый процесс* $\Phi : [0;T] \longrightarrow O_c(\mathcal{H})$ *является разрывным в точке* t_0.

Доказательство. Установим справедливость следующего соотношения:

$$\lim_{\tau \to 0+} \Phi_{U(t_0+\tau)} \neq \Phi_{U(t_0)}.$$

Пусть $\tau \in (0; T - t_0]$. Для оценки снизу операторной нормы $\left\|\Phi_{U(t_0+\tau)} - \Phi_{U(t_0)}\right\|$, индуцированной следовой нормой $\|\cdot\|_{tr}$ на пространстве матриц $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, введем в рассмотрение матрицу плотности

$$S := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что имеет место равенство

$$[\Phi_{U(t_0+\tau)} - \Phi_{U(t_0)}](S) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{i(\delta_1-\delta_2)} - 1) \\ e^{i(\delta_2-\delta_1)} - 1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, абсолютная величина этой матрицы записывается следующим образом:

$$\left|[\Phi_{U(t_0+\tau)} - \Phi_{U(t_0)}](S)\right| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} |e^{i(\delta_1-\delta_2)} - 1| & 0 \\ 0 & |e^{i(\delta_1-\delta_2)} - 1| \end{pmatrix}.$$

Здесь и ниже в формуле, для матрицы $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ используется обозначение $|A| = \sqrt{A^*A}$.

Поэтому для любого числа $\tau \in (0; T - t_0]$ справедлива следующая оценка снизу нормы разности квантовых каналов:

$$\begin{aligned} \left\|\Phi_{U(t_0+\tau)} - \Phi_{U(t_0)}\right\| &= \max\left\{ \left\|[\Phi_{U(t_0+\tau)} - \Phi_{U(t_0)}](X)\right\|_{tr} \mid X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}), \|X\|_{tr} \leqslant 1 \right\} \\ &\geqslant \left\|[\Phi_{U(t_0+\tau)} - \Phi_{U(t_0)}](S)\right\|_{tr} = \; tr \left|[\Phi_{U(t_0+\tau)} - \Phi_{U(t_0)}](S)\right| \\ &= |e^{i(\delta_1-\delta_2)} - 1| \neq 0. \end{aligned}$$

Тем самым показано, что биективный вполне положительно делимый квантовый процесс Φ является разрывным в точке t_0. □

Авторы выражают глубокую благодарность Г.Г. Амосову и А.Е. Теретёнкову за стимулирующие беседы о квантовых процессах и о вопросах, близких к тематике статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.С. Холево. *Безгранично делимые измерения в квантовой теории вероятностей* // Теория вероятн. и ее примен. **31**:3, 560–564 (1986).
2. Л.В. Денисов. *Безгранично делимые марковские отображения в квантовой теории вероятностей* // Теория вероятн. и ее примен. **33**:2, 417–420 (1988).
3. M.M. Wolf, J.I. Cirac. *Dividing quantum channels* // Commun. Math. Phys. **279**:1, 147–168 (2008).
4. С.Н. Филиппов. *Тензорные произведения квантовых отображений* // Итоги науки и техн. Сер. соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **151**, 117–125 (2018).
5. H.-P. Breuer, E.-M. Laine, J. Piilo, B. Vacchini. *Colloquium: Non-Markovian dynamics in open quantum system* // Rev. Mod. Phys: **88**, 021002 (2016).
6. B. Bylicka, M. Johansson, A. Acín. *Constructive method for detecting the information backflow of bijective non-completely-positive-divisible dynamics* // Phys. Rev. Lett. **118**, 120501 (2017).
7. D. Davalos, M. Ziman, C. Pineda. *Divisibility of qubit channels and dynamical maps* // Quantum **3**, 144 (2019).
8. D. Chruściński, A. Kossakowski, S. Pascazio. *Long-time memory in non-Markovian evolutions* // Phys. Rev. A. **81**, 032101 (2010).

9. S.N. Filippov, J. Piilo, S. Maniscalco, M. Ziman *Divisibility of quantum dynamical maps and collision models* // Phys. Rev. A. **96**, 032111 (2017).
10. S. Milz, M.S. Kim, F.A. Pollock, K. Modi. *Completely positive divisibility does not mean Markovianity* // Phys. Rev. Lett. **123**, 040401 (2019).
11. D. Chruściński. *Introduction to Non-Markovian Evolution of n-Level Quantum Systems*, Open quantum systems: A mathematical perspective, ed. by Bahns D., A. Pohl A., Witt I., Birkhauser, Cham. 55–76 (2019).
12. А.С. Холево. *Квантовые системы, каналы, информация.* М.: МЦНМО. 2014.
13. J. Watrous. *The theory of quantum information.* Cambridge: Cambridge University Press. 2018.
14. А.Я. Хелемский. *Лекции по функциональному анализу.* М.: МЦНМО. 2004.
15. V. Paulsen. *Completely bounded maps and operator algebras.* Cambridge: Cambridge University Press. 2003.
16. А.Я. Хелемский. *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии.* М.: Наука. 1989.
17. Л.С. Понтрягин. *Непрерывные группы.* М.: Наука. 1984.
18. Р.Н. Гумеров. *Элементы общей топологии.* Казань: Изд-во КГУ. 2007.
19. M.B. Ruskai, S. Szarek, E. Werner. *An analysis of completely positive trace-preserving maps on* $\mathscr{M}_2$ // Linear Algebra Appl. **347**:(1–3), 159–187 (2002).
20. C. King, M.B. Ruskai. *Minimal entropy of states emerging from noisy quantum channels* // IEEE Trans. Inform. Theory. **47**:1, 192–209 (2001).
21. Г.Г. Амосов. *Замечание о гипотезе аддитивности для квантового деполяризующего канала* // Пробл. передачи информ. **42**:2, 3–11 (2006).
22. G.G. Amosov. *On Weyl channels being covariant with respect to the maximum commutative group of unitaries* // J. Math. Phys. **48**:1, 012104 (2007).
23. G.G. Amosov. *On classical capacity of Weyl channels* // Quantum Inf. Process. **19**, 401 (2020).

Ренат Нельсонович Гумеров,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 35,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: Renat.Gumerov@kpfu.ru

Руслан Линарович Хажин,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 35,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: ruslan.khazhin@mail.ru