ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 1 (2022). С. 84-94.

УДК 517.946

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КАМАССЫ-ХОЛМА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

Г.У. УРАЗБОЕВ, И.И. БАЛТАЕВА

Аннотация. Работа посвящена исследованию уравнения Камассы-Холма с самосогласованным источником интегрального типа.

Источник рассматриваемого уравнения соответствует непрерывному спектру спектральной задачи связанной с уравнением Камассы-Холма. Как известно, интегрируемые системы допускают операторное представление Лакса $L_t = [L, A]$, где L – линейный оператор, а A – некоторый кососимметрический оператор, действующий в гильбертовом пространстве. Обобщенное представление Лакса для рассматриваемого уравнения имеет вид $L_t = [L, A] + C$, где C – сумма дифференциальных операторов с коэффициентами, зависящими от решений спектральной задачи для оператора L. Построение самосогласованного источника для рассматриваемой задачи основано на том, что именно квадраты собственных функций спектральной задачи существенны при решении интегрируемых уравнений методом обратной задачи рассеяния. Кроме этого, для рассматриваемого типа уравнений эволюция собственных функций в обобщенном представлении Лакса имеет особенность.

Применение метода обратной задачи рассеяния основано на спектральной задаче, связанной с классическим уравнением Камассы-Холма. Выведена эволюция данных рассеяния этой спектральной задачи с потенциалом, являющимся решением уравнения Камассы-Холма с самосогласованным источником. При выводе эволюции спектральных данных, соответствующих непрерывному спектру, существенно используется формула Сохоцкого-Племеля. Результаты работы, относящиеся к эволюции данных рассеяния, связанных с дискретным спектром, основаны на методах предыдущих работ авторов. Полученные результаты сформулированы в качестве основной теоремы. Результаты теоремы позволяют применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи Коши для рассматриваемого уравнения. Методы данной работы могут быть легко обобщены на высшие аналоги уравнения Камассы-Холма.

Ключевые слова: уравнение Камассы-Холма, решения Йоста, самосогласованный источник, эволюция данных рассеяния, метод обратной задачи рассеяния.

Mathematics Subject Classification: 39A23, 35Q51, 34K13, 34K29

1. Введение

В 1967 году американские ученые К.С. Гарднер, Дж.М. Грин, М. Крускал и Р. Миура [1] показали, что решение уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ) может быть получено для всех «быстроубывающих» начальных условий, т.е. условий, которые определенным образом обращаются в нуль при стремлении координаты к бесконечности. Этот метод получил название метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), поскольку в нем существенно

G.U. Urazboev, I.I. Baltaeva, Integration of Camassa-Holm equation with a self-consistent source of integral type.

Поступила 22 января 2021 г.

используется решение задачи о восстановлении потенциала оператора Штурма-Лиувилля на всей оси, по данным рассеяния (обратная задача теории рассеяния). Далее в 1968 году Лакс [2] существенно обобщил их идеи. А именно он придал условию совместности линейных задач удобную операторную форму, представив условие совместности в виде условия коммутативности линейных дифференциальных операторов: $L_t = [L, A]$ где L – линейный оператор а A – некоторый кососимметрический оператор, действующий в гильбертовом пространстве.

В работах В.К. Мельникова [3], [4] было представлено некоторое обобщение уравнения Лакса в виде

$$L_t = [L, A] + C,$$

где C – сумма дифференциальных операторов с коэффициентами зависящими от решений спектральной задачи для оператора L. Уравнения, допускающие такое представление, стали называться уравнениями с «самосогласованным источником». Отметим, также, что в работе Ж. Леона и А. Латифи [5] приведена конкретная физическая задача, которая сводится к решению уравнения КдФ с источником. Нелинейные эволюционные уравнения с самосогласованным источником встречаются также в задачах гидродинамики, физики плазмы, в физике твердого тела и др.

В 1993 году Р. Камасса и Д.Д. Холм [6], исходя из физических соображений, вывели уравнение

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x + 2\omega u_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx},$$

которое в безразмерных переменных пространства-времени (x, t) описывает однонаправленное распространение волн в мелкой воде над плоским дном, $u(x, t)$ представляет горизонтальную компоненту скорости жидкости, описывает свободную поверхность, а параметр $\omega > 0$ связан с критической скоростью. Это уравнение в современной литературе называется уравнением Камассы-Холма. В последнее время уравнение Камассы-Холма вызывает значительный интерес, как пример интегрируемой системы, имеющей более общие по сравнению с КдФ волновые решения. Анализ, проведенный в [7], а также [8] и др., показывает существование гладких уединенных волн для всех $\omega > 0$.

В работах А. Константина, В. Герджикова, Р. Иванова [9] показана применимость метода обратной задачи рассеяния для получения решений уравнения Камассы-Холма.

В работе китайских ученых Е.Х. Хуанг, Ю.К. Йао, Ю.Б. Зенг [10] уравнение Камассы-Холма с простейшим самосогласованным источником было интегрировано с помощью прямого метода – метода преобразования Дарбу.

В данной работе рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (m'_x g f + 2(m+\omega)(g\, f)'_x) dk, \\ g_{xx}(x,k,t) = \left(\frac{1}{4} + \lambda(m+\omega)\right) g(x,k,t), \\ f_{xx}(x,k,t) = \left(\frac{1}{4} + \lambda(m+\omega)\right) f(x,k,t), \qquad x, k \in \mathbb{R}, \qquad t \geq 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$m(x,t) = u(x,t) - u_{xx}(x,t), \qquad \omega = const > 0,$$

$$m(x,t) + \omega > 0, \qquad \lambda(k) = -\frac{1}{\omega}\left(k^2 + \frac{1}{4}\right),$$

а $u = u(x,t)$ – действительная функция, которая обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\left(|u(x,t)| + \sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\right|\right)dx < \infty, \qquad t \geq 0. \tag{1.2}$$

Задача (1.1)–(1.2) рассматривается при начальном условии

$$u(x,t)|_{t=0} = u_0(x),$$

где начальная функция $u_0(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $u_0(x) - u''_0(x) + \omega > 0$, $x \in \mathbb{R}$,

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\left(|u_0(x)| + |u''_0(x)|\right)dx < \infty$,

3) уравнение $\psi_{xx} = \left(\frac{1}{4} + \lambda(m(x)+\omega)\right)\psi$ при $m(x) = u_0(x) - u_0''(x)$ имеет ровно N простых собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \lambda_3(0), \ldots, \lambda_N(0)$, лежащих на интервале $\left(-\frac{1}{4\omega}; 0\right)$. В рассматриваемой задаче функции $g = g(x,k,t)$, $f = f(x,k,t)$ непрерывные функции по параметру k, имеют производные первого порядка $g_k' = \frac{\partial g(x,k,t)}{\partial k}$, $f_k' = \frac{\partial f(x,k,t)}{\partial k}$, удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|g(x,k,t)|^2 + |f(x,k,t)|^2)dk < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\left|\frac{\partial g(x,k,t)}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f(x,k,t)}{\partial x}\right|^2\right)dk < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\left|\frac{\partial g(x,k,t)}{\partial k}\right|^2 + \left|\frac{\partial f(x,k,t)}{\partial k}\right|^2\right)dk < \infty, \qquad t \geq 0, \qquad x \in (-\infty;\infty),$$

и при $x \to \infty$ имеют следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} f &\sim \alpha(k)e^{ikx} + \beta(k)e^{-ikx}, \\ g &\sim \gamma(k)e^{ikx} + \delta(x)e^{-ikx}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где комплекснозначные функции $\alpha = \alpha(k,t)$, $\beta = \beta(k,t)$, $\delta = \delta(k,t)$, $\gamma = \gamma(k,t)$ непрерывные по k и t, которые имеют производные первого порядка и удовлетворяют следующим условиям при $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} (|\alpha(k,t)|^2 + |\beta(k,t)|^2 + |\delta(k,t)|^2 + |\gamma(k,t)|^2)dk < \infty, \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \left(\left|\frac{\partial\alpha(k,t)}{\partial k}\right|^2 + \left|\frac{\partial\beta(k,t)}{\partial k}\right|^2 + \left|\frac{\partial\delta(k,t)}{\partial k}\right|^2 + \left|\frac{\partial\gamma(k,t)}{\partial k}\right|^2\right)dk < \infty. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Положим

$$Q(k,t) = \beta(k,t)\gamma(k,t) + \alpha(-k,t)\delta(-k,t).$$

В данной работе мы укажем путь построения решения задачи Коши (1.1)–(1.4).

2. Задача рассеяния

Рассмотрим уравнение

$$\psi_{xx}(x,k) = \left(\frac{1}{4} + \lambda(m(x)+\omega)\right)\psi(x,k), \tag{2.1}$$

где $m(x) = u(x) - u_{xx}(x)$, $\omega = const > 0$, $m(x)+\omega > 0$, с функцией $u(x)$, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\left(|u(x)| + |u''(x)|\right)dx < \infty. \tag{2.2}$$

При выполнении условия (2.2) существует решение Йоста для уравнения (2.1) со следующими асимптотиками:

$$\begin{aligned} &\psi_1 = e^{-ikx} + o(1), \qquad \psi_2 = e^{ikx} + o(1), \qquad x \to +\infty, \\ &\varphi_1 = e^{-ikx} + o(1), \qquad \varphi_2 = e^{ikx} + o(1), \qquad x \to -\infty. \end{aligned}$$

При действительных k пары (φ_1, φ_2) и (ψ_1, ψ_2) являются парами линейно независимых решений для уравнения (2.1), поэтому

$$\varphi_1(x,k) = a(k)\psi_1(x,k) + b(k)\psi_2(x,k).$$

Функция $a(k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость и имеет там конечное число простых нулей $k = ik_n$, $k_n > 0$, причем $\lambda_n = -\frac{1}{\omega}(-k_n^2 + \frac{1}{4})$, $n = 1, 2, \ldots, N$, является собственным значением уравнения (2.1), так что $\varphi_1(x, ik_n) = b_n\psi_2(x, ik_n)$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

Набор $\{r(k) = \frac{a(k)}{b(k)}, k \in R, k_n, b_n,\ n = 1, 2, \ldots, N\}$ называется данными рассеяния для уравнения (2.1). Прямая задача рассеяния состоит в определении данных рассеяния по функции $u(x)$. Обратная задача рассеяния состоит в восстановлении по данным рассеяния функции $m(x)$ следовательно $u(x)$ уравнения (2.1). В работе [9] показано, что функция $u(x)$ восстанавливается по данным рассеяния.

3. Вывод эволюции спектральных характеристик соответствующих непрерывному спектру

Пусть $u = u(x,t)$ решения задачи (1.1)–(1.4). В этом параграфе для удобства, там где это не существенно, зависимость от t будем опускать. Рассмотрим систему уравнений:

$$\psi_{xx} = \left(\frac{1}{4} + \lambda(m(x)+\omega)\right)\psi, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (m(x)+\omega)\psi(x,k)g(x,\eta), \qquad \eta \in R, \tag{3.2}$$

где $\lambda = -\frac{1}{\omega}\left(k^2 + \frac{1}{4}\right)$, а $g(x,\eta)$ и $f(x,\eta)$ решения уравнения

$$y''_{xx} = \left(\frac{1}{4} + \xi(m+\omega)\right)y, \quad \xi = -\frac{1}{\omega}\left(\eta^2 + \frac{1}{4}\right),$$

и построим следующие функции

$$\vartheta = {\psi'}_t - \left(\frac{1}{2\lambda} - u\right){\psi'}_x - \frac{u_x}{2}\psi - \gamma_1\psi - \lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\eta)F(x,k,\eta)d\eta, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} G(x,k,\eta) =& g(x,\eta)\frac{\partial\psi(x,k)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,\eta)}{\partial x}\psi(x,k) - (\lambda-\xi)\,F(x,k,\eta) \\ =& g(x,\eta)\frac{\partial\psi(x,k)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,\eta)}{\partial x}\psi(x,k) - \frac{1}{\omega}\left(\eta^2-k^2\right)F(x,k,\eta). \end{aligned}$$

При произвольных k имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \vartheta_{xx} - \left(\dfrac{1}{4} + \lambda(m(x)+\omega)\right)\vartheta = -\lambda\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}(m(x)+\omega)f(x,\eta)G(x,k,\eta)d\eta, \\ \dfrac{\partial G(x,k,\eta)}{\partial x} \equiv 0, \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad \eta\in(-\infty;\infty). \end{cases} \tag{3.4}$$

На основании (3.2) и с помощью решений Йоста уравнения (3.1) введем обозначения:

$$\begin{aligned} F_- &= \int\limits_{-\infty}^{x}(m(z)+\omega)\varphi_1(z,k)g(z,\eta)dz, \\ F_+ &= -\int\limits_{x}^{\infty}(m(z)+\omega)\psi_2(z,k)g(z,\eta)dz. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Для любого $\eta\in(-\infty,\infty)$ функции F_- и F_+ аналитичны $\operatorname{Im}k>0$, следовательно, из уравнений (1.1), (3.1) и асимптотик решений Йоста получим равенства:

$$\begin{aligned} F_-(x,k,\eta) &= \frac{\omega}{\eta^2-k^2}\left(g(x,\eta)\frac{\partial\varphi_1(x,k)}{\partial} - \frac{\partial g(x,\eta)}{\partial}\varphi_1(x,k)\right), \\ F_+(x,k,\eta) &= \frac{\omega}{\eta^2-k^2}\left(g(x,\eta)\frac{\partial\psi_2(x,k)}{\partial} - \frac{\partial g(x,\eta)}{\partial}\psi_2(x,k)\right), \end{aligned} \tag{3.6}$$

причем правая часть в разложении (3.6) справедлива при значениях $k^2\neq\eta^2$. Подобно равенству (3.5) для равенства (3.3) при $\operatorname{Im}k>0$ положим

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \varphi_{1t} - \left(\frac{1}{2\lambda}-u\right)\varphi_{1x} - \frac{u_x}{2}\varphi_1 - \gamma_1\varphi_1 - \lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\eta)F_-(x,k,\eta)d\eta, \\ \vartheta_2 &= \psi_{2t} - \left(\frac{1}{2\lambda}-u\right)\psi_{2x} - \frac{u_x}{2}\psi_2 - \gamma_1\psi_2 - \lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\eta)F_+(x,k,\eta)d\eta, \end{aligned} \tag{3.7}$$

эти функции также аналитичны в верхней полуплоскости по параметру k, кроме этого, при действительных ненулевых значениях k функции $F_-(x,k,\eta)$, $F_+(x,k,\eta)$ имеют особенности при $\eta=k,\ \eta=-k$.

Подставляя разложения (3.6) в равенства (3.7), вычислим при $\operatorname{Im} k \to +0$ функции ϑ_1 и ϑ_2. Тогда при $\operatorname{Im} k = 0$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}\vartheta_1 =&\varphi_{1t} - \left(\frac{1}{2\lambda} - u\right)\varphi_{1x} - \frac{u_x}{2}\varphi_1 - \gamma_1\varphi_1 - \lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\eta)F_-(x,k,\eta)d\eta \\ &+ \Phi_1^-(k)f(x,k) + \Phi_2^-(k)f(x,-k),\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2 =&\psi_{2t} - \left(\frac{1}{2\lambda} - u\right)\psi_{2x} - \frac{u_x}{2}\psi_2 - \gamma_1\psi_2 - \lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\eta)F_+(x,k,\eta)dk \\ &+ \Phi_1^+(k)f(x,k) + \Phi_2^+(k)f(x,-k),\end{aligned} \tag{3.9}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, а функции $\Phi_1^-, \Phi_2^-, \Phi_1^+$ и Φ_2^+ определяются из следующих равенств:

$$\begin{aligned}\Phi_1^-(k) &= -\frac{\pi i\omega\lambda}{2k}\left(g(x,k)\frac{\partial\varphi_1(x,k)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,k)}{\partial x}\varphi_1(x,k)\right),\\ \Phi_2^-(k) &= -\frac{\pi i\omega\lambda}{2k}\left(g(x,-k)\frac{\partial\varphi_1(x,k)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,-k)}{\partial x}\varphi_1(x,k)\right),\\ \Phi_1^+(k) &= -\frac{\pi i\omega\lambda}{2k}\left(g(x,k)\frac{\partial\psi_2(x,k)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,k)}{\partial x}\psi_2(x,k)\right),\\ \Phi_2^+(k) &= -\frac{\pi i\omega\lambda}{2k}\left(g(x,-k)\frac{\partial\psi_2(x,k)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,-k)}{\partial x}\psi_2(x,k)\right).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Так как функции $g(x,k)$, $g(x,-k)$, $\varphi_1(x,k)$, $\psi_2(x,k)$ являются решениями уравнения (3.1) функции $\Phi_1^-, \Phi_2^-, \Phi_1^+$ и Φ_2^+ не зависят от x.

Полагая

$$\begin{aligned}G_-(x,k,\eta) &= g(x,\eta)\frac{\partial\varphi_1(x,k)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,\eta)}{\partial x}\varphi_1(x,k) - \frac{1}{\omega}\left(\eta^2 - k^2\right)F_-(x,k,\eta),\\ G_+(x,k,\eta) &= g(x,\eta)\frac{\partial\psi_2(x,k)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,\eta)}{\partial x}\psi_2(x,k) - \frac{1}{\omega}\left(\eta^2 - k^2\right)F_+(x,k,\eta),\end{aligned} \tag{3.11}$$

согласно разложению (3.6) в верхней замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} k \geq 0$ имеем

$$G_- = G_+ \equiv 0, \qquad \eta \in (-\infty,\infty). \tag{3.12}$$

Из равенств (3.4), (3.11), (3.12) и определению функций $\vartheta_1(x,k)$, $\vartheta_2(x,k)$ при любом $k \in (-\infty,\infty)$, получим:

$$\vartheta_{1xx} - \left(\frac{1}{4} + \lambda\left(m+\omega\right)\right)\vartheta_1 = \vartheta_{2xx} - \left(\frac{1}{4} + \lambda\left(m+\omega\right)\right)\vartheta_2 = 0. \tag{3.13}$$

Равенства (3.12)-(3.13) являются упрощенным видом системы (3.3). Для любого $k \in (-\infty,\infty)$, согласно асимптотическим разложениям (1.3), имеем

$$\begin{aligned}f(x,k) &= \alpha(k)\psi_2(x,k) + \beta(k)\psi_1(x,k),\\ g(x,k) &= \gamma(k)\psi_2(x,k) + \delta(k)\psi_1(x,k),\end{aligned} \tag{3.14}$$

с другой стороны имеют место разложения:

$$\begin{aligned}f(x,k) &= p(k)\varphi_2(x,k) + q(k)\varphi_1(x,k),\\ g(x,k) &= l(k)\varphi_2(x,k) + s(k)\varphi_1(x,k),\end{aligned} \tag{3.15}$$

где

$$p(k)=\alpha(k)a(k)-\beta(k)b(k), \qquad q(k)=-\alpha(k)b(-k)-\beta(k)a(-k),$$
$$l(k)=\gamma(k)a(k)-\delta(k)b(k), \qquad s(k)=-\gamma(k)b(-k)+\delta(k)a(-k).$$

Следовательно, из равенств (3.10) и разложений (3.14), (3.15) получим $\Phi_1^-(k)=-\pi\omega\lambda l(k)$. Аналогично находим

$$\begin{aligned} \Phi_1^-(k)&=-\pi\omega\lambda\, l(k), &\qquad \Phi_1^+(k)&=\pi\omega\lambda\,\delta(k),\\ \Phi_2^-(k)&=-\pi\omega\lambda\, s(-k), &\qquad \Phi_2^+(k)&=\pi\omega\lambda\,\gamma(-k). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Согласно (3.13), при действительных $k\neq 0$ функция $\vartheta_1(,k)$ выражается как линейная комбинация решений $\varphi_1(,k)$, $\varphi_2(,k)$, а для $\vartheta_2(,k)$ через решения $\psi_1(,k)$, $\psi_2(,k)$. Т.е. из (3.8), (3.9) и асимптотических разложений Йоста положим

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x,k)&=K^-(k)\varphi_1(x,k)+K_0^-(k)\varphi_2(x,k),\\ \vartheta_2(x,k)&=\left(-\frac{ik}{\lambda}+K^+(k)\right)\psi_2(x,k)+K_0^+(k)\psi_1(x,k),\\ \vartheta_2(x,-k)&=K^+(-k)\psi_1(x,k)+K_0^+(-k)\psi_2(x,k), \end{aligned} \tag{3.17}$$

где функции $K^-(k)$, $K^+(k)$, $K_0^-(k)$, $K_0^-(k)$ не зависят от x.

Теперь будем определять эти функции, для этого введя обозначения

$$C^-(k)=-i\omega\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{p(\eta)s(\eta)}{\eta+k}-\frac{q(\eta)l(\eta)}{\eta-k}\right)d\eta,$$
$$C(k)=\lambda\omega\pi\left(p(k)l(k)+q(-k)s(-k)\right),$$

получим

$$\Phi_-(x,k)\sim C^-(k)e^{-ikx}+C(k)e^{ikx} \qquad \text{при} \qquad x\to-\infty. \tag{3.18}$$

Аналогичным образом получим

$$\Phi_+(x,k)\sim C_0(k)e^{-ikx}+C^+(k)e^{ikx} \qquad \text{при} \qquad x\to\infty,$$

где

$$C^+(k)=-i\omega\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\alpha(\eta)\delta(\eta)}{\eta-k}-\frac{\beta(\eta)\delta(\eta)}{\eta+k}\right)d\eta,$$
$$C_0(k)=-\lambda\omega\pi\left(\alpha(-k)\gamma(-k)+\beta(k)\delta(k)\right). \tag{3.19}$$

Далее, введем функцию

$$\vartheta(x,k)=\vartheta_1(x,k)-a(k)\vartheta_2(x,-k)-b(k)\vartheta_2(x,k). \tag{3.20}$$

В силу равенств (3.8) и (3.9), используя разложения (3.14), (3.15), из равенства (3.16), согласно обозначению (3.6) и разложению фундаментальной системы решений мы получим следующее равенство

$$\vartheta(x,k)=\left(\frac{\partial a(k)}{\partial t}-2\lambda\omega\pi a(k)Q(k)\right)\psi_1(x,k)+\left(\frac{\partial b(k)}{\partial t}+2a(k)C_0(-k)\right)\psi_2(x,k). \tag{3.21}$$

С другой стороны, переходя к пределу $x\to-\infty$ в (3.8), используя равенства (3.15), (3.16), асимптотические разложения решений Йоста уравнения (3.1), (3.18):

$$K^-(k)=C^-(k)-\pi\omega\lambda\left(l(k)q(k)+s(-k)p(-k)\right), \tag{3.22}$$

$$K_0^-(k)=C(k)-\pi\omega\lambda\,\left(l(k)q(k)+s(-k)p(-k)\right), \tag{3.23}$$

получим
$$\vartheta_1(x,k) = K^-(k)\varphi_1(x,k) + K_0^-(k)\varphi_2(x,k).$$
Переходя к пределу $x \to +\infty$ и вводя обозначение $\gamma_1 = \frac{ik}{2\lambda}$,
$$K^+(k) = C^+(k) + \pi\omega\lambda\left(\delta(k)\alpha(k) + \gamma(-k)\beta(-k)\right),$$
$$K_0^+(k) = C_0(k) + \pi\omega\lambda\left(\delta(k)\beta(k) + \alpha(-k)\gamma(-k)\right),$$
получим
$$\vartheta_2(x,k) = K_0^+(k)\psi_1(x,k) + \left(\frac{ik}{\lambda} + K^+(k)\right)\psi_2(x,k).$$
Аналогичным образом, сделав замену $k = -k$ в (3.11), рассмотрим функцию $\vartheta_2(x,-k)$. Далее из обозначений (3.22), (3.23) и при $\gamma_1 = \frac{ik}{2\lambda}$ получим
$$\vartheta_2(x,-k) = K_0^-(-k)\psi_2(x,k) + K^+(-k)\psi_1(x,k).$$
Используя (3.18) и (3.19) соответственно, имеем
$$K_0^+(k) = K_0^-(k) \equiv 0.$$
Следовательно, равенства (3.17) можно переписать в виде
$$\begin{aligned}
&\vartheta_1(x,k) = K^-(k)\varphi_1(x,k),\\
&\vartheta_2(x,k) = \left(-\frac{ik}{\lambda} + K^+(k)\right)\psi_2(x,k),\\
&\vartheta_2(x,-k) = K^+(-k)\psi_1(x,k).
\end{aligned} \tag{3.24}$$
Аналогично, используя разложения фундаментальной системы решений уравнения (3.1) из (3.20) заключаем, что
$$\vartheta(x,k) = a(k)\left(K^-(k) - K^+(k)\right)\psi_1(x,k) + b(k)\left(\frac{ik}{\lambda} + K^-(k) - K^+(k)\right)\psi_2(x,k). \tag{3.25}$$
Объединяя равенства (3.21) и (3.25) путем сравнения коэффициентов при $\psi_1(x,k)$ и $\psi_2(x,k)$, получаем эволюционные уравнения для $a(k)$ и $b(k)$:
$$\frac{\partial a(k)}{\partial t} - 2\lambda\pi\omega a(k)Q(k) = a(k)\left(K^-(k) - K^+(-k)\right), \tag{3.26}$$
$$\frac{\partial b(k)}{\partial t} - 2a(k)C_0(-k) = b(k)\left(\frac{ik}{\lambda} + K^-(k) - K^+(k)\right). \tag{3.27}$$
Далее, умножая равенство (3.27) на $a(k)$ и вычитая из него (3.26), умноженное на $b(k)$, получим
$$\begin{aligned}
\frac{\partial r(k,t)}{\partial t} = &\left(-\frac{4ik\omega}{4k^2+1} + (4k^2+1)\frac{\pi}{2}Q(k,t) - K^+(k,t) + K^+(-k,t)\right)r(k,t)\\
&- 2C_0(-k,t), \qquad \operatorname{Im} k = 0.
\end{aligned} \tag{3.28}$$
Можно показать, что функции $K^+(k)$, $K^-(k)$ по k аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} k > 0$. Очевидно, что при $\operatorname{Im} k > 0$ справедливы равенства
$$K^+(k) = -i\omega\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\alpha(\eta)\delta(\eta)}{\eta - k} - \frac{\beta(\eta)\delta(\eta)}{\eta + k}\right)d\eta,$$
$$K^-(k) = -i\omega\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{p(\eta)s(\eta)}{\eta + k} - \frac{q(\eta)l(\eta)}{\eta - k}\right)d\eta.$$

4. Эволюция спектральных характеристик, соответствующих дискретному спектру

Введя обозначение

$$G_n(x) = \vartheta_1(x, ik_n) - b_n\vartheta_2(x, ik_n), \qquad n = 1, 2, \ldots, N, \tag{4.1}$$

также как и в случае непрерывного спектра получим:

$$\vartheta_1(x, ik_n) = \varphi_{1nt} - \left(\frac{1}{2\lambda_n} - u\right)\varphi_{1nx} - \frac{u_x}{2}\varphi_{1n} - \gamma_1\varphi_{1n} - \lambda_n\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\eta)F_-(x, ik_n, \eta)d\eta, \tag{4.2}$$

$$\vartheta_2(x, ik_n) = \psi_{2nt} - \left(\frac{1}{2\lambda_n} - u\right)\psi_{2nx} - \frac{u_x}{2}\psi_{2n} - \gamma_1\psi_{2n} - \lambda_n\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\eta)F_+(x, ik_n, \eta)dk, \tag{4.3}$$

где

$$\lambda_n = \lambda(ik_n) = -\frac{1}{\omega}\left(-k_n^2 + \frac{1}{4}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots, N,$$

$$F_-(x, ik_n, \eta) = \int\limits_{-\infty}^{x} (m(z) + \omega)\varphi_{1n}(z)g(z,\eta)dz, \tag{4.4}$$

$$F_+(x, ik_n, \eta) = -\int\limits_{x}^{\infty} (m(z) + \omega)\psi_{2n}(z)g(z,\eta)dz. \tag{4.5}$$

Подставляя в (4.1) разложения (4.2), (4.3), согласно равенству $\varphi_{1n}(x) = b_n\psi_{2n}(x)$, с учетом формул (4.4) и (4.5) и используя лемму 3 из работы [11], получим

$$G_n(x) = \frac{\partial b_n}{\partial t}\psi_{2n} - \lambda_n b_n\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\eta)\frac{1}{\lambda_n - \xi}W\left\{g, \psi_{2n}\right\}\Big|_{-\infty}^{\infty} d\eta = \frac{\partial b_n}{\partial t}\psi_{2n}. \tag{4.6}$$

С другой стороны, согласно равенствам (3.24) при $k = ik_n$, равенства (4.1) можно переписать в виде:

$$G_n(x) = K^-(ik_n)\varphi_{1n} - b_n\left(\frac{k_n}{\lambda_n} + K^+(ik_n)\right)\psi_{2n} = b_n\left(K^-(ik_n) - \frac{k_n}{\lambda_n} - K^+(ik_n)\right)\psi_{2n}, \tag{4.7}$$

где $\lambda_n = \lambda(ik_n)$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Следовательно, сравнивая равенства (4.6) и (4.7), получим эволюционные уравнения для b_n:

$$\frac{db_n(t)}{dt} = \left(\frac{4\omega k_n}{1 - 4k_n^2} + K^-(ik_n, t) - K^+(ik_n, t)\right) b_n(t), \qquad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.8}$$

Вывод эволюций для k_n. Согласно лемме 3 работы [11], легко получим

$$\frac{dk_n(t)}{dt} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.9}$$

Таким образом, равенства (3.28), (4.8) и (4.9) можно объединить в следующую теорему:

Теорема 4.1. *Если функции $u(x,t)$, $g(x,t,k)$, $f(x,t,k)$ являются решениями задачи (1.1)–(1.4), то данные рассеяния для уравнения (2.1) с функцией $u(x,t)$ меняются по t*

следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{dr(k,t)}{dt} &= \left(-\frac{4ik\omega}{4k^2+1} + (4k^2+1)\frac{\pi}{2}Q(k,t) - K^+(k,t) + K^+(-k,t)\right) r(k,t) \\
&\quad - 2C_0(-k,t), \quad \operatorname{Im} k = 0, \\
\frac{db_n(t)}{dt} &= \left(\frac{4\omega k_n}{1-4k_n^2} + K^-(ik_n,t) - K^+(ik_n,t)\right) b_n(t), \\
\frac{dk_n(t)}{dt} &= 0, \qquad n = 1,2,\dots,N,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K^+(k,t) =& i\left(k^2+\frac{1}{4}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\alpha(\eta,t)\delta(\eta,t)}{\eta-k} - \frac{\beta(\eta,t)\gamma(\eta,t)}{\eta+k}\right)d\eta \\
& - \left(k^2+\frac{1}{4}\right)\pi\left(\alpha(k,t)\delta(k,t) + \gamma(-k,t)\beta(-k,t)\right), \\
K^-(k,t) =& i\left(k^2+\frac{1}{4}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{p(\eta,t)s(\eta,t)}{\eta+k} - \frac{q(\eta,t)l(\eta,t)}{\eta-k}\right)d\eta \\
& + \left(k^2+\frac{1}{4}\right)\pi\left(l(k,t)q(k,t) + s(-k,t)p(-k,t)\right), \\
p(k,t) =& \alpha(k,t)a(k,t) - \beta(k,t)b(k,t), \qquad q(k,t) = -\alpha(k,t)b(-k,t) + \beta(k,t)a(-k,t), \\
l(k,t) =& \gamma(k,t)a(k,t) - \delta(k,t)b(k,t), \qquad s(k,t) = -\gamma(k,t)b(-k,t) + \delta(k,t)a(-k,t), \\
Q(k,t) =& \beta(k,t)\gamma(k,t) + \alpha(-k,t)\delta(-k,t), \\
C_0(-k,t) =& \left(k^2+\frac{1}{4}\right)\pi\left(\alpha(k,t)\gamma(k,t) + \beta(-k,t)\delta(-k,t)\right).
\end{aligned}$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1.1)–(1.4).

Отметим также работу [11], где рассмотрена задача интегрирования уравнения Камассы-Холма с самосогласованным источником в случае движущихся собственных значений. В случае уравнения sin-Гордон и цепочки Тоды такие задачи рассматривались в работах [12], [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C.S. Gardner, I.M. Green, M.D. Kruskal, R.M. Miura. *Method for solving the Korteweg-de Vries equation* // Phys. Rev. Lett. **19**:19, 1095–1097 (1967).
2. P.D. Lax. *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves* // Comm. Pure and Appl. Math. **21**:5, 467–490 (1968).
3. V.K. Melnikov. *Integration of the Korteweg-de Vries equation with a source* // Inverse Probl. **6**:2, 233–246 (1990).
4. V.K. Melnikov *Integration of the nonlinear Schrodinger equation with a source* // Inverse Probl. **8**:1, 133–147 (1992).
5. J. Leon, A. Latifi. *Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves* // J. Phys. A: Math. Gen. **23**:8, 1385–1403 (1990).
6. R. Camassa, D. Holm. *An integrable shallow water equation with peaked soliton*// Phys. Rev. Lett. **71**:11, 1661–1664 (1993).

7. R. Camassa, D. Holm, J. Hyman. *A new integrable shallow water equation* // Adv. Appl. Mech. **31**, 1–33 (1994).
8. A. Constantin. *Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equations: a geometric approach* // Ann. Inst. Fourier. **50**:2, 321–362 (2000).
9. A. Constantin, V.S. Gerdjikov, R.I. Ivanov. *Inverse scattering transform for the Camassa-Holm equation* // Inverse Probl. **22**:6, 2197–2207 (2006).
10. Huang Ye-Hui, Yao Yu-Qin, Zeng Yun-Bo. *On Camassa-Holm equation with self-consistent sources and its solutions* // Comm. Theor. Phys. **53**:3, 403–412 (2010).
11. Г.У. Уразбоев, И.И. Балтаева. *Об уравнении Камасса-Холма с самосогласованным источником* // Уфимск. матем. журн. **3**:2, 10–19 (2011).
12. A.B. Khasanov, G.U. Urazboev. *Integration of the sine-Gordon equation with a self-consistent source of the integral type in the case of multiple eigenvalues* // Russian Math. **53**:3, 45–55 (2009).
13. A. Cabada G. Urazboev. *Integration Toda lattice with an integral-type source* // Inverse Probl. **26**:8, 85004–85015 (2010).

Гайрат Уразалиевич Уразбоев,
Ургенчский государственный университет,
ул. Х. Алимжана, 14,
220100, г. Ургенч, Узбекистан
E-mail: gayrat71@mail.ru

Ирода Исмаиловна Балтаева,
Ургенчский государственный университет,
ул. Х. Алимжана, 14,
220100, г. Ургенч, Узбекистан
E-mail: iroda-b@mail.ru