

УДК 515.172.2

# ОРБИТЫ РАЗЛОЖИМЫХ 7-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ С $\mathfrak{sl}(2)$ -ПОДАЛГЕБРОЙ

А.В. АТАНОВ

**Аннотация.** Задача построения полной классификации голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей двумерных комплексных пространств была решена Э. Картаном в 1932 г. Аналогичное описание в трехмерном случае было недавно получено А.В. Лободой. В работе обсуждается фрагмент классификации (локально) голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей 4-мерного комплексного пространства, являющихся орбитами в  $\mathbb{C}^4$  одного семейства 7-мерных алгебр Ли. Как показано в работах Белошапки и Коссовского, Лободы и др., применение идей Э. Картана позволяет относительно легко получать описания орбит для алгебр, имеющих абелевы идеалы достаточно больших размерностей. В частности, наличие 4-мерного абелева идеала в 7-мерной алгебре Ли голоморфных векторных полей в  $\mathbb{C}^4$  часто приводит к свойству трубчатости для всех орбит такой алгебры. Алгебры Ли из рассматриваемого в работе семейства являются прямыми суммами алгебры  $\mathfrak{sl}(2)$  и нескольких 4-мерных алгебр Ли и имеют не более чем 3-мерные абелевы подалгебры. При помощи техники совместного «выпрямления» векторных полей получено полное описание всех невырожденных по Леви голоморфно однородных гиперповерхностей, являющихся орбитами в  $\mathbb{C}^4$  рассматриваемых алгебр. Многие из полученных однородных гиперповерхностей также оказываются трубчатыми многообразиями. Вместе с тем вопрос о возможной сводимости к трубкам остальных поверхностей еще предстоит исследовать. Эффективным инструментом такого исследования, как и детального изучения вопросов о голоморфной эквивалентности получаемых орбит, может оказаться техника нормальных форм Мозера. С ее помощью в статье исследован вопрос о сферичности представителей одного из полученных семейств гиперповерхностей. Однако применение метода нормальных форм для гиперповерхностей в комплексных пространствах размерности 4 и выше требует дальнейшей разработки этой техники.

**Ключевые слова:** однородная гиперповерхность, голоморфное преобразование, разложимая алгебра Ли.

**Mathematics Subject Classification:** 17B66, 53B25, 32V40

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача локального описания вещественных гиперповерхностей комплексных пространств, однородных относительно голоморфных преобразований, была полностью решена в  $\mathbb{C}^2$  Э. Картаном (см. [1]). Аналогичная классификация в  $\mathbb{C}^3$  разбивается на два больших фрагмента, один из которых содержит описание всех однородных вырожденных по Леви (см. [2]), а второй – невырожденных (см. [3]–[8]) гиперповерхностей в  $\mathbb{C}^3$ .

---

A.V. ATANOV, ORBITS OF DECOMPOSABLE 7-DIMENSIONAL LIE ALGEBRAS WITH  $\mathfrak{sl}(2)$  SUBALGEBRA.

© АТАНОВ А.В. 2022.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00497.

Поступила 2 апреля 2021 г.

В связи с завершением классификации голоморфно однородных гиперповерхностей в  $\mathbb{C}^3$  возникает естественный интерес к получению аналогичных описаний и в пространствах больших размерностей – в частности, в  $\mathbb{C}^4$ . Помимо очевидных трубок над аффинно однородными гиперповерхностями из  $\mathbb{R}^4$  (см., например, [9]–[11]) известны лишь отдельные примеры голоморфно однородных гиперповерхностей в  $\mathbb{C}^4$  (см. [12], [13]).

По аналогии с трехмерным случаем, задачу построения классификации голоморфно однородных гиперповерхностей в  $\mathbb{C}^4$  целесообразно разделить на две части: описание вырожденных и невырожденных по Леви гиперповерхностей. Напомним, что под вырожденностью по Леви (в точке 0) гладкой гиперповерхности  $M \subset \mathbb{C}^4$ , содержащей начало координат и определяемой уравнением  $\text{Im } z_4 = F(z_1, z_2, z_3, \text{Re } z_4)$ ,  $dF(0) = 0$  понимается равенство нулю (в точке 0) определителя матрицы Гессе  $(\partial^2 F / \partial z_k \partial \bar{z}_l)$  ( $k, l \in \{1, 2, 3\}$ ).

Цель данной работы состоит в построении полного описания всех невырожденных по Леви однородных гиперповерхностей, являющихся орбитами в  $\mathbb{C}^4$  четырех разложимых 7-мерных алгебр

$$\mathfrak{r}_k = \mathfrak{h}_k \oplus \mathfrak{sl}(2),$$

где 3-мерная алгебра  $\mathfrak{sl}(2)$  определяется коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_2] = e_1, [e_1, e_3] = 2e_2, [e_2, e_3] = e_3,$$

а коммутационные соотношения для 4-мерных алгебр  $\mathfrak{h}_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ), даны (см. [14]) в следующей таблице ( $|h| \leq 1, p \geq 0$ ):

Таблица 1.1

Алгебры	$[e_1, e_3]$	$[e_1, e_4]$	$[e_2, e_3]$	$[e_2, e_4]$	$[e_3, e_4]$
$\mathfrak{h}_1$		$2e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_2 + e_3$
$\mathfrak{h}_2$		$(h + 1)e_1$	$e_1$	$e_2$	$he_3$
$\mathfrak{h}_3$		$2pe_1$	$e_1$	$pe_2 - e_3$	$e_2 + pe_3$
$\mathfrak{h}_4$	$e_1$	$-e_2$	$e_2$	$e_1$	

Выбор именно этих алгебр для рассмотрения объясняется тем, что максимальная размерность их абелевых подалгебр равна трем. Из работ [7], [12], [15] следует, что наличие в алгебре векторных полей в  $\mathbb{C}^n$  абелевой подалгебры размерности  $n$  существенно облегчает изучение орбит таких алгебр и часто приводит либо к вырожденности по Леви этих орбит, либо к их трубчатой структуре. А наиболее интересные однородные Леви-невырожденные поверхности (см. [7], [15]) возникали при рассмотрении алгебр с абелевыми подалгебрами малых размерностей.

Отметим, что среди разложимых семимерных алгебр Ли, не имеющих абелевых подалгебр размерности 4, лишь восемь типов алгебр являются прямыми суммами четырехмерного и трехмерного слагаемых. Четыре из этих восьми типов – алгебры  $\mathfrak{r}_k = \mathfrak{h}_k \oplus \mathfrak{sl}(2)$  ( $k = 1, \dots, 4$ ), рассматриваемые в тексте. Еще четыре типа составляют алгебры  $\mathfrak{s}_k = \mathfrak{h}_k \oplus \mathfrak{su}(2)$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) с теми же четырехмерными слагаемыми  $\mathfrak{h}_k$ , что и в первом случае. Изучение орбит алгебр  $\mathfrak{s}_k$  автором в настоящее время еще не завершено.

Для построения описания всех невырожденных по Леви однородных гиперповерхностей, являющихся орбитами в  $\mathbb{C}^4$  7-мерных алгебр  $\mathfrak{r}_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) используется техника реализаций абстрактных алгебр Ли в виде алгебр голоморфных векторных полей на однородных многообразиях (см. [16]), развивающая идеи Э. Картана из работы [1].

Основной результат данной статьи содержится в следующем утверждении.

**Теорема 1.1.** Пусть  $p$  – центр ростка вещественно-аналитической гиперповерхности  $M$  в  $\mathbb{C}^4$ , а  $g(M)$  – 7-мерная алгебра ростков голоморфных векторных полей на  $M$ , имеющая в  $p$  полный ранг. Если  $g(M)$  и  $\mathfrak{r}_1$  изоморфны как алгебры Ли, то  $M$  может быть только вырожденной по Леви. Невырожденными по Леви 7-мерными орбитами

алгебр  $\mathfrak{r}_2$ ,  $\mathfrak{r}_3$ ,  $\mathfrak{r}_4$  являются (с точностью до локальной голоморфной эквивалентности) лишь поверхности из следующих семейств:

$$\mathfrak{r}_2 : \quad y_4 = y_3(y_1 + \ln y_3 + A \ln y_2), \quad A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (1.1)$$

$$\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3 : \quad y_4 = A \ln y_1 - \ln(y_2 \pm y_3^2), \quad A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (1.2)$$

$$(y_4 \pm y_3^2)y_2 + y_1 = A|z_1|, \quad A \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, \quad (1.3)$$

$$\mathfrak{r}_4 : \quad y_2 = |z_1| |y_3 + iy_4|^A e^{B \arg(y_3 + iy_4)}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad (1.4)$$

$$(x_1 - y_2 y_4)^2 + (y_1 - y_3 y_4)^2 = (1 - A)|z_1|^2, \quad A < 1, \quad A \neq 0, \quad (1.5)$$

$$y_1 y_4 + x_1 y_3 = |z_1|^2 (\ln y_2 + A \arg z_1), \quad A \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

где  $z_1, z_2, z_3, z_4$  – переменные в  $\mathbb{C}^4$ ,  $x_k = \operatorname{Re} z_k$ ,  $y_k = \operatorname{Im} z_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ .

**Замечание 1.1.** Уравнения (1.2) и (1.3) в приведенном списке связываются сразу с двумя семействами алгебр  $\mathfrak{r}_2$ ,  $\mathfrak{r}_3$ . Такая запись означает, что каждое из семейств гиперповерхностей, задаваемых уравнениями (1.2) и (1.3), является орбитой  $\mathfrak{r}_2$  и  $\mathfrak{r}_3$  одновременно. Совпадение орбит двух разных алгебр Ли – нередкое явление (см., например, [7]) в том случае, когда эти алгебры являются подалгебрами полной алгебры  $\mathfrak{g}(M)$  для исходной орбиты. Именно так обстоит дело с поверхностями (1.2) и (1.3), для каждой из которых размерность  $\mathfrak{g}(M)$  оказывается большей, чем равная 7 размерность каждой из алгебр семейств  $\mathfrak{r}_2$ ,  $\mathfrak{r}_3$ .

Отметим, что гиперповерхности, задаваемые уравнениями (1.1), (1.2), относятся (а (1.4) – сводятся) к трубчатым многообразиям. Поверхности из семейств (1.3), (1.5), (1.6), предположительно, могут сводиться к трубкам лишь при отдельных значениях параметров. Однако, в целом, вопрос о такой сводимости достаточно сложен и требует отдельного рассмотрения. Важным свойством гиперповерхностей является также их сферичность, то есть локальная эквивалентность сфере или ее аналогам. Пример изучения вопроса о сферичности гиперповерхностей из одного полученного семейства приводится в последнем разделе статьи.

**Замечание 1.2.** Вопрос о возможной эквивалентности однородных гиперповерхностей (1.1)–(1.6) друг другу при отдельных значениях параметров  $A$  и  $B$  требует специального изучения и в настоящей работе не рассматривается.

## 2. ГОЛОМОРФНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГЕБР ЛИ

Известно несколько подходов к построению классификаций голоморфно однородных гиперповерхностей. Например, однородные гиперповерхности можно описывать с помощью нормальных (канонических) уравнений Мозера (см. [17]), то есть конечными наборами тейлоровских коэффициентов из определяющих эти гиперповерхности уравнений. Таким способом, например, были получены некоторые из упомянутых выше фрагментов классификации в  $\mathbb{C}^3$  ([3], [4]). Другой подход связан с использованием для описания гиперповерхностей действующих на них групп и соответствующих им алгебр Ли. В работе [16] была продемонстрирована техника получения голоморфно однородных гиперповерхностей в  $\mathbb{C}^3$  на основе построения голоморфных реализаций абстрактных алгебр Ли. С помощью этого подхода была получена значительная часть результатов, составивших классификацию голоморфно однородных гиперповерхностей в пространстве  $\mathbb{C}^3$  (см. [6], [7], [15]). Следует отметить, что иногда полезным оказывается и одновременное применение двух упомянутых выше подходов (см., например, [18]).

Рассмотрим подробнее технику построения голоморфных реализаций алгебр Ли, которая далее будет использована для доказательства теоремы 1.1.

**Определение 2.1.** *Вещественная гиперповерхность  $M \subset \mathbb{C}^4$  называется голоморфно однородной в точке  $p \in M$ , если существует алгебра Ли касательных к  $M$  голоморфных векторных полей, имеющая ранг 7 в окрестности точки  $p$ .*

Выберем некоторую вещественную семимерную алгебру Ли, заданную своими коммутационными соотношениями.

С выбранной нами семимерной алгеброй Ли свяжем набор из семи ростков (с центром в некоторой точке  $p \in \mathbb{C}^4$ ) голоморфных векторных полей

$$e_k = a_k(z_1, z_2, z_3, z_4) \frac{\partial}{\partial z_1} + b_k(z_1, z_2, z_3, z_4) \frac{\partial}{\partial z_2} + c_k(z_1, z_2, z_3, z_4) \frac{\partial}{\partial z_3} + d_k(z_1, z_2, z_3, z_4) \frac{\partial}{\partial z_4}, \quad k = 1, \dots, 7, \quad (2.1)$$

линейно независимых над  $\mathbb{R}$ . В краткой записи,

$$e_k = (a_k, b_k, c_k, d_k), \quad k = 1, \dots, 7,$$

где  $a_k, b_k, c_k, d_k$  – ростки голоморфных (в точке  $p$ ) функций комплексных переменных  $z_1, z_2, z_3, z_4$ . Вещественные и мнимые части переменных  $z_j$  в дальнейшем будем обозначать, соответственно, через  $x_j$  и  $y_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ).

**Определение 2.2.** *Алгебру Ли  $\mathfrak{g}$  голоморфных векторных полей в  $\mathbb{C}^4$  назовем голоморфной реализацией абстрактной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ , если коммутационные соотношения у этих двух алгебр совпадают.*

Коммутатор двух полей  $[e_k, e_j]$  вычисляется следующим общеизвестным образом:

$$[e_k, e_j] = \left( a_k \frac{\partial e_j}{\partial z_1} + b_k \frac{\partial e_j}{\partial z_2} + c_k \frac{\partial e_j}{\partial z_3} + d_k \frac{\partial e_j}{\partial z_4} \right) - \left( a_j \frac{\partial e_k}{\partial z_1} + b_j \frac{\partial e_k}{\partial z_2} + c_j \frac{\partial e_k}{\partial z_3} + d_j \frac{\partial e_k}{\partial z_4} \right).$$

Используя голоморфные преобразования, функциональные коэффициенты полей (2.1), связанных с алгеброй Ли, можно изменять и приводить к более «простому» виду (например, под простым здесь можно понимать поле, у которого один или больше коэффициентов равны нулю или после преобразования зависят от меньшего числа переменных, чем до выполнения преобразования). В частности, справедливо следующее утверждение (см., например, [12]).

**Лемма 2.1.** *Если на невырожденной по Леви гиперповерхности  $M \subset \mathbb{C}^4$  имеется пара ростков коммутирующих голоморфных векторных полей  $e_j$  и  $e_k$ , линейно независимых над  $\mathbb{R}$ , то эта пара может быть выпрямлена, то есть приведена к виду*

$$e_j = (0, 0, 0, 1), \quad e_k = (0, 0, 1, 0).$$

Упрощение даже двух полей до вида, указанного в лемме 2.1, приводит к значительным упрощениям и остальных полей за счет коммутационных связей полей друг с другом. Рассматривая при необходимости ряд подслучаев, связанных с равенством или неравенством нулю некоторых компонент векторных полей, мы в итоге приводим базис рассматриваемой алгебры Ли к виду, удобному для дальнейшего интегрирования (то есть получения по алгебре голоморфных векторных полей уравнения поверхности, которой она касается). При этом требуется еще учитывать и ранг системы векторных полей, который должен равняться семи, что значительно сужает количество требующих рассмотрения подслучаев.

Для алгебр векторных полей справедливо также следующее свойство, являющееся обобщением на случай  $\mathbb{C}^4$  утверждений, приведенных в [16], [19].

**Лемма 2.2.** Пусть в алгебре голоморфных векторных полей в  $\mathbb{C}^4$  имеется четверка линейно независимых векторных полей, три из которых имеют вид

$$e_1 = (0, 0, 0, 1), \quad e_2 = (0, 0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 1, 0, 0).$$

Если компоненты четвертого поля с точностью до слагаемых  $\varphi_k(z_1)$ , ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) являются линейными функциями остальных переменных, то голоморфной заменой координат это поле освобождается от всех  $\varphi_k(z_1)$ . При этом выпрямленный вид первой тройки полей и линейные компоненты поля  $e_4$  сохраняются.

Напомним, что в данной работе мы интересуемся только невырожденными по Леви голоморфно однородными гиперповерхностями. В связи с этим приведем два утверждения, которые в ряде случаев позволяют по виду векторных полей делать вывод о вырожденности соответствующих гиперповерхностей (эти утверждения легко переносятся на случай  $\mathbb{C}^4$  со случая  $\mathbb{C}^3$  (см. [7]) и потому приводятся здесь без доказательства).

**Лемма 2.3.** Пусть заданы росток (с центром в точке  $p$ ) вещественно-аналитической гиперповерхности  $M \subset \mathbb{C}^4$  и 7-мерная алгебра  $\mathfrak{g}(M)$  ростков касательных к  $M$  голоморфных векторных полей, имеющая в точке  $p$  ранг 7. Если шесть базисных голоморфных полей указанной алгебры имеют нулевой коэффициент при одном и том же операторе  $\frac{\partial}{\partial z_k}$ , то гиперповерхность  $M$  вырождена по Леви.

**Лемма 2.4.** Пусть заданы росток (с центром в точке  $p$ ) вещественно-аналитической гиперповерхности  $M \subset \mathbb{C}^4$  и 7-мерная алгебра  $\mathfrak{g}(M)$  ростков касательных к  $M$  голоморфных векторных полей, имеющая в точке  $p$  ранг 7. Если четверка базисных голоморфных полей указанной алгебры имеет (с точностью до переобозначения переменных и перенумерации полей) вид

$$e_j = (0, 0, c_j(z_1, z_2, z_3, z_4), d_j(z_1, z_2, z_3, z_4)), \quad j = 1, \dots, 4,$$

то гиперповерхность  $M$  вырождена по Леви.

### 3. ГОЛОМОРФНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ РАЗЛОЖИМЫХ 7-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ С $\mathfrak{sl}(2)$ -ПОДАЛГЕБРОЙ

При использовании описанной выше техники голоморфных реализаций для построения классификации голоморфно однородных гиперповерхностей в  $\mathbb{C}^4$  необходимо рассмотреть, в частности, все 7-мерные алгебры Ли. Однако, в отличие от случая  $\mathbb{C}^3$ , где рассматривались 5-мерные алгебры, полного списка алгебр Ли, имеющих размерность 7, не существует. На данный момент известны описания алгебр Ли вплоть до размерности 6 (см. [20]), причем, если 5-мерных алгебр насчитывается лишь несколько десятков (см. [20], [21]), то список 6-мерных алгебр содержит уже сотни представителей. Классификация 7-мерных алгебр Ли, очевидно, будет еще более объемной. В связи с этим естественно изучать отдельные классы 7-мерных алгебр Ли, ориентируясь на опыт описания голоморфно однородных гиперповерхностей в  $\mathbb{C}^3$ .

Для доказательства теоремы 1.1 будем строить голоморфные реализации четырех 7-мерных разложимых алгебр Ли (являющихся прямыми суммами 3-мерной алгебры  $\mathfrak{sl}(2)$  и нескольких 4-мерных алгебр), определяемых следующими коммутационными соотношениями:

Таблица 3.1

	$[e_1, e_2]$	$[e_1, e_3]$	$[e_2, e_3]$	$[e_4, e_6]$	$[e_4, e_7]$	$[e_5, e_6]$	$[e_5, e_7]$	$[e_6, e_7]$
$\mathfrak{r}_1$	$e_1$	$2e_2$	$e_3$		$2e_4$	$e_4$	$e_5$	$e_5 + e_6$
$\mathfrak{r}_2$	$e_1$	$2e_2$	$e_3$		$(h+1)e_4$	$e_4$	$e_5$	$he_6$
$\mathfrak{r}_3$	$e_1$	$2e_2$	$e_3$		$2pe_4$	$e_4$	$pe_5 - e_6$	$e_5 + pe_6$
$\mathfrak{r}_4$	$e_1$	$2e_2$	$e_3$	$e_4$	$-e_5$	$e_5$	$e_4$	

Везде в этой таблице  $|h| \leq 1$ ,  $p \geq 0$ .

Отметим, что максимальная размерность абелевых подалгебр для всех алгебр  $\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_4$  равна трем.

Будем строить голоморфные реализации для каждой из указанных алгебр, считая, что их базисные поля имеют вид

$$e_j = (a_j(z_1, z_2, z_3, z_4), b_j(z_1, z_2, z_3, z_4), c_j(z_1, z_2, z_3, z_4), d_j(z_1, z_2, z_3, z_4)), \quad j = 1, \dots, 7.$$

Изучение коммутационных соотношений для алгебр  $\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_4$  позволяет провести некоторые предварительные упрощения векторных полей, одинаковые для всех алгебр из списка.

**Лемма 3.1.** *Любая голоморфная реализация алгебр  $\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_4$ , имеющая невырожденные по Леви интегральные гиперповерхности в  $\mathbb{C}^4$ , сводится (с точностью до локальной голоморфной эквивалентности) к алгебрам с базисами следующих видов:*

$$\begin{aligned}
e_1 &= (0, 1, 0, 0), \\
e_2 &= (a_2(z_1), z_2 + b_2(z_1), c_2(z_1), d_2(z_1)), \\
e_3 &= (2a_2(z_1)z_2 + a_3(z_1), z_2^2 + 2b_2(z_1)z_2 + b_3(z_1), \\
&\quad 2c_2(z_1)z_2 + c_3(z_1), 2d_2(z_1)z_2 + d_3(z_1)), \\
e_4 &= (0, 0, 0, 1), \\
e_5 &= (0, 0, 1, 0), \\
e_6 &= (a_6(z_1, z_3, z_4), b_6(z_1, z_3, z_4), c_6(z_1, z_3, z_4), d_6(z_1, z_3, z_4)), \\
e_7 &= (a_7(z_1, z_3, z_4), b_7(z_1, z_3, z_4), c_7(z_1, z_3, z_4), d_7(z_1, z_3, z_4)).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

*Доказательство.* Согласно лемме 2.1, два (коммутирующих) векторных поля из семи для каждой алгебры можно выпрямить. Будем считать далее, что

$$e_4 = (0, 0, 0, 1), \quad e_5 = (0, 0, 1, 0).$$

Соотношения  $[e_1, e_4] = 0$ ,  $[e_2, e_4] = 0$ ,  $[e_3, e_4] = 0$  приводят к равенствам

$$\left( -\frac{\partial a_j}{\partial z_4}, -\frac{\partial b_j}{\partial z_4}, -\frac{\partial c_j}{\partial z_4}, -\frac{\partial d_j}{\partial z_4} \right) = (0, 0, 0, 0), \quad j = 1, 2, 3,$$

из которых следует, что функциональные коэффициенты полей  $e_1, e_2, e_3$  не зависят от переменной  $z_4$ .

Аналогично, используя равенства  $[e_1, e_5] = 0$ ,  $[e_2, e_5] = 0$ ,  $[e_3, e_5] = 0$ , получаем

$$\left( -\frac{\partial a_j}{\partial z_3}, -\frac{\partial b_j}{\partial z_3}, -\frac{\partial c_j}{\partial z_3}, -\frac{\partial d_j}{\partial z_3} \right) = (0, 0, 0, 0), \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно, функциональные коэффициенты полей  $e_1, e_2, e_3$  не зависят и от переменной  $z_3$ .

Согласно лемме 2.4, для невырожденных по Леви интегральных гиперповерхностей выполняется (в некоторой точке) хотя бы одно из двух неравенств

$$(a_k(z_1, z_2), b_k(z_1, z_2)) \neq (0, 0) \quad (k = 1, 2).$$

Не ограничивая общности рассмотрения, будем считать, что  $(a_1(z_1, z_2), b_1(z_1, z_2)) \not\equiv (0, 0)$ . Тогда поле  $e_1$  можно привести к виду

$$e_1 = (0, 1, 0, 0).$$

С учетом упрощенного вида поля  $e_1$ , соотношения  $[e_1, e_6] = 0$ ,  $[e_1, e_7] = 0$  приводят к равенствам

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial a_6}{\partial z_2}, \frac{\partial b_6}{\partial z_2}, \frac{\partial c_6}{\partial z_2}, \frac{\partial d_6}{\partial z_2} \right) &= (0, 0, 0, 0), \\ \left( \frac{\partial a_7}{\partial z_2}, \frac{\partial b_7}{\partial z_2}, \frac{\partial c_7}{\partial z_2}, \frac{\partial d_7}{\partial z_2} \right) &= (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функциональные коэффициенты полей  $e_6$ ,  $e_7$  не зависят от переменной  $z_2$ .

Кроме того, так как  $[e_1, e_2] = e_1$ , то

$$\left( \frac{\partial a_2}{\partial z_2}, \frac{\partial b_2}{\partial z_2}, \frac{\partial c_2}{\partial z_2}, \frac{\partial d_2}{\partial z_2} \right) = (0, 1, 0, 0),$$

из которого получаем следующий вид поля  $e_2$ :

$$e_2 = (a_2(z_1), z_2 + b_2(z_1), c_2(z_1), d_2(z_1)).$$

Соотношение  $[e_1, e_3] = 2e_2$  с учетом полученных упрощений дает равенство

$$\left( \frac{\partial a_3}{\partial z_2}, \frac{\partial b_3}{\partial z_2}, \frac{\partial c_3}{\partial z_2}, \frac{\partial d_3}{\partial z_2} \right) = (2a_2(z_1), 2z_2 + 2b_2(z_1), 2c_2(z_1), 2d_2(z_1)),$$

которое и позволяет привести поле  $e_3$  к виду, выписанному в формулировке леммы.

Покажем теперь, что случай, когда  $(a_1, b_1) \equiv (0, 0)$ , приводит к противоречию.

Пусть в некоторой точке поверхности  $(a_1(z_1, z_2), b_1(z_1, z_2)) \equiv (0, 0)$ . Как было отмечено выше, в этом случае обязательно выполняется неравенство  $(a_2(z_1, z_2), b_2(z_1, z_2)) \not\equiv (0, 0)$ . Следовательно, поле  $e_2$  можно привести к виду

$$e_2 = (0, 1, 0, 0).$$

Таким образом, поля  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$  запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, c_1(z_1, z_2), d_1(z_1, z_2)), \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_3 &= (a_3(z_1, z_2), b_3(z_1, z_2), c_3(z_1, z_2), d_3(z_1, z_2)). \end{aligned}$$

Согласно коммутационным соотношениям алгебры, должно выполняться равенство  $[e_1, e_3] = 2e_2$ . Однако две первые компоненты в коммутаторе  $[e_1, e_3]$  будут нулевыми, в то время как две первые компоненты поля  $e_2$  имеют вид  $(0, 2)$ . Следовательно, случай  $(a_1, b_1) \equiv (0, 0)$  невозможен.

Лемма доказана.  $\square$

Таким образом, будем считать, что набор из семи полей для каждой из алгебр  $\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_4$  имеет начальный вид (3.1).

**Замечание 3.1.** *Везде далее в записях коэффициентов векторных полей символами  $A_k, B_k, C_k, D_k$  ( $k = 1, \dots, 7$ ) обозначены комплексные константы.*

**3.1. Голоморфные реализации алгебры  $\mathfrak{r}_1$ .** Из коммутационных соотношений  $[e_4, e_6] = 0$ ,  $[e_4, e_7] = 2e_4$ ,  $[e_5, e_6] = e_4$ ,  $[e_5, e_7] = e_5$  получаем:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial a_6}{\partial z_4}, \frac{\partial b_6}{\partial z_4}, \frac{\partial c_6}{\partial z_4}, \frac{\partial d_6}{\partial z_4} \right) &= (0, 0, 0, 0), \\ \left( \frac{\partial a_7}{\partial z_4}, \frac{\partial b_7}{\partial z_4}, \frac{\partial c_7}{\partial z_4}, \frac{\partial d_7}{\partial z_4} \right) &= (0, 0, 0, 2), \\ \left( \frac{\partial a_6}{\partial z_3}, \frac{\partial b_6}{\partial z_3}, \frac{\partial c_6}{\partial z_3}, \frac{\partial d_6}{\partial z_3} \right) &= (0, 0, 0, 1), \\ \left( \frac{\partial a_7}{\partial z_3}, \frac{\partial b_7}{\partial z_3}, \frac{\partial c_7}{\partial z_3}, \frac{\partial d_7}{\partial z_3} \right) &= (0, 0, 1, 0). \end{aligned}$$

Эти равенства позволяют привести поля  $e_6$  и  $e_7$  к виду

$$\begin{aligned} e_6 &= (a_6(z_1), b_6(z_1), c_6(z_1), z_3 + d_6(z_1)), \\ e_7 &= (a_7(z_1), b_7(z_1), z_3 + c_7(z_1), 2z_4 + d_7(z_1)). \end{aligned}$$

Дальнейшее построение голоморфных реализаций алгебры  $\mathfrak{r}_1$  требует рассмотрения ряда случаев.

**Случай 1.** Пусть  $a_2(z_1) \neq 0$ . Тогда поле  $e_2$  в наборе (3.1) можно привести к виду

$$e_2 = (1, z_2, 0, 0).$$

Из равенств  $[e_2, e_6] = 0$ ,  $[e_2, e_7] = 0$  получаем соотношения:

$$\begin{aligned} (a'_6(z_1), b'_6(z_1) - b_6(z_1), c'_6(z_1), d'_6(z_1)) &= (0, 0, 0, 0), \\ (a'_7(z_1), b'_7(z_1) - b_7(z_1), c'_7(z_1), d'_7(z_1)) &= (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} a_6(z_1) &= A_6, & b_6(z_1) &= B_6 e^{z_1}, & c_6(z_1) &= C_6, & d_6(z_1) &= D_6, \\ a_7(z_1) &= A_7, & b_7(z_1) &= B_7 e^{z_1}, & c_7(z_1) &= C_7, & d_7(z_1) &= D_7. \end{aligned}$$

Из равенства  $[e_6, e_7] = e_5 + e_6$  получаем

$$(0, e^{z_1}(A_6 B_7 - A_7 B_6), C_6, z_3 - C_7 + 2D_6) = (A_6, B_6 e^{z_1}, 1 + C_6, z_3 + D_6).$$

Сравнивая третьи компоненты слева и справа, приходим к равенству

$$C_6 = 1 + C_6.$$

Таким образом, случай 1 приводит к противоречию.

**Случай 2.** Пусть  $a_2(z_1) \equiv 0$ ,  $a_6(z_1) \neq 0$ . Тогда в наборе (3.1) с учетом упрощенных полей  $e_6$ ,  $e_7$  можно получить

$$\begin{aligned} e_2 &= (0, z_2 + b_2(z_1), c_2(z_1), d_2(z_1)), \\ e_6 &= (1, 0, 0, z_3). \end{aligned}$$

Из равенства  $[e_2, e_6] = 0$  получаем

$$(0, -b'_2(z_1), -c'_2(z_1), -d'_2(z_1) + c_2(z_1)) = (0, 0, 0, 0).$$

Отсюда

$$b_2(z_1) = B_2, \quad c_2(z_1) = C_2, \quad d_2(z_1) = C_2 z_1 + D_2.$$

Соотношение  $[e_2, e_7] = 0$  приводит к следующему равенству:

$$(0, -b_7(z_1), C_2, -a_7(z_1)C_2 + 2C_2 z_1 + 2D_2) = (0, 0, 0, 0).$$

Получаем, что  $C_2 = 0$ ,  $D_2 = 0$ .



Таким образом, поля  $e_1$  и  $e_2$  примут вид

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_2 &= (0, z_2 + B_2, 0, 0), \end{aligned}$$

который невозможен для невырожденной гиперповерхности.

**Случай 3.** Пусть  $a_2(z_1) \equiv 0$ ,  $a_6(z_1) \equiv 0$ ,  $a_7(z_1) \not\equiv 0$ . Тогда поле  $e_7$  можно привести к виду

$$e_7 = (1, 0, z_3, 2z_4).$$

Соотношение  $[e_2, e_3] = e_3$  позволяет сразу сделать вывод о вырожденности гиперповерхностей в данном случае. Действительно, первая компонента коммутатора  $[e_2, e_3]$  равна нулю, в то время как первая компонента поля  $e_3$  равна  $a_3(z_1)$ . Таким образом,  $a_3(z_1) \equiv 0$ , и все первые компоненты полей  $e_1, \dots, e_6$  будут нулевыми, что дает вырожденность согласно лемме 2.3.

Таким образом, можно сделать вывод, что алгебра  $\mathfrak{t}_1$  не имеет невырожденных голоморфных реализаций.

**3.2. Голоморфные реализации алгебры  $\mathfrak{t}_2$ .** Здесь имеем коммутационные соотношения  $[e_4, e_6] = 0$ ,  $[e_4, e_7] = (h + 1)e_4$ ,  $[e_5, e_6] = e_4$ ,  $[e_5, e_7] = e_5$ . Из них по аналогии с предыдущим случаем получим упрощенный вид полей  $e_6$  и  $e_7$ :

$$\begin{aligned} e_6 &= (a_6(z_1), b_6(z_1), c_6(z_1), z_3 + d_6(z_1)), \\ e_7 &= (a_7(z_1), b_7(z_1), z_3 + c_7(z_1), (h + 1)z_4 + d_7(z_1)). \end{aligned}$$

**Случай 1.** Пусть  $a_2(z_1) \not\equiv 0$ . Тогда поле  $e_2$  можно привести к виду

$$e_2 = (1, z_2, 0, 0).$$

Из равенств  $[e_2, e_6] = 0$ ,  $[e_2, e_7] = 0$  получаем

$$\begin{aligned} (a'_6(z_1), b'_6(z_1) - b_6(z_1), c'_6(z_1), d'_6(z_1)) &= (0, 0, 0, 0), \\ (a'_7(z_1), b'_7(z_1) - b_7(z_1), c'_7(z_1), d'_7(z_1)) &= (0, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} a_6(z_1) &= A_6, b_6(z_1) = B_6 e^{z_1}, c_6(z_1) = C_6, d_6(z_1) = D_6, \\ a_7(z_1) &= A_7, b_7(z_1) = B_7 e^{z_1}, c_7(z_1) = C_7, d_7(z_1) = D_7. \end{aligned}$$

Соотношение  $[e_2, e_3] = e_3$  приводит к равенству

$$(a'_3(z_1) + 2z_2, z_2^2 - b_3(z_1) + b'_3(z_1), c'_3(z_1), d'_3(z_1)) = (2z_2 + a_3(z_1), z_2^2 + b_3(z_1), c_3(z_1), d_3(z_1)),$$

из которого получаем упрощенный вид поля  $e_3$ :

$$a_3(z_1) = A_3 e^{z_1}, \quad b_3(z_1) = B_3 e^{2z_1}, \quad c_3(z_1) = C_3 e^{z_1}, \quad d_3(z_1) = D_3 e^{z_1}.$$

Рассмотрение оставшихся соотношений  $[e_3, e_6] = 0$ ,  $[e_3, e_7] = 0$ ,  $[e_6, e_7] = h e_6$  позволяет получить следующую систему уравнений, связывающую коэффициенты полей и параметр алгебры  $h$ :

$$\begin{aligned} A_3 A_6 + 2B_6 &= 0, & A_3 B_6 - 2A_6 B_3 &= 0, & A_6 C_3 &= 0, & A_6 D_3 - C_3 &= 0, \\ A_3 A_7 + 2B_7 &= 0, & A_3 B_7 - 2A_7 B_3 &= 0, & C_3(A_7 - 1) &= 0, \\ D_3(A_7 - h - 1) &= 0, & h A_6 &= 0, & A_6 B_7 - A_7 B_6 - B_6 h &= 0, \\ C_6(h - 1) &= 0, & D_6 - C_7 &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Эта система имеет восемь решений, при этом только три из них (выписанных ниже) дают базисы алгебры голоморфных векторных полей, соответствующие невырожденным гиперповерхностям.

а) Решение системы (3.2):

$$\begin{aligned} B_3 &= -\frac{1}{4}A_3^2, & B_6 &= -\frac{1}{2}A_3A_6, & B_7 &= -\frac{1}{2}A_3A_7, \\ C_3 &= 0, & C_6 &= 0, & C_7 &= D_6, & D_3 &= 0, & h &= 0. \end{aligned}$$

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_2 &= (1, z_2, 0, 0), \\ e_3 &= \left( 2z_2 + A_3e^{z_1}, z_2^2 - \frac{1}{4}A_3^2e^{2z_1}, 0, 0 \right), \\ e_4 &= (0, 0, 0, 1), \\ e_5 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_6 &= \left( A_6, -\frac{1}{2}A_3A_6e^{z_1}, 0, z_3 + D_6 \right), \\ e_7 &= \left( A_7, -\frac{1}{2}A_3A_7e^{z_1}, z_3 + D_6, z_4 + D_7 \right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

б) Решение системы (3.2):

$$A_6 = 0, \quad A_7 = 2, \quad B_3 = -\frac{1}{4}A_3^2, \quad B_6 = 0, \quad B_7 = -A_3, \quad C_3 = 0, \quad C_7 = D_6, \quad h = 1.$$

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_2 &= (1, z_2, 0, 0), \\ e_3 &= \left( 2z_2 + A_3e^{z_1}, z_2^2 - \frac{1}{4}A_3^2e^{2z_1}, 0, D_3e^{z_1} \right), \\ e_4 &= (0, 0, 0, 1), \\ e_5 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_6 &= (0, 0, C_6, z_3 + D_6), \\ e_7 &= (2, -A_3e^{z_1}, z_3 + D_6, 2z_4 + D_7). \end{aligned} \tag{3.4}$$

в) Решение системы (3.2):

$$A_6 = 0, \quad B_3 = -\frac{1}{4}A_3^2, \quad B_6 = 0, \quad B_7 = -\frac{1}{2}A_3A_7, \quad C_3 = 0, \quad C_7 = D_6, \quad D_3 = 0, \quad h = 1.$$

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_2 &= (1, z_2, 0, 0), \\ e_3 &= \left( 2z_2 + A_3e^{z_1}, z_2^2 - \frac{1}{4}A_3^2e^{2z_1}, 0, 0 \right), \\ e_4 &= (0, 0, 0, 1), \\ e_5 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_6 &= (0, 0, C_6, z_3 + D_6), \\ e_7 &= \left( A_7, -\frac{1}{2}A_3A_7e^{z_1}, z_3 + D_6, 2z_4 + D_7 \right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

**Случай 2.** Пусть  $a_2(z_1) \equiv 0$ ,  $a_6(z_1) \not\equiv 0$ . Тогда поле  $e_6$  можно привести к виду

$$e_6 = (1, 0, 0, z_3).$$

Из соотношений  $[e_2, e_6] = 0$ ,  $[e_3, e_6] = 0$ ,  $[e_6, e_7] = he_6$  получим равенства

$$\begin{aligned} (0, -b'_2(z_1), -c'_2(z_1), -d'_2(z_1) + c_2(z_1)) &= (0, 0, 0, 0), \\ (-a'_3(z_1), -b'_3(z_1), -c'_3(z_1), -d'_3(z_1) + c_3(z_1)) &= (0, 0, 0, 0), \\ (a'_7(z_1), b'_7(z_1), c'_7(z_1), z_3h - c_7(z_1) + d'_7(z_1)) &= (h, 0, 0, hz_3). \end{aligned}$$

Решение этих уравнений позволяет упростить вид полей  $e_2$ ,  $e_3$  и  $e_7$ :

$$\begin{aligned} e_2 &= (0, z_2 + B_2, C_2, C_2z_1 + D_2), \\ e_3 &= (A_3, z_2^2 + 2B_2z_2 + B_3, 2C_2z_2 + C_3, 2(C_2z_1 + D_2)z_2 + C_3z_1 + D_3), \\ e_7 &= (hz_1 + A_7, B_7, z_3 + C_7, (h+1)z_4 + C_7z_1 + D_7). \end{aligned}$$

Коммутационное соотношение  $[e_2, e_7] = 0$  для преобразованных полей даст равенство

$$(0, -B_7, C_2, C_2z_1 + D_2h + D_2 - A_7C_2) = (0, 0, 0, 0),$$

из которого следует, что

$$B_7 = 0, \quad C_2 = 0, \quad D_2(h+1) = 0.$$

При  $C_2 = 0$  поле  $e_2$  примет вид  $e_2 = (0, z_2 + B_2, 0, D_2)$  и, если допустить, что  $D_2 = 0$ , мы получим поле вида  $e_2 = (0, z_2 + B_2, 0, 0)$ , которое при наличии  $e_1 = (0, 1, 0, 0)$  даст вырожденность гиперповерхности. Поэтому случай  $D_2 = 0$  невозможен и, следовательно, должно выполняться  $h = -1$ .

Запишем теперь в развернутом виде соотношение  $[e_3, e_7] = 0$ :

$$(-A_3, 0, C_3, A_3C_7 - C_3A_7 + C_3z_1) = (0, 0, 0, 0).$$

Получаем, что  $A_3 = 0$  и  $C_3 = 0$ . Таким образом, все первые и третьи компоненты в полях  $e_1, \dots, e_4$  равны нулю, что, согласно лемме 2.4, означает вырожденность гиперповерхности.

**Случай 3.** Пусть  $a_2(z_1) \equiv 0$ ,  $a_6(z_1) \equiv 0$  и при этом  $a_7(z_1) \not\equiv 0$ . Тогда поле  $e_7$  можно привести к виду

$$e_7 = (1, 0, z_3, (h+1)z_4).$$

Первая компонента в коммутаторе  $[e_2, e_3]$ , очевидно, будет равна нулю, при этом должно выполняться равенство  $[e_2, e_3] = e_3$ . Так как первая компонента поля  $e_3$  равна  $a_3(z_1)$ , то необходимо, чтобы  $a_3(z_1) = 0$ . Однако в таком случае все первые компоненты полей  $e_1, \dots, e_6$  будут нулевыми, что означает вырожденность гиперповерхности по лемме 2.3.

**3.3. Голоморфные реализации алгебры  $\mathfrak{t}_3$ .** Здесь из коммутационных соотношений  $[e_4, e_6] = 0$ ,  $[e_4, e_7] = 2pe_4$ ,  $[e_5, e_6] = e_4$  получаем

$$\begin{aligned} e_6 &= (a_6(z_1), b_6(z_1), c_6(z_1), z_3 + d_6(z_1)), \\ e_7 &= (a_7(z_1, z_3), b_7(z_1, z_3), c_7(z_1, z_3), 2pz_4 + d_7(z_1, z_3)). \end{aligned}$$

Запишем теперь в развернутом виде соотношение  $[e_5, e_7] = pe_5 - e_6$ :

$$\left( \frac{\partial a_7}{\partial z_3}, \frac{\partial b_7}{\partial z_3}, \frac{\partial c_7}{\partial z_3}, \frac{\partial d_7}{\partial z_3} \right) = (-a_6(z_1), -b_6(z_1), p - c_6(z_1), -z_3 - d_6(z_1)).$$

Получаем отсюда следующий вид поля  $e_7$ :

$$\begin{aligned} e_7 &= \left( -a_6(z_1)z_3 + a_7(z_1), -b_6(z_1)z_3 + b_7(z_1), \right. \\ &\quad \left. pz_3 - c_6(z_1)z_3 + c_7(z_1), 2pz_4 - \frac{1}{2}z_3^2 - d_6(z_1)z_3 + d_7(z_1) \right). \end{aligned}$$

**Случай 1.** Пусть  $a_2(z_1) \neq 0$ , тогда поле  $e_2$  можно привести к виду

$$e_2 = (1, z_2, 0, 0).$$

Из соотношения  $[e_2, e_6] = 0$  получаем равенство

$$(a'_6(z_1), b'_6(z_1) - b_6(z_1), c'_6(z_1), d'_6(z_1)) = (0, 0, 0, 0),$$

которое позволяет упростить вид полей  $e_6$  и  $e_7$ :

$$\begin{aligned} e_6 &= (A_6, B_6 e^{z_1}, C_6, z_3 + D_6), \\ e_7 &= \left( -A_6 z_3 + a_7(z_1), -B_6 e^{z_1} z_3 + b_7(z_1), \right. \\ &\quad \left. pz_3 - C_6 z_3 + c_7(z_1), 2pz_4 - \frac{1}{2}z_3^2 - D_6 z_3 + d_7(z_1) \right). \end{aligned}$$

В результате соотношение  $[e_2, e_7] = 0$  даст равенство

$$(a'_7(z_1), b'_7(z_1) - b_7(z_1), c'_7(z_1), d'_7(z_1)) = (0, 0, 0, 0),$$

из которого найдем коэффициенты поля  $e_7$ . В итоге получим

$$\begin{aligned} e_7 &= \left( -A_6 z_3 + A_7, -B_6 e^{z_1} z_3 + B_7 e^{z_1}, \right. \\ &\quad \left. pz_3 - C_6 z_3 + C_7, 2pz_4 - \frac{1}{2}z_3^2 - D_6 z_3 + D_7 \right). \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь соотношением  $[e_2, e_3] = e_3$ :

$$(a'_3(z_1) + 2z_2, z_2^2 - b_3(z_1) + b'_3(z_1), c'_3(z_1), d'_3(z_1)) = (2z_2 + a_3(z_1), z_2^2 + b_3(z_1), c_3(z_1), d_3(z_1)).$$

Отсюда

$$e_3 = (2z_2 + A_3 e^{z_1}, z_2^2 + B_3 e^{2z_1}, C_3 e^{z_1}, D_3 e^{z_1}).$$

Оставшиеся равенства  $[e_3, e_6] = 0$ ,  $[e_3, e_7] = 0$ ,  $[e_6, e_7] = e_5 + pe_6$  приводят к системе уравнений, аналогичной системе (3.2). Часть решений этой системы, как и в случае (3.2), отвечает алгебрам, имеющим только вырожденные орбиты. Приведем здесь лишь решения, которые порождают более интересные для нас алгебры, допускающие невырожденные по Леви орбиты.

а)  $A_6 = 0$ ,  $B_3 = -\frac{1}{4}A_3^2$ ,  $B_6 = 0$ ,  $B_7 = -\frac{1}{2}A_3A_7$ ,  $C_3 = 0$ ,  $C_6 = \pm i$ ,  $C_7 = D_6(p \mp i)$ ,  $D_3 = 0$ .

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_2 &= (1, z_2, 0, 0), \\ e_3 &= \left( 2z_2 + A_3 e^{z_1}, z_2^2 - \frac{1}{4}A_3^2 e^{2z_1}, 0, 0 \right), \\ e_4 &= (0, 0, 0, 1), \\ e_5 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_6 &= (0, 0, \pm i, z_3 + D_6), \\ e_7 &= \left( A_7, -\frac{1}{2}A_3A_7 e^{z_1}, (z_3 + D_6)(p \mp i), 2pz_4 - \frac{1}{2}z_3^2 - D_6 z_3 + D_7 \right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

б)  $A_6 = 0$ ,  $A_7 = 2p$ ,  $B_3 = -\frac{1}{4}A_3^2$ ,  $B_6 = 0$ ,  $B_7 = -pA_3$ ,  $C_3 = 0$ ,  $C_6 = \pm i$ ,  $C_7 = D_6(p \mp i)$ .

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned}
e_1 &= (0, 1, 0, 0), \\
e_2 &= (1, z_2, 0, 0), \\
e_3 &= \left( 2z_2 + A_3 e^{z_1}, z_2^2 - \frac{1}{4} A_3^2 e^{2z_1}, 0, D_3 e^{z_1} \right), \\
e_4 &= (0, 0, 0, 1), \\
e_5 &= (0, 0, 1, 0), \\
e_6 &= (0, 0, \pm i, z_3 + D_6), \\
e_7 &= \left( 2p, -p A_3 e^{z_1}, (z_3 + D_6)(p \mp i), 2pz_4 - \frac{1}{2} z_3^2 - D_6 z_3 + D_7 \right).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

**Случай 2.** Пусть  $a_2(z_1) \equiv 0$ ,  $a_6(z_1) \neq 0$ . Тогда поле  $e_6$  можно привести к виду

$$e_6 = (1, 0, 0, z_3).$$

Запишем в развернутом виде соотношения  $[e_2, e_6] = 0$ ,  $[e_6, e_7] = e_5 + p e_6$ :

$$\begin{aligned}
(0, -b'_2(z_1), -c'_2(z_1), -d'_2(z_1) + c_2(z_1)) &= (0, 0, 0, 0), \\
(a'_7(z_1), b'_7(z_1), c'_7(z_1), d'_7(z_1) - c_7(z_1) + pz_3) &= (p, 0, 1, pz_3).
\end{aligned}$$

Решив выписанные уравнения, получим упрощенный вид полей  $e_2$  и  $e_7$ :

$$\begin{aligned}
e_2 &= (0, z_2 + B_2, C_2, C_2 z_1 + D_2), \\
e_7 &= \left( pz_1 - z_3 + A_7, B_7, pz_3 + z_1 + C_7, 2pz_4 - \frac{1}{2} z_3^2 + \frac{1}{2} z_1^2 + C_7 z_1 + D_7 \right).
\end{aligned}$$

Используя теперь соотношение  $[e_2, e_7] = 0$ , получим

$$(-C_2, -B_7, pC_2, pC_2 z_1 - A_7 C_2 + 2pD_2) = (0, 0, 0, 0),$$

откуда

$$C_2 = 0, \quad B_7 = 0, \quad pD_2 = 0.$$

Если допустить, что  $D_2 = 0$ , то получим  $e_2 = (0, z_2 + B_2, 0, 0)$ , что при наличии поля  $e_1 = (0, 1, 0, 0)$  возможно только в том случае, когда гиперповерхность вырождена. Значит можно считать, что  $D_2 \neq 0$  и, следовательно,  $p = 0$ .

Из соотношения  $[e_3, e_6] = 0$  получаем равенство

$$(-a'_3(z_1), -b'_3(z_1), -c'_3(z_1), -d'_3(z_1) + c_3(z_1)) = (0, 0, 0, 0),$$

которое позволяет получить измененный вид поля  $e_3$ :

$$e_3 = (A_3, 2B_2 z_2 + z_2^2 + B_3, C_3, C_3 z_1 + 2D_2 z_2 + D_3).$$

Используя равенство  $[e_3, e_7] = 0$ , записываемое в развернутом виде как

$$(-C_3, 0, A_3, A_3 C_7 + A_3 z_1 - C_3 A_7) = (0, 0, 0, 0),$$

получим, что  $A_3 = C_3 = 0$ , то есть

$$e_3 = (0, z_2^2 + 2B_2 z_2 + B_3, 0, 2D_2 z_2 + D_3).$$

Таким образом, в полях  $e_1, \dots, e_4$  все первые и третьи компоненты оказываются равными нулю, что означает вырожденность гиперповерхности по лемме 2.4.

**Случай 3.** Пусть  $a_2(z_1) \equiv 0$ ,  $a_6(z_1) \equiv 0$  и при этом  $a_7(z_1) \neq 0$ . Тогда поле  $e_7$  можно привести к виду

$$e_7 = (1, -b_6(z_1)z_3, pz_3 - c_6(z_1)z_3, 2pz_4 - \frac{1}{2} z_3^2 - d_6(z_1)z_3).$$

Для доказательства того, что в этом случае возможны только вырожденные гиперповерхности, заметим, что первая компонента в коммутаторе  $[e_2, e_3]$  равна нулю, при этом первая компонента в поле  $e_3$  равна  $a_3(z_1)$ . Так как должно выполняться равенство  $[e_2, e_3] = e_3$ , то необходимо, чтобы  $a_3(z_1) = 0$ , однако в этом случае все первые компоненты полей  $e_1, \dots, e_6$  оказываются нулевыми, что и дает вырожденность по лемме 2.3.

**3.4. Голоморфные реализации алгебры  $\mathfrak{t}_4$ .** Разворачивая коммутационные соотношения  $[e_4, e_6] = e_4$ ,  $[e_4, e_7] = -e_5$ ,  $[e_5, e_6] = e_5$ ,  $[e_5, e_7] = e_4$ , получим упрощенный вид полей  $e_6$  и  $e_7$ :

$$\begin{aligned} e_6 &= (a_6(z_1), b_6(z_1), z_3 + c_6(z_1), z_4 + d_6(z_1)), \\ e_7 &= (a_7(z_1), b_7(z_1), -z_4 + c_7(z_1), z_3 + d_7(z_1)). \end{aligned}$$

**Случай 1.** Пусть  $a_2(z_1) \neq 0$ . Тогда, используя голоморфные преобразования переменных, поле  $e_2$  можно привести к виду

$$e_2 = (1, z_2, 0, 0).$$

Соотношения  $[e_2, e_6] = 0$ ,  $[e_2, e_7] = 0$  приводят к равенствам

$$\begin{aligned} (a'_6(z_1), b'_6(z_1) - b_6(z_1), c'_6(z_1), d'_6(z_1)) &= (0, 0, 0, 0), \\ (a'_7(z_1), b'_7(z_1) - b_7(z_1), c'_7(z_1), d'_7(z_1)) &= (0, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

из которых получаем

$$\begin{aligned} e_6 &= (A_6, B_6 e^{z_1}, z_3 + C_6, z_4 + D_6), \\ e_7 &= (A_7, B_7 e^{z_1}, -z_4 + C_7, z_3 + D_7). \end{aligned}$$

Еще одно соотношение  $[e_2, e_3] = e_3$ , приводящее к равенству

$$(a'_3(z_1) + 2z_2, b'_3(z_1) - b_3(z_1) + z_2^2, c'_3(z_1), d'_3(z_1)) = (2z_2 + a_3(z_1), z_2^2 + b_3(z_1), c_3(z_1), d_3(z_1)),$$

дает следующий вид поля  $e_3$ :

$$(2z_2 + A_3 e^{z_1}, z_2^2 + B_3 e^{2z_1}, C_3 e^{z_1}, D_3 e^{z_1}).$$

Оставшиеся соотношения  $[e_3, e_6] = 0$ ,  $[e_3, e_7] = 0$ ,  $[e_6, e_7] = 0$  и здесь приводят к достаточно объемной системе уравнений относительно коэффициентов полей  $e_3, e_6, e_7$ . Эта система имеет четыре решения, из которых три дают базисы алгебр голоморфных векторных полей, соответствующих невырожденным гиперповерхностям.

а)  $B_3 = -\frac{1}{4}A_3^2$ ,  $B_6 = -\frac{1}{2}A_3A_6$ ,  $B_7 = -\frac{1}{2}A_3A_7$ ,  $C_3 = 0$ ,  $C_6 = D_7$ ,  $C_7 = -D_6$ ,  $D_3 = 0$ .

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_2 &= (1, z_2, 0, 0), \\ e_3 &= \left( 2z_2 + A_3 e^{z_1}, z_2^2 - \frac{1}{4}A_3^2 e^{2z_1}, 0, 0 \right), \\ e_4 &= (0, 0, 0, 1), \\ e_5 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_6 &= \left( A_6, -\frac{1}{2}A_3A_6 e^{z_1}, z_3 + D_7, z_4 + D_6 \right), \\ e_7 &= \left( A_7, -\frac{1}{2}A_3A_7 e^{z_1}, -(z_4 + D_6), z_3 + D_7 \right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

б) Еще два решения, объединенных за счет знака « $\pm$ »:

$$\begin{aligned} A_6 &= 1, & A_7 &= \pm i, & B_3 &= -\frac{1}{4}A_3^2, & B_6 &= -\frac{1}{2}A_3, \\ B_7 &= \mp \frac{i}{2}A_3, & C_3 &= \pm iD_3, & C_6 &= D_7, & C_7 &= -D_6. \end{aligned}$$

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_2 &= (1, z_2, 0, 0), \\ e_3 &= \left( 2z_2 + A_3e^{z_1}, z_2^2 - \frac{1}{4}A_3^2e^{2z_1}, \pm iD_3e^{z_1}, D_3e^{z_1} \right), \\ e_4 &= (0, 0, 0, 1), \\ e_5 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_6 &= \left( 1, -\frac{1}{2}A_3e^{z_1}, z_3 + D_7, z_4 + D_6 \right), \\ e_7 &= \left( \pm i, \mp \frac{i}{2}A_3e^{z_1}, -(z_4 + D_6), z_3 + D_7 \right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

**Случай 2.** Пусть  $a_2(z_1) \equiv 0$ ,  $a_6(z_1) \neq 0$ . Тогда поле  $e_6$  можно привести к виду

$$e_6 = (1, 0, z_3, z_4).$$

Используя соотношения  $[e_2, e_6] = 0$ ,  $[e_6, e_7] = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} (0, -b'_2(z_1), -c'_2(z_1) + c_2(z_1), -d'_2(z_1) + d_2(z_1)) &= (0, 0, 0, 0), \\ (a'_7(z_1), b'_7(z_1), c'_7(z_1) - c_7(z_1), d'_7(z_1) - d_7(z_1)) &= (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} e_2 &= (0, z_2 + B_2, C_2e^{z_1}, D_2e^{z_1}), \\ e_7 &= (A_7, B_7, -z_4 + C_7e^{z_1}, z_3 + D_7e^{z_1}). \end{aligned}$$

Коммутационное соотношение  $[e_3, e_6] = 0$  приводит к равенству

$$(-a'_3(z_1), -b'_3(z_1), -c'_3(z_1) + c_3(z_1), -d'_3(z_1) + d_3(z_1)) = (0, 0, 0, 0),$$

из которого получаем следующий вид поля  $e_3$ :

$$e_3 = (A_3, z_2^2 + 2B_2z_2 + B_3, (2C_2z_2 + C_3)e^{z_1}, (2D_2z_2 + DC_3)e^{z_1}).$$

Рассмотрение итоговых равенств  $[e_2, e_3] = e_3$ ,  $[e_2, e_7] = 0$ ,  $[e_3, e_7] = 0$  приводит к трем допустимым наборам коэффициентов полей  $e_3$ ,  $e_6$ ,  $e_7$ . Из них только два (объединенных с использованием знака « $\pm$ ») дают базисы алгебр голоморфных векторных полей, допускающих невырожденные интегральные гиперповерхности.

Значения коэффициентов:

$$A_3 = 0, \quad A_7 = \pm i, \quad B_3 = B_2^2, \quad B_7 = 0, \quad C_2 = \pm iD_2, \quad C_3 = \pm 2iB_2D_2, \quad D_3 = 2B_2D_2.$$

Базисы алгебр голоморфных векторных полей:

$$\begin{aligned}
e_1 &= (0, 1, 0, 0), \\
e_2 &= (0, z_2 + B_2, \pm i D_2 e^{z_1}, D_2 e^{z_1}), \\
e_3 &= (0, (z_2 + B_2)^2, (\pm 2i D_2 z_2 \pm 2i B_2 D_2) e^{z_1}, 2D_2 e^{z_1} (z_2 + B_2)), \\
e_4 &= (0, 0, 0, 1), \\
e_5 &= (0, 0, 1, 0), \\
e_6 &= (1, 0, z_3, z_4), \\
e_7 &= (\pm i, 0, C_7 e^{z_1} - z_4, z_3 + D_7 e^{z_1}).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

**Случай 3.** Пусть  $a_2(z_1) \equiv 0$ ,  $a_6(z_1) \equiv 0$  и при этом  $a_7(z_1) \neq 0$ . Тогда поле  $e_7$  можно привести к виду

$$e_7 = (1, 0, -z_4, z_3).$$

Из соотношения  $[e_2, e_6] = 0$  получим

$$(0, -b_6(z_1), c_2(z_1), d_2(z_1)) = (0, 0, 0, 0),$$

откуда следует, что

$$e_2 = (0, z_2 + b_2(z_1), 0, 0).$$

Поле  $e_2$  такого вида при наличии поля  $e_1 = (0, 1, 0, 0)$  возможно только для вырожденных по Леви гиперповерхностей.

#### 4. ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Следующим этапом после нахождения голоморфных реализаций алгебр Ли является получение их орбит. Для того чтобы вещественная гиперповерхность  $M$ , задаваемая уравнением  $\Phi = 0$ , была орбитой голоморфной реализации алгебры  $\mathfrak{g}$ , необходимо, чтобы для каждого базисного поля  $e_k$  этой алгебры выполнялось тождество

$$\operatorname{Re} (e_k(\Phi)|_M) \equiv 0. \tag{4.1}$$

Таким образом, нахождение орбит голоморфных реализаций алгебр  $\mathfrak{t}_2$ ,  $\mathfrak{t}_3$ ,  $\mathfrak{t}_4$  сводится к решению систем уравнений в частных производных. Например, для одной из реализаций (3.6) требуется решить систему следующего вида:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} \right) &= 0, \quad \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z_3} \right) = 0, \quad \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z_4} \right) = 0, \\
\operatorname{Re} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} \right) &= 0, \\
\operatorname{Re} \left( i \frac{\partial \Phi}{\partial z_3} + (z_3 + D_6) \frac{\partial \Phi}{\partial z_4} \right) &= 0, \\
\operatorname{Re} \left( (2z_2 + A_3 e^{z_1}) \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + \left( z_2^2 - \frac{A_3^2}{4} e^{2z_1} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} \right) &= 0, \\
\operatorname{Re} \left( A_7 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + \left( -\frac{A_3 A_7}{2} e^{z_1} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} + (z_3 + D_6) (p - i) \frac{\partial \Phi}{\partial z_3} \right. \\
&\quad \left. + \left( 2pz_4 - D_6 z_3 - \frac{1}{2} z_3^2 - D_6 z_3 + D_7 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z_4} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Отметим, что часто бывает удобно перед составлением системы уравнений сделать некоторые элементарные замены в коэффициентах полей. Например, в данном случае можно заменить  $e^{z_1}$  на  $z_1^*$ , что позволит работать с полностью полиномиальными компонентами полей (при этом в первых компонентах полей появится дополнительный множитель  $z_1^*$ ,



а остальные компоненты не изменятся). Уточним, что здесь и далее после каждого шага многоступенчатой замены переменных знак «\*» опускается.

Первые три простейших равенства системы (4.2) при переходе к вещественным координатам позволяют сделать вывод о том, что определяющая функция гиперповерхности не зависит от переменных  $x_2, x_3, x_4$ . Решая (стандартными методами) остальные уравнения, получим после несложных итоговых голоморфных преобразований уравнение гиперповерхности

$$y_4 = A \ln y_1 - \ln(y_2 - y_3^2). \quad (4.3)$$

Составляя и решая системы, подобные (4.2), можно получить все уравнения из теоремы 1.1. При этом могут возникать и вырожденные по Леви гиперповерхности, которые мы не рассматриваем.

Обсудим теперь кратко вопросы исследования некоторых свойств голоморфно однородных гиперповерхностей на примере уравнения (4.3). Мы применяем здесь метод нормальных форм Мозера [17].

Используя разложение в ряд Тейлора, представим уравнение невырожденной по Леви вещественно-аналитической гиперповерхности  $M \subset \mathbb{C}^4$  в виде

$$y_4 = H(z, \bar{z}) + \sum_{k,l \geq 2, m \geq 0} N_{klm}(z, \bar{z}) x_4^m, \quad (4.4)$$

где  $H(z, \bar{z})$  – форма Леви гиперповерхности, содержащая эрмитовы слагаемые (линейные по переменным  $z$  и  $\bar{z}$ );  $N_{klm}(z, \bar{z}, x_4)$  – однородные многочлены суммарных степеней  $k$  и  $l$  по переменным  $z$  и  $\bar{z}$  соответственно ( $z = (z_1, z_2, z_3)$ ). При этом многочлены  $N_{22k}, N_{32k}, N_{33k}$  удовлетворяют дополнительным ограничениям, называемым tr-условиями (см. [3], [4]).

Изучение младших слагаемых нормального уравнения (4.4) во многих случаях позволяет подтверждать или опровергать гипотезы о голоморфной эквивалентности различных гиперповерхностей. Например, известно, что однородная вещественно-аналитическая гиперповерхность в пространстве  $\mathbb{C}^n$  является сферической тогда и только тогда, когда в ее нормальном уравнении Мозера слагаемое  $N_{220}(z, \bar{z})$  тождественно равно нулю.

Покажем вычислительную процедуру проверки на сферичность на примере уравнения (4.3).

Сместимся в точку  $(i, i, 0, 0)$  и выпишем разложение правой части уравнения

$$y_4 = A \ln(y_1 + 1) - \ln(y_2 + 1 - y_3^2)$$

в ряд Тейлора до четвертой степени включительно (слагаемые нулевой и первой степеней, согласно процедуре нормализации, можно удалить):

$$y_4 = -\frac{1}{2}Ay_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + y_3^2 + \frac{1}{3}Ay_1^3 - \frac{1}{3}y_2^3 - y_2y_3^2 - \frac{1}{4}Ay_1^4 + \frac{1}{4}y_2^4 + y_2^2y_3^2 + \frac{1}{2}y_3^4 + \dots \quad (4.5)$$

Перейдем к комплексным координатам и выпишем форму Леви данного уравнения:

$$H(z, \bar{z}) = -\frac{1}{4}A|z_1|^2 + \frac{1}{4}|z_2|^2 + \frac{1}{2}|z_3|^2.$$

Как видно, при  $A < 0$  данная форма будет положительно определенной (то есть гиперповерхность будет строго псевдовыпуклой), а при  $A > 0$  получим знаконеопределенную (индефинитную) невырожденную форму. При  $A = 0$  получаем вырожденную гиперповерхность. Рассмотрим далее случай  $A < 0$ .

Замена переменных

$$z_1 = \frac{2}{\sqrt{-A}}z_1^*, \quad z_2 = 2z_2^*, \quad z_3 = \sqrt{2}z_3^*$$

приводит форму Леви к каноническому виду:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2.$$

После перехода к комплексным координатам и замены переменных разложение (4.5) примет вид (сгруппируем слагаемые по суммарным степеням входящих в данное выражение полиномов):

$$y_4 = \sum_{k+l \geq 2} F_{kl}(z, \bar{z}) = (F_{20} + F_{11} + F_{02}) + (F_{30} + F_{21} + F_{12} + F_{03}) + \dots, \quad (4.6)$$

где  $k, l$  – степени соответствующих слагаемых по переменным  $z$  и  $\bar{z}$  соответственно.

Согласно процедуре нормализации [17], с помощью голоморфной замены переменных можно удалить из уравнения (4.6) все слагаемые вида  $F_{k0}, F_{k1}$  (и, по симметрии,  $F_{0k}, F_{1k}$ ). После выполнения указанных замен уравнение (4.6) примет вид

$$y_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + H_{22} + H_{32} + H_{23} + \dots \quad (4.7)$$

Для пересчета слагаемых при переходе от уравнения (4.6) к (4.7) можно воспользоваться обобщением формул, приведенных в работе [22]. В частности,

$$H_{22} = F_{22} - \langle f_2, f_2 \rangle, \quad (4.8)$$

где  $F_{22}$  – слагаемое из уравнения (4.6),  $f_2$  – вектор-функция, компонентами которой являются однородные полиномы второй степени относительно переменной  $z$ , вычисляемая из формулы  $F_{21} = \langle f_2, z \rangle$ . Здесь  $\langle f, g \rangle = f^T H \bar{g}$ , где  $f$  и  $g$  – вектор-функции, а  $H$  – матрица (эрмитовой) формы Леви.

Для рассматриваемого уравнения

$$F_{22} = -\frac{3}{2A} z_1^2 \bar{z}_1^2 + \frac{3}{2} z_2^2 \bar{z}_2^2 + \frac{1}{2} z_2^2 z_3^2 + 2z_2 \bar{z}_2 z_3 \bar{z}_3 + \frac{1}{2} z_3^2 \bar{z}_2^2 + \frac{3}{4} z_3^2 \bar{z}_3^2,$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{-A}}{A} z_1^2 \\ \frac{i}{2}(2z_2^2 + z_3^2) \\ iz_2 z_3 \end{pmatrix},$$

$$\langle f_2, f_2 \rangle = -\frac{1}{A} z_1^2 \bar{z}_1^2 + z_2^2 \bar{z}_2^2 + \frac{1}{2} z_3^2 \bar{z}_2^2 + \frac{1}{2} z_2^2 \bar{z}_3^2 + \frac{1}{4} z_3^2 \bar{z}_3^2 + z_2 z_3 \bar{z}_2 \bar{z}_3.$$

По формуле (4.8) получаем

$$H_{22} = -\frac{1}{2A} |z_1|^4 + \frac{1}{2} |z_2|^4 + \frac{1}{2} |z_3|^4 + |z_2|^2 |z_3|^2. \quad (4.9)$$

Полином  $H_{22}$  принадлежит 36-мерному пространству полиномов  $\mathcal{F}_{22}$ , которое раскладывается в прямую сумму 27-мерного пространства  $\mathcal{N}_{22}$  и 9-мерного пространства  $\mathcal{R}_{22}$ , элементы которого делятся на форму  $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2$ . При этом проекция  $H_{22}$  в пространство  $\mathcal{N}_{22}$  – это в точности многочлен  $N_{220}$  из уравнения (4.4).

Указанное разложение для полинома (4.9) можно записать следующим образом:

$$H_{22} = N_{220} + R_{220} = \frac{1}{40A} (A-1) (3(|z_1|^4 - 4|z_1|^2 |z_2|^2 + |z_2|^4) + 3(|z_1|^4 - 4|z_1|^2 |z_3|^2 + |z_3|^4) - (|z_2|^4 - 4|z_2|^2 |z_3|^2 + |z_3|^4)) + \frac{1}{20A} (-(3A+7)|z_1|^2 + (9A+1)|z_2|^2 + (9A+1)|z_3|^2) (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2).$$

Таким образом,

$$N_{220} = \frac{1}{40A} (A-1) (3(|z_1|^4 - 4|z_1|^2 |z_2|^2 + |z_2|^4) + 3(|z_1|^4 - 4|z_1|^2 |z_3|^2 + |z_3|^4) - (|z_2|^4 - 4|z_2|^2 |z_3|^2 + |z_3|^4)).$$

При  $A < 0$  полином  $N_{220}$  не равен нулю, следовательно, гиперповерхность, описываемая уравнением (4.3), локально голоморфно не эквивалентна сфере.

**Замечание 4.1.** Отметим, что при  $A = 1$  обсуждаемое уравнение (4.3) можно переписать в виде

$$y_1 = y_3^2 e^{y_4} + y_2 e^{y_4}.$$

Это уравнение описывает (см. [23], формула 7 основной теоремы) индефинитную сферическую трубку.

Таким же образом могут быть исследованы все уравнения, выписанные в теореме 1.1. Однако такое рассмотрение является достаточно объемным и выходит за рамки настоящей статьи.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность А.В. Лободе за полезные обсуждения и ценные замечания при работе над текстом статьи, а также Д.В. Козориз за консультации по использованию метода нормальных форм в пространстве  $\mathbb{C}^4$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Cartan. *Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes* // Ann. Math. Pura Appl. **11**, 17–90 (1933).
2. G. Fels, W. Kaup. *Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5* // Acta Math. **201**, 1–82 (2008).
3. А.В. Лобода. *Однородные вещественные гиперповерхности в  $\mathbb{C}^3$  с двумерными группами изотропии* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. **235**, 114–142 (2001).
4. А.В. Лобода. *Однородные строго псевдовыпуклые гиперповерхности в  $\mathbb{C}^3$  с двумерными группами изотропии* // Мат. сб. **192**:12, 3–24 (2001).
5. B. Doubrov, A. Medvedev, D. The. *Homogeneous Levi non-degenerate hypersurfaces in  $\mathbb{C}^3$*  // Mathematische Zeitschrift. **297**, 669–709 (2021).
6. I. Kossovskiy, A. Loboda. *Classification of homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces in  $\mathbb{C}^3$*  // Preprint: arXiv:1906.11345 (2019).
7. А.В. Лобода. *Голоморфно-однородные вещественные гиперповерхности в  $\mathbb{C}^3$*  // Тр. ММО. **81**:2, 61–136 (2020).
8. B. Doubrov, J. Merker, D. The. *The Classification of simply-transitive Levi non-degenerate hypersurfaces in  $\mathbb{C}^3$*  // IMRN, rnab147 (2021).
9. M.G. Eastwood, V.V. Ezhov. *Homogeneous Hypersurfaces with Isotropy in Affine Four-Space* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. **235**, 57–70 (2001).
10. M.G. Eastwood, V.V. Ezhov. *A classification of non-degenerate homogeneous equiaffine hypersurfaces in four complex dimensions* // Asian J. Math. **5**:4, 721–740 (2001).
11. F. Dillen, L. Vrancken. *3-dimensional affine hypersurfaces in  $\mathbb{R}^4$  with parallel cubic form* // Nagoya Math. J. **124**, 41–53 (1991).
12. A.V. Loboda, R.S. Акопян, V.V. Krutskikh. *On the orbits of nilpotent 7-dimensional lie algebras in 4-dimensional complex space* // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. **13**:3, 360–372 (2020).
13. Р.С. Акопян, А.В. Атанов. *Невырожденные орбиты в  $\mathbb{C}^4$  разложимых 7-мерных алгебр Ли* // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа. Понтрягинские чтения – XXXI». 30–32 (2020).
14. Г.М. Мубаракзянов. *О разрешимых алгебрах Ли* // Изв. вузов. Матем. **1**, 114–123 (1963).
15. А.В. Атанов, И.Г. Коссовский, А.В. Лобода. *Об орбитах действий 5-мерных неразрешимых алгебр Ли в трехмерном комплексном пространстве* // ДАН. **487**:6, 7–10 (2019).
16. V.K. Beloshapka, I.G. Kossovskiy. *Homogeneous hypersurfaces in  $\mathbb{C}^3$ , associated with a model CR-cubic* // J. Geom. Anal. **20**:3, 538–564 (2010).
17. S.S. Chern, J.K. Moser. *Real hypersurfaces in complex manifolds* // Acta Math. **133**, 219–271 (1974).

18. А.В. Атанов, А.В. Лобода. *Об орбитах одной неразрешимой 5-мерной алгебры Ли* // Математическая физика и компьютерное моделирование. **22**:2, 5–20 (2019).
19. А.В. Атанов, А.В. Лобода. *Разложимые пятимерные алгебры Ли в задаче о голоморфной однородности в  $\mathbb{C}^3$*  // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНТИ РАН. **173**, 86–115 (2019).
20. L. Šnobl, P. Winternitz. *Classification and Identification of Lie Algebras*. AMS, Providence, R.I. (2014).
21. Г.М. Мубаракзянов. *Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка* // Изв. вузов. Матем. **3**, 99–106 (1963).
22. А.В. Лобода. *Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности 3-мерного комплексного пространства* // Вестник Воронежского гос. университета. Сер. : Физика. Математика. **2**, 71–91 (2009).
23. А.В. Исаев, М.А. Мищенко. *Классификация сферических трубчатых гиперповерхностей, имеющих в сигнатуре формы Леви один минус* // Изв. АН СССР. Сер. матем. **52**:6, 1123–1153 (1988).

Артем Викторович Атанов,  
Воронежский государственный университет,  
Университетская пл., 1,  
394018, г. Воронеж, Россия  
E-mail: atanov.cs@gmail.com