ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 3 (2023). С. 42-54.

УДК 517.977.12

# БИЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СБЛИЖЕНИИ

**А.А. ЕРШОВ**

**Аннотация.** Рассматривается управляемая система, содержащая постоянный двумерный векторный параметр, приближенное значение которого сообщается управляющему лицу только в момент начала движения. Заранее известно лишь множество возможных значений этого неопределенного параметра. Для данной управляемой системы поставлена задача о сближении с целевым множеством в заданный момент времени. При этом считается, что управляющее лицо не имеет возможности проводить в режиме реального времени громоздкие вычисления, связанные с построением таких разрешающих конструкций как множества достижимости и интегральные воронки. Поэтому для решения этой задачи предложено заранее вычислить несколько «узловых» разрешающих управлений для значений параметра, представляющих собой узлы сетки, накрывающей множество возможных значений параметра. На тот случай, если в момент начала движения окажется, что значение параметра не совпадает ни с одним из узлов сетки, предполагается вычислять программное управление по формулам линейной интерполяции. Однако, данная процедура может быть эффективной только в том случае, если используется линейная комбинация управлений, соответствующих одному и тому же «поводырю» по терминологии метода экстремального прицеливания Н.Н. Красовского. Для возможности эффективного применения линейной интерполяции, для каждого узла сетки предложено построить по четыре «узловых» разрешающих управлений и, кроме того, использовать метод разделения управления на основное и компенсирующее. Вследствие применения последнего метода вычисляемое множество разрешимости оказывается несколько меньше фактического, но зато возрастает точность перевода состояния системы на целевое множество. В качестве примера рассмотрено нелинейное обобщение навигационной задачи Цермело.

**Ключевые слова:** управляемая система, задача о сближении, неопределенный постоянный параметр, билинейная интерполяция.

**Mathematics Subject Classification:** 93C41

## 1. Введение

Одна из самых существенных проблем теории управления [1] заключается в том, что вычисление разрешающего программного управления (или позиционной стратегии в дифференциальных играх [2], [3]) зачастую связано с громоздкими вычислительными процедурами, которые невозможно произвести в режиме реального времени. В том случае, когда условия задачи полностью определены и заранее известны, длительное вычисление разрешающих конструкций не представляет проблемы, так как разрешающее управление можно построить до начала движения управляемой системы. Ситуация меняется при наличии некоторых неопределенностей в условиях задачи управления, которые невозможно

---

A.A. Ershov, Bilinear interpolation of program control in approach problem.



Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00105, https://rscf.ru/project/19-11-00105/.

*Поступила 23 августа 2022 г.*

выяснить до начального момента времени [4]– [7]. Например, согласно работе [8] решение задачи управления с неполностью известным начальным условием состоит из трех этапов:

1) сбор информации о системе,
2) применение этой информации для устранения неопределенности,
3) переход к активному управлению.

В этой схеме стоит обратить внимание на переход между вторым и третьим этапом: после устранения неопределенности вряд ли будет возможным осуществить мгновенное построение разрешающего управления во время уже начавшегося движения некоторой динамической системы.

Также можно рассмотреть, например, вполне естественную задачу, когда расположение целевого множества для динамической системы заранее неизвестно, но ситуация требует немедленной реакции, как только целевое множество обнаруживается в наблюдаемом фазовом пространстве.

Обобщая данные задачи, с помощью замены переменных можно любые неопределенности в начальном положении, параметре или расположении целевого множества свести к неопределенному многомерному параметру. Кроме того, в данной работе мы не будем затрагивать процесс идентификации неопределенного параметра, а сосредоточимся на быстром ответе в виде программного управления после того, как этот неопределенный параметр нам сообщили.

В качестве решения предлагается заранее построить разрешающие управления, соответствующие нескольким значениям постоянного векторного параметра, а для промежуточных значений параметра предлагается воспользоваться простыми формулами линейной интерполяции. Проблема заключается в том, что в общем случае линейная комбинация управлений, соответствующих разным «поводырям» (по терминологии метода экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [9], [10]), не дает «хороших» результатов. Поэтому применяется более сложная схема на основе метода разделения управления на основное и компенсирующее.

В данной работе мы рассмотрим билинейную интерполяцию по двумерному векторному параметру, случай скалярного параметра был ранее рассмотрен в [11].

## 2. Постановка задачи

Пусть на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ $(t_0 < \vartheta < \infty)$ задана управляемая система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t), \alpha), \quad t \in (t_0, \vartheta), \\ x(t_0) = x^{(0)}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ — начальное состояние, $t$ — время, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $u(t)$ — измеримая по Лебегу вектор-функция (вектор управляющих воздействий) со значениями из компакта $P \subset \mathbb{R}^p$, $n$ и $p$ — натуральные числа, $\alpha \in \mathscr{L}$ — постоянный параметр, $\mathscr{L}$ — компакт из $\mathbb{R}^2$.

Предполагаем выполненными следующие условия.

**A.** Вектор-функция $f(t, x, u, \alpha)$ определена, непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathscr{L}$ и для любой ограниченной и замкнутой области $\Omega \subset [t_0, \vartheta] \times R^n$ найдется такая константа $L = L(\Omega) \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x^{(1)}, u, \alpha) - f(t, x^{(2)}, u, \alpha)\| \leqslant L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \quad (t, x^{(i)}, u, \alpha) \in \Omega \times P \times \mathscr{L}, \quad i = 1, 2;$$

здесь $\|\cdot\|$ — евклидовая норма вектора в $\mathbb{R}^n$.

**Замечание 2.1.** *Учитывая условие* A, *получаем, что модули непрерывности*

$$\omega^{(3)}(\delta) = \max\{||f(t,x,u_*,\alpha) - f(t,x,u^*,\alpha)|| : \\ (t,x,u_*,\alpha),(t,x,u^*,\alpha) \in D \times P \times \mathscr{L},\ ||u_* - u^*|| \leqslant \delta\}, \quad \delta \in (0,\infty),$$

$$\omega^{(4)}(\delta) = \max\{||f(t,x,u,\alpha_*) - f(t,x,u,\alpha^*)|| : \\ (t,x,u,\alpha_*),(t,x,u,\alpha^*) \in D \times P \times \mathscr{L},\ |\alpha_* - \alpha^*| \leqslant \delta\}, \quad \delta \in (0,\infty),$$

*удовлетворяют предельным соотношениям* $\omega^{(k)}(\delta) \downarrow 0$ *при* $\delta \downarrow 0$, $k = 3,4$.

**B.** Найдется такое $\gamma \in (0,\infty)$, что

$$\|f(t,x,u,\alpha)\| \leqslant \gamma(1 + \|x\|), \quad (t,x,u,\alpha) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathscr{L}.$$

**Замечание 2.2.** *Под допустимым управлением $u(t)$ мы понимаем измеримую по Лебегу на $[t_0,\vartheta]$ вектор-функцию со значениями из* $P$. *Условий* A *и* B *достаточно, чтобы каждому допустимому управлению $u(t)$ соответствовало движение $x(t)$, являющееся решением системы (2.1) в классе абсолютно непрерывных функций [12, §2.1]. При этом производная $\dot{x}(t)$ понимается в обобщенном смысле и для нее выполняется формула Ньютона-Лейбница (см., напр., [13, гл. 2, §4]).*

**Замечание 2.3.** *В силу условия* B *существует некоторая достаточно большая область $\Omega \subset [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n$, в которой заведомо содержатся всевозможные движения системы (2.1) вместе со всеми вспомогательными конструкциями для построения разрешающих управлений. В дальнейшем будем всюду использовать именно эту область $\Omega$ и соответствующую постоянную Липшица $L = L(\Omega)$.*

**C.** Вектограмма скоростей $F(t,x,\alpha) = f(t,x,P,\alpha) = \{f(t,x,u,\alpha) :\ u \in P\}$ — выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ для любых $(t,x,\alpha) \in [t_0,\theta] \times \mathbb{R}^n \times \mathscr{L}$.

Обозначим через $B^p(u,\rho) = \{\xi \in \mathbb{R}^p : ||\xi - u|| \leqslant \rho\}$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^p$, $\check{P} = \check{P}(\rho) = P \dot{-} B^p(\mathbf{0},\rho) = \{u \in \mathbb{R}^p : u + B^p(\mathbf{0},\rho) \subset P\}$ — сужение множества значений управления.

**D.** При любых $(t,x,\alpha) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathscr{L}$ и любого непустого сужения $\check{P}$ множество $\check{F}(t,x,\alpha) = f(t,x,\check{P},\alpha) = \{f(t,x,u,\alpha) : u \in \check{P}\}$ выпуклое.

**E.** Пусть точки $(t_*,x^*)$ и $(x^*,t^*)$ принадлежат области $\Omega$, причем $t^* = t_* + \Delta$, $x^* = x_* + \Delta \cdot f(t_*,x^*,\overline{u},\alpha)$, $\Delta > 0$, $\overline{u} \in \check{P}(\rho(\Delta))$, $\alpha \in \mathscr{L}$. Кроме того, задано не слишком большое число $\Delta_\alpha > 0$. Тогда можно задать функцию $\rho(\Delta)$ таким образом, что относительно вектора-компенсатора $w$ из $B^p(\mathbf{0},\rho(\Delta))$ и абсолютно непрерывной функции $x(\cdot)$ разрешима задача

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x(t),\overline{u} + w,\widetilde{\alpha}), \quad t \in (t_*,t^*), \\ x(t_*) = x_*,\ x(t^*) = x^* \end{cases}$$

для любого значения $\widetilde{\alpha} \in B^2(\alpha,\Delta_\alpha\sqrt{2})$. При этом зависимость $w = w(\widetilde{\alpha})$ должна быть из класса $C^2(B^2(\alpha,\Delta_\alpha\sqrt{2}))$ и для всех $\widetilde{\alpha} \in B^2(\alpha,\Delta_\alpha\sqrt{2})$ удовлетворять неравенствам

$$\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial \widetilde{\alpha}_1^2}\right\| \leqslant M_2, \qquad \left\|\frac{\partial^2 w}{\partial \widetilde{\alpha}_2^2}\right\| \leqslant M_2, \qquad \left\|\frac{\partial^2 w}{\partial \widetilde{\alpha}_1 \partial \widetilde{\alpha}_2}\right\| \leqslant M_2,$$

где постоянная $M_2 \geqslant 0$ определяется видом функции $f(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, областью $\Omega$, значениями $\Delta$ и $\Delta_\alpha$.

**Замечание 2.4.** *Оптимальный численный метод для вычисления функции $w = w(\widetilde{\alpha})$ и достаточные условия его сходимости являются нерешенными вопросами и могут быть предметом отдельного теоретического исследования. Для практического вычисления вектора-компенсатора $w$ можно предложить следующий алгоритм.*

*1) В качестве начального приближения вектора-компенсатора $w$ выбираем* $w_0 = \mathbf{0}$.

*2) Каждому приближению $w_k$, $k = 0, 1, 2, ...$, сопоставляем невязку $||x_k(t^*) - x^*||$, где сеточная функция $x_k(t)$ – численное решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = f(t, x_k(t), \overline{u} + w_k, \widetilde{\alpha}), \quad t \in (t_*, t^*), \\ x_k(t_*) = x_*. \end{cases}$$

*Решение задачи Коши можно осуществлять методом Рунге-Кутта [14, гл. 8, §2], оптимальный порядок которого напрямую зависит от степени гладкости функции $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ по первой и второй переменной.*

*3) Выбор последующих приближений $w_k$, $k = 1, 2...$, можно осуществлять в соответствии с алгоритмом покоординатного спуска [14, гл. 7, §3] по соответствующей невязке (либо простым перебором из $B^p(\mathbf{0}, \rho(\Delta))$).*

*4) Условием останова является достаточно малое значение невязки $||x_k(t^*) - x^*||$.*

*Однако, поскольку не исследована устойчивость $w$ от малого изменения $x^*$, то, фактически, дополнением к условию* E *является предположение, что мы можем вычислять функцию $w = w(\widetilde{\alpha})$ с пренебрежимо малой погрешностью.*

Кроме условий A, B, C, D, E, оговорим информационные условия, в рамках которых осуществляется управление системой (2.1).

Будем предполагать, что в начальный момент времени $t_0$ лицу, осуществляющему выбор программного управления $u(t)$, сообщается некоторое приближенное значение $\alpha^* \in \mathscr{L}$ параметра $\alpha \in \mathscr{L}$ с погрешностью, не превосходящей

$$||\alpha^* - \alpha|| < \delta_\alpha. \tag{2.2}$$

Кроме того, задолго до момента начала движения $t_0$, управляющему лицу известно само ограничение — компакт $\mathscr{L}$ и примерное положение $x^*(t_0)$ начальной точки $x(t_0)$ с погрешностью

$$||x^*(t_0) - x(t_0)|| < \delta_x. \tag{2.3}$$

Дополнительным ограничением является то, что управляющее лицо не может производить «тяжелые» вычисления после момента начала движения системы $t_0$, необходимо построить и сохранить в ограниченном объеме памяти разрешающие программные управления при всех возможных значениях неопределенного постоянного параметра $\alpha$ заранее, имея в распоряжении лишь информацию о $\mathscr{L}$ и $x^*(t_0)$.

Тем самым мы оговорили информационные условия.

Пусть $M$ — некоторый компакт в $\mathbb{R}^n$, представляющий собой целевое множество для системы (2.1). Сформулируем для системы (2.1) задачу о сближении с $M$.

**Задача 1.** *Требуется определить существование допустимого программного управления $u(t)$, переводящего движение $x(t)$ системы (2.1) в момент $\vartheta$ в малую окрестность $M$, и, в случае положительного ответа, сконструировать его.*

## 3. Алгоритм решения задачи 1 о сближении

Обозначим через $\Omega^{(\delta)}(\cdot)$ отображение, которое «прореживает» множество, т.е. любому ограниченному множеству $A \subset \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, оно сопоставляет конечное множество $\widetilde{A} = \Omega^{(\delta)}(A)$, состоящее по-возможности из меньшего количества его точек и обладающее свойством:

$$d(A, \widetilde{A}) \leqslant \delta,$$

где $d(A, \widetilde{A})$ — хаусдорфово расстояние между $A$ и $\widetilde{A}$. Способы построения такого «прореженного» множества $\widetilde{A}$ приведены в [15, с. 549].

Обозначим $\widetilde{P} = \Omega^{(\Delta_u)}(\check{P})$, где $\Delta_u > 0$ — достаточно малая постоянная (выбранная из соображений оптимального соотношения между точностью и производительностью вычислений), $\check{P}$ — сужение управления из условия E.

Введем отображение $X^{(\Delta)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times 2^{\Omega} \times \mathscr{L} \mapsto 2^{\Omega}$, действующее по правилу:

$$X^{(\Delta)}(t^*, t_*, \widetilde{X}_*, \alpha) = \bigcup_{x \in \widetilde{X}_*} \{x + (t^* - t_*) f(t_*, x, \widetilde{P}, \alpha)\}$$
$$= \bigcup_{x \in \widetilde{X}_*} \bigcup_{u \in \widetilde{P}} \{x + (t^* - t_*) f(t_*, x, u, \alpha)\}.$$

Теперь, после введения необходимых обозначений, сформулируем численный метод решения задачи 1 в виде двух алгоритмов. Первый алгоритм предназначен для вычислений, производящихся до начала движения системы, а второй алгоритм применяется непосредственно во время движения.

**Алгоритм 3.1.**

*1) Выберем достаточно большое натуральное число $N$ и введем равномерное разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_N = \vartheta\}$ временного промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma)$, который удовлетворяет соотношениям $\Delta = t_{i+1} - t_i = N^{-1} \cdot (\vartheta - t_0)$, $i = \overline{0, N-1}$.*

*2) Обозначим через $\Delta_\alpha > 0$ достаточно малую постоянную, удовлетворяющую условию* E *при $\Delta = \Delta(\Gamma)$. Кроме того, из условия* E *определяются функция $\rho(\Delta)$ и сужение управления $\check{P} = \check{P}(\rho(\Delta))$.*

*3) В качестве конечного подмножества $\widetilde{\mathscr{L}} \subset \mathscr{L}$ выберем такое множество векторов $\{\alpha^{(j)}\}_{j=1}^{N_\alpha}$, чтобы любое $\alpha \in \mathscr{L}$ было внутри «своего» квадрата $\alpha^{(j,-,-)}\alpha^{(j,-,+)}\alpha^{(j,+,-)}\alpha^{(j,+,+)}$ с четырьмя вершинами $\alpha^{(j,\pm,\pm)} = (\alpha_1^{(j)} \pm \Delta_\alpha/2, \alpha_2^{(j)} \pm \Delta_\alpha/2)$.*

*4) Выберем достаточно малую постоянную $\Delta_x > 0$ и для всех $j = \overline{1, N_\alpha}$ определим множества*

$$\widetilde{X}_0 = \{x^{(0)}\}, \qquad \widetilde{X}_k(\alpha^{(j)}) = \Omega^{(\Delta_x)}(X^{(\Delta)}(t_k, t_{k-1}, \widetilde{X}_{k-1}, \alpha^{(j)}), \quad k = \overline{1, N}.$$

*При построении конечных множеств $\widetilde{X}_k(\alpha^{(j)})$, $k = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N_\alpha}$, для каждой точки $\overline{x}^{(k,j)} \in \widetilde{X}_k(\alpha^{(j)})$ мы будем запоминать «родительскую» точку $\overline{x}^{(k-1,j)} \in \widetilde{X}_{k-1}(\alpha^{(j)})$ и управление $\overline{u}^{(k,j)} = \mathrm{const}$, для которых выполнено соотношение*

$$\overline{x}^{(k,j)} = \overline{x}^{(k-1,j)} + \Delta \cdot f(t_{k-1}, \overline{x}^{(k-1,j)}, \overline{u}^{(k,j)}, \alpha^{(j)}).$$

*5) Если для всех $\alpha^{(j)} \in \widetilde{\mathscr{L}}$ расстояние*

$$\rho(M, \widetilde{X}_N(\alpha^{(j)})) = \min\{||x - y|| : x \in M, y \in \widetilde{X}_N(\alpha^{(j)})\} > \Delta_x,$$

*то мы заключаем, что разрешающее программное управление, переводящее движение системы (2.1) на целевое множество $M$ в момент $\vartheta$ с приемлемой точностью, невозможно построить нашим методом, и завершаем решение задачи о сближении.*

*Если для всех $\alpha^{(j)} \in \widetilde{\mathscr{L}}$ расстояние*

$$\rho(M, \widetilde{X}_N(\alpha^{(j)})) = \min\{||x - y|| : x \in M, y \in \widetilde{X}_N(\alpha^{(j)})\} \leqslant \Delta_x,$$

*то мы заключаем, что задача 1 разрешима для любого $\alpha \in \mathscr{L}$, реализованного в системе.*

*Если для некоторых $\alpha^{(j)} \in \widetilde{\mathscr{L}}$ расстояние*

$$\rho(M, \widetilde{X}_N(\alpha^{(j)})) = \min\{||x - y|| : x \in M, y \in \widetilde{X}_N(\alpha^{(j)})\} \leqslant \Delta_x,$$

*а для других $\alpha^{(j)} \in \widetilde{\mathscr{L}}$ это неравенство не выполняется, то мы не сможем гарантировать решение задачи 1 с приемлемой точностью для того значения параметра $\alpha$, которое нам сообщат.*

*6) Для каждого $j = \overline{1, N_\alpha}$ выбираем по одной точке $\overline{x}^{(N,j)} \in \widetilde{X}_N(\alpha^{(j)})$ из ближайших к $M$. Будем считать, что если наш алгоритм не закончился на шаге 5), то $\rho(\overline{x}^{(N,j)}, M) \leqslant \Delta_x$, $j = \overline{1, N_\alpha}$. Далее, для каждого $j = \overline{1, N_\alpha}$ будем обозначать через*

*$\overline{x}^{(k,j)}$ и $\overline{u}^{(k,j)}$ именно те точки и те постоянные управляющие вектора, которые «привели» нас к $\overline{x}^{(N,j)}$.*

*7) Для каждого $j = \overline{1, N_\alpha}$ и $k = \overline{1, N}$ решаем в соответствии с замечанием 2.4 по четыре краевые задачи относительно постоянных векторов-компенсаторов $w^{(k,j,\pm,\pm)} \in B^p(\mathbf{0}, \rho(\Delta))$ и абсолютно непрерывных функций $x^{(k,j,\pm,\pm)}(t)$:*

$$\begin{cases} \dot{x}^{(k,j,\pm,\pm)}(t) = f(t, x^{(k,j,\pm,\pm)}(t), \overline{u}^{(k,j)} + w^{(k,j,\pm,\pm)}, \alpha^{(j,\pm,\pm)}), \quad t \in (t_{k-1}, t_k), \\ x^{(k,j,\pm,\pm)}(t_{k-1}) = \overline{x}^{(k-1,j)},\ x^{(k,j,\pm,\pm)}(t_k) = \overline{x}^{(k,j)}. \end{cases}$$

*8) Каждому $\alpha^{(j)} \in \widetilde{\mathscr{L}}$ мы сопоставляем четыре кусочно-постоянных «узловых» управления*

$$u^{(j,\pm,\pm)}(t) = \begin{cases} \overline{u}^{(1,j)} + \overline{w}^{(1,j,\pm,\pm)}, & t \in [t_0, t_1), \\ \dots \\ \overline{u}^{(k,j)} + \overline{w}^{(k,j,\pm,\pm)}, & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \dots \\ \overline{u}^{(N,j)} + \overline{w}^{(N,j,\pm,\pm)}, & t \in [t_{N-1}, t_N]. \end{cases} \tag{3.1}$$

**Замечание 3.1.** *В шаге 3) алгоритма 3.1 можно выбрать несколько меньшее множество $\widetilde{\mathscr{L}}$, допуская при этом, что некоторые точки $\alpha \in \mathscr{L}$ будут распологаться немного за пределами «своих» квадратов с вершинами $\alpha^{(j,-,-)}$, $\alpha^{(j,-,+)}$, $\alpha^{(j,+,-)}$ и $\alpha^{(j,+,+)}$. Однако при этом мы должны потребовать, чтобы, во-первых, условие* E *было выполнено в той же окрестности квадрата $\alpha^{(j,-,-)}\alpha^{(j,-,+)}\alpha^{(j,+,-)}\alpha^{(j,+,+)}$, а во-вторых, для таких $\alpha = c_1c_2\alpha^{(j,-,-,)} + (1-c_1)c_2\alpha^{(j,+,-,)} + c_1(1-c_2)\alpha^{(j,-,+,)} + (1-c_1)(1-c_2)\alpha^{(j,+,+,)}$ были выполнены все включения*

$$c_1c_2w^{(k,j,-,-,)} + (1-c_1)c_2w^{(k,j,+,-,)} + c_1(1-c_2)w^{(k,j,-,+,)} + (1-c_1)(1-c_2)w^{(k,j,+,+,)} \in B^p(\mathbf{0}, \rho(\Delta)),$$

$k = \overline{1, N}$.

**Алгоритм 3.2.**

*1) По полученному в момент $t_0$ приближенному значению $\alpha^*$ определяем соответствующее $\alpha^{(j)} \in \widetilde{\mathscr{L}}$ по тому распределению, которое было определено на шаге 3) алгоритма 3.1.*

*2) Представляем вектор $\alpha^*$ в виде линейной комбинации векторов $\alpha^{(j,-,-,)}$, $\alpha^{(j,-,+,)}$, $\alpha^{(j,+,-,)}$, $\alpha^{(j,+,+,)}$ следующим образом:*

$$\alpha^* = c_1c_2\alpha^{(j,-,-,)} + (1-c_1)c_2\alpha^{(j,+,-,)} + c_1(1-c_2)\alpha^{(j,-,+,)} + (1-c_1)(1-c_2)\alpha^{(j,+,+,)},$$

*где $0 \leqslant c_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant c_2 \leqslant 1$ (кроме случая, описанного в замечании 3.1).*

*3) В качестве искомого разрешающего программного управления используем функцию*

$$\hat{u}(t) = c_1c_2u^{(j,-,-,)}(t) + (1-c_1)c_2u^{(j,+,-,)}(t) + c_1(1-c_2)u^{(j,-,+,)}(t) + (1-c_1)(1-c_2)u^{(j,+,+,)}(t). \tag{3.2}$$

## 4. Оценка погрешности

**Лемма 4.1.** *Пусть постоянные $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, точки $P_1 = (x_1, y_1)$ и $P_2 = (x_2, y_2)$ из $\mathbb{R}^2$, функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, все ее вторые частные производные ограничены некоторой постоянной $m_2 > 0$, т.е.*

$$\Big\|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\Big\| \leqslant m_2, \qquad \Big\|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\Big\| \leqslant m_2, \qquad \Big\|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\Big\| \leqslant m_2.$$

*Тогда*

$$\begin{aligned}&\big\|f(c_1x_1+(1-c_1)x_2,c_2y_1+(1-c_2)y_2)-c_1c_2f(x_1,y_1)-(1-c_1)c_2f(x_2,y_1)\\&\qquad\qquad-c_1(1-c_2)f(x_1,y_2)-(1-c_1)(1-c_2)f(x_2,y_2)\big\|\\&\leqslant\frac{3}{2}\big|c_2(1-c_2)\big|m_2(y_2-y_1)^2+\frac{3}{2}\big|c_1(1-c_1)c_2\big|m_2(x_2-x_1)^2+\frac{3}{2}\big|c_1(1-c_1)(1-c_2)\big|m_2(x_2-x_1)^2.\end{aligned}$$

*Доказательство.* Разложив функцию $f(\xi,\eta)$ по первой переменной в точках $x_1$ и $x_2$ в ряды Тейлора с остаточным членом в интегральной форме и подставив в эти разложения $\xi=c_1x_1+(1-c_1)x_2$, получаем равенства

$$\begin{aligned}&f(c_1x_1+(1-c_1)x_2,\eta)=f(x_1+(1-c_1)(x_2-x_1),\eta)\\&\quad=f(x_1,\eta)+(1-c_1)(x_2-x_1)\cdot\frac{\partial f(x_1,\eta)}{\partial x_1}+\int\limits_{x_1}^{c_1x_1+(1-c_1)x_2}(c_1x_1+(1-c_1)x_2-t)\frac{\partial^2f(t,\eta)}{\partial t^2}dt,\\&f(c_1x_1+(1-c_1)x_2,\eta)=f(x_2+c_1(x_1-x_2),\eta)\\&\quad=f(x_2,\eta)+c_1(x_1-x_2)\frac{\partial f(x_2,\eta)}{\partial x_2}+\int\limits_{x_2}^{c_1x_1+(1-c_1)x_2}(c_1x_1+(1-c_1)x_2-t)\frac{\partial^2f(t,\eta)}{\partial t^2}dt,\end{aligned}$$

из которых в свою очередь следует, что

$$\begin{aligned}&\big|f(c_1x_1+(1-c_1)x_2,\eta)-c_1f(x_1,\eta)-(1-c_1)f(x_2,\eta)\big|\\&\quad=\big|c_1\big(f(x_1+(1-c_1)(x_2-x_1),\eta)-f(x_1,\eta)\big)+(1-c_1)\big(f(x_2+c_1(x_1-x_2))f(x_2,\eta)\big)\big|\\&\quad=\Bigg|c_1(1-c_1)(x_2-x_1)\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2f(t,\eta)}{\partial t^2}dt+c_1\int\limits_{x_1}^{c_1x_1+(1-c_1)x_2}(c_1x_1+(1-c_1)x_2-t)\frac{\partial^2f(t,\eta)}{\partial t^2}dt\\&\qquad\qquad+(1-c_1)\int\limits_{x_2}^{c_1x_1+(1-c_1)x_2}(c_1x_1+(1-c_1)x_2-t)\frac{\partial^2f(t,\eta)}{\partial t^2}dt\Bigg|\\&\quad\leqslant\left|c_1(1-c_1)m_2(x_2-x_1)^2+c_1m_2\frac{(1-c_1)^2(x_2-x_1)^2}{2}+(1-c_1)m_2\frac{c_1^2(x_2-x_1)^2}{2}\right|\\&\quad=\frac{3}{2}|c_1(1-c_1)|m_2(x_2-x_1)^2.\end{aligned}$$

Подставив в последнее неравенство $\eta=y_1$ и $\eta=y_2$, получаем неравенства

$$\big\|f(c_1x_1+(1-c_1)x_2,y_1)-c_1f(x_1,y_1)-(1-c_1)f(x_2,y_1)\big\|\leqslant\frac{3}{2}|c_1(1-c_1)|m_2(x_2-x_1)^2,\quad(4.1)$$

$$\big\|f(c_1x_1+(1-c_1)x_2,y_2)-c_1f(x_1,y_2)-(1-c_1)f(x_2,y_2)\big\|\leqslant\frac{3}{2}|c_1(1-c_1)|m_2(x_2-x_1)^2.\quad(4.2)$$

Аналогично, разложив функцию $f(c_1x_1+(1-c_1)x_2,\eta)$ по второму аргументу и подставив $\eta=c_2y_1+(1-c_2)y_2$, получаем неравенство

$$\begin{aligned}&\big\|f(c_1x_1+(1-c_1)x_2,c_2y_1+(1-c_2)y_2)\\&\qquad-c_2f(c_1x_1+(1-c_1)x_2,y_1)-(1-c_2)f(c_1x_1+(1-c_1)x_2,y_2)\big\|\\&\qquad\leqslant\frac{3}{2}|c_2(1-c_2)|m_2(y_2-y_1)^2.\end{aligned}\quad(4.3)$$

Используя неравенства (4.1), (4.2) и (4.3), оценим разность

$$\begin{aligned}
&\big\|f(c_1x_1+(1-c_1)x_2, c_2y_1+(1-c_2)y_2)\\
&\qquad -c_1c_2f(x_1,y_1)-(1-c_1)c_2f(x_2,y_1)-c_1(1-c_2)f(x_1,y_2)-(1-c_1)(1-c_2)f(x_2,y_2)\big\|\\
&\quad\leqslant \big\|f(c_1x_1+(1-c_1)x_2, c_2y_1+(1-c_2)y_2)-c_2f(c_1x_1+(1-c_1)x_2,y_1)\\
&\qquad -(1-c_2)f(c_1x_1+(1-c_1)x_2,y_2)\big\|\\
&\qquad +\big\|c_2f(c_1x_1+(1-c_1)x_2,y_1)-c_1c_2f(x_1,y_1)-(1-c_1)c_2f(x_2,y_1)\big\|\\
&\qquad +\big\|(1-c_2)f(c_1x_1+(1-c_1)x_2,y_2)-c_1(1-c_2)f(x_1,y_2)-(1-c_1)(1-c_2)f(x_2,y_2)\big\|\\
&\quad\leqslant \frac{3}{2}\big|c_2(1-c_2)\big|m_2(y_2-y_1)^2\\
&\qquad +\frac{3}{2}\big|c_1(1-c_1)c_2\big|m_2(x_2-x_1)^2+\frac{3}{2}\big|c_1(1-c_1)(1-c_2)\big|m_2(x_2-x_1)^2.
\end{aligned}$$

□

**Следствие 4.1.** *Если в условии леммы 4.1 дополнительно ограничить* $0\leqslant c_1\leqslant 1$, $0\leqslant c_2\leqslant 1$, *то*

$$\begin{aligned}
&\big\|f(c_1x_1+(1-c_1)x_2, c_2y_1+(1-c_2)y_2)\\
&\qquad -c_1c_2f(x_1,y_1)-(1-c_1)c_2f(x_2,y_1)-c_1(1-c_2)f(x_1,y_2)-(1-c_1)(1-c_2)f(x_2,y_2)\big\|\\
&\quad\leqslant \frac{3}{8}m_2||P_2-P_1||^2.
\end{aligned}$$

**Теорема 4.1.** *Пусть система (2.1) удовлетворяет условиям* A, B, C, D, E, *а ее управление производится в информационных условиях, перечисленных в разделе 2. И пусть при решении задачи 1 на шаге 5) алгоритма 3.1 было установлено существование допустимого разрешающего управления, а затем с помощью алгоритма 3.2 было построено программное управление* $\hat{u}(t)$, *порождающее движение* $\hat{x}(t)$. *Тогда*

$$\rho(\hat{x}(\vartheta),M)\leqslant \Delta_x+\delta_xe^{L(\vartheta-t_0)}+\frac{\omega^{(3)}\Big(\dfrac{3}{8}M_2\Delta_\alpha^2\Big)+\omega^{(4)}(\delta_\alpha)}{L}\big(e^{L(\vartheta-t_0)}-1\big).$$

*Доказательство.* В соответствии с шагом 3) алгоритма 3.1 найдется такой номер $j\in\{1,...,N_\alpha\}$, что

$$\alpha^*=c_1c_2\alpha^{(j,-,-,)}+(1-c_1)c_2\alpha^{(j,+,-,)}+c_1(1-c_2)\alpha^{(j,-,+,)}+(1-c_1)(1-c_2)\alpha^{(j,+,+,)},$$

где $0\leqslant c_1\leqslant 1$, $0\leqslant c_2\leqslant 1$.

Через $\hat{x}(t)$ обозначено движение системы (2.1), соответствующее управлению

$$\hat{u}(t)=c_1c_2u^{(j,-,-,)}(t)+(1-c_1)c_2u^{(j,+,-,)}(t)+c_1(1-c_2)u^{(j,-,+,)}(t)+(1-c_1)(1-c_2)u^{(j,+,+,)}(t),$$

настоящему значению параметра $\alpha$ и начальному состоянию $x(t_0)$. Отметим, что в наших обозначениях $\hat{x}(t_0)=x(t_0)$ — точное начальное состояние системы.

По построению

$$\rho(\overline{x}(\vartheta),M)\leqslant\Delta_x. \tag{4.4}$$

В наших обозначениях оценка (2.3) есть

$$||\hat{x}(t_0)-\overline{x}(t_0)||=||x(t_0)-x^*(t_0)||\leqslant\delta_x. \tag{4.5}$$

В силу условия E существует некоторый идеальный вектор-компенсатор $\overline{w}^{(1,j)}\in B^p(\mathbf{0},\rho(\Delta))$ такой, что состояние системы $\overline{x}(t_0)$ под действием постоянного управления $\overline{u}^{(1,j)}+\overline{w}^{(1,j)}$ на промежутке $[t_0,t_1)$ и при параметре $\alpha^*$ переводится в точку $\overline{x}(t_1)$ по некоторой траектории $\overline{x}(t)$. (Для дальнейшего, обозначим через $\overline{x}(t)$ всю траекторию системы (2.1), проходящую через точки $\overline{x}(t_0)$, $\overline{x}(t_1)$, ..., $\overline{x}(t_N)$ под действием соответствующего кусочно-постоянного управления $\overline{u}(t) = \overline{u}^{(k,j)} + \overline{w}^{(k,j)}$, $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = \overline{1, N}$.)

Однако, согласно алгоритму 3.2, вместо идеального вектора-компенсатора $\overline{w}^{(1,j)}$ используется вектор-компенсатор

$$\hat{w}^{(1,j)} = c_1 c_2 w^{(1,j,-,-,)} + (1-c_1)c_2 w^{(1,j,+,-,)} + c_1(1-c_2)w^{(1,j,-,+,)} + (1-c_1)(1-c_2)w^{(1,j,+,+,)}.$$

Благодаря тому что он является выпуклой комбинацией $w^{(1,j,-,-)}$, $w^{(1,j,-,+)}$, $w^{(1,j,+,-)}$ и $w^{(1,j,+,+)}$, он также попадает в $B^p(\mathbf{0}, \rho(\Delta))$. В силу следствия 4.1 выполняется оценка

$$||\hat{w}^{(1,j)} - \overline{w}^{(1,j)}|| \leqslant \frac{3}{8} M_2 \Delta_\alpha^2.$$

Поскольку, согласно формулам (3.1) и (3.2)

$$\hat{u}(t) = \overline{u}^{(1,j)} + \hat{w}^{(1,j)}, \quad t \in [t_0, t_1),$$

то

$$||\hat{u}(t) - \overline{u}(t)|| = ||\hat{w}^{(1,j)} - \overline{w}^{(1,j)}|| \leqslant \frac{3}{8} M_2 \Delta_\alpha^2, \quad t \in [t_0, t_1).$$

Аналогично, для каждого $k = \overline{1, N}$ в силу условия E существует некоторый идеальный вектор-компенсатор $\overline{w}^{(k,j)} \in B^p(\mathbf{0}, \rho(\Delta))$ такой, что состояние системы $\overline{x}(t_{k-1})$ под действием постоянного управления $\overline{u}(t) = \overline{u}^{(k,j)} + \overline{w}^{(k,j)}$ на промежутке $[t_{k-1}, t_k)$ и при $\alpha = \alpha^*$ переводится в точку $\overline{x}(t_k)$ по траектории $\overline{x}(t)$. Однако, по алгоритму 3.2 на промежутке $[t_{k-1}, t_k)$ мы используем управление

$$\begin{aligned}\hat{u}(t) = \overline{v}^{(k,j)} + \hat{w}^{(k,j)} = \overline{v}^{(k,j)} &+ c_1 c_2 w^{(1,j,-,-,)} + (1-c_1)c_2 w^{(1,j,+,-,)} \\ &+ c_1(1-c_2)w^{(1,j,-,+,)} + (1-c_1)(1-c_2)w^{(1,j,+,+,)},\end{aligned}$$

для которого, в силу следствия 4.1 выполняется оценка

$$||\hat{u}(t) - \overline{u}(t)|| = ||\hat{w}^{(k,j)} - \overline{w}^{(k,j)}|| \leqslant \frac{3}{8} M_2 \Delta^2, \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \quad k = \overline{1, N}. \tag{4.6}$$

Иными словами, оценка (4.6) выполняется на всем отрезке $[t_0, \vartheta]$.

Кроме того, напомним, что значение $\alpha^*$ параметра $\alpha$ известно с погрешностью $\delta_\alpha$ (см. (2.2)).

Таким образом, учитывая (4.5), (4.6) и (2.2), получаем для $t \in [t_0, \vartheta]$ следующую интегральную оценку рассогласования движений:

$$\begin{aligned}||\hat{x}(t) - \overline{x}(t)|| &\leqslant \left\| \hat{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \alpha) d\tau - \overline{x}(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(\tau, \overline{x}(\tau), \overline{u}_j(\tau), \alpha^*) d\tau \right\| \\
&\leqslant ||\hat{x}(t_0) - \overline{x}(t_0)|| + \int_{t_0}^{t} \big( ||f(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \alpha) - f(\tau, \overline{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \alpha) + f(\tau, \overline{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \alpha) \\
&\quad - f(\tau, \overline{x}(\tau), \overline{u}(\tau), \alpha) + f(\tau, \overline{x}(\tau), \overline{u}(\tau), \alpha) - f(\tau, \overline{x}(\tau), \overline{u}(\tau), \alpha^*)|| \big) d\tau \\
&\leqslant \delta_x + \int_{t_0}^{t} L||\hat{x}(\tau) - \overline{x}(\tau)|| d\tau + \int_{t_0}^{t} \omega^{(3)}\big(\hat{u}(\tau) - \overline{u}(\tau)\big) d\tau + \int_{t_0}^{t} \omega^{(4)}(\alpha - \alpha^*) d\tau \\
&\leqslant \delta_x + L \int_{t_0}^{t} ||\hat{x}(\tau) - \overline{x}(\tau)|| d\tau + (t - t_0) \cdot \omega^{(3)}\Big(\frac{3}{8} M_2 \Delta_\alpha^2\Big) + (t - t_0) \cdot \omega^{(4)}(\delta_\alpha).\end{aligned}$$

Отсюда в силу усиленной леммы Гроноулла [16, гл. 1, §2, с. 26] следует, что

$$||\hat{x}(\vartheta)-\overline{x}(\vartheta)||\leqslant \delta_x e^{L(\vartheta-t_0)}+\frac{\omega^{(3)}\Big(\dfrac{3}{8}M_2\Delta_\alpha^2\Big)+\omega^{(4)}(\delta_\alpha)}{L}\big(e^{L(\vartheta-t_0)}-1\big). \tag{4.7}$$

Из (4.4) и (4.7) вытекает утверждение теоремы.

□

**Замечание 4.1.** *Для модифицированного алгоритма 3.1 в соответствии с замечанием 3.1 можно получить, используя лемму 4.1, более слабую оценку*

$$\rho(\hat{x}(\vartheta),M)\leqslant \Delta_x+\delta_x e^{L(\vartheta-t_0)}$$
$$+\frac{e^{L(\vartheta-t_0)}-1}{L}\Big(\omega^{(3)}\Big(\frac{3}{2}\big(\big|c_2(1-c_2)\big|+\big|c_1(1-c_1)c_2\big|+\big|c_1(1-c_1)(1-c_2)\big|\big)M_2\Delta_\alpha^2\Big)+\omega^{(4)}(\delta_\alpha)\Big).$$

## 5. Пример

В качестве примера рассмотрим нелинейное обобщение навигационной задачи Цермело. Пусть на промежутке времени $[t_0,\vartheta]=[0,2]$ задана управляемая система

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=s(x(t))+u(t), \quad t\in(0,2),\\ x(0)=x^{(0)}=(0,0),\end{cases} \tag{5.1}$$

где $t$ — время, $x(t) = (x_1(t),x_2(t))$ — фазовая переменная, вектор-функция $s(x)=(s_1(x),s_2(x))=\big(\sin(x_2),\cos(x_1)\big)$, $x^{(0)}$ — начальное состояние системы, $u(t)$ — измеримая по Лебегу вектор-функция со значениями из круга $P=\{u=(u_1,u_2):u_1^2+u_2^2\leqslant 1\}$ и представляющая собой вектор управляющих воздействий.

Задача состоит в быстром предъявлении программного управления $u(t)$, $t\in[t_0,\vartheta]$, которое бы переводило движение $x(t)$ управляемой системы (5.1) из начальной точки $x^{(0)}$ в малую окрестность точки $x^{(f)}$, координаты которой нам сообщат в начальной момент $t_0=0$. Однако, нам заранее известно, что $x^{(f)}$ будет принадлежать кругу $B^2\Big((1,2),\dfrac{1}{2}\Big)$.

В этом разделе мы продемонстрируем работу алгоритмов 3.1 и 3.2 по решению нашей задачи и смоделируем точность попадания движения системы (5.1) на целевое множество в конечный момент времени $\vartheta=2$. Для упрощения будем считать все измерения точными, то есть $\delta_\alpha=0$ и $\delta_x=0$.

Итак, для перевода неопределенности в целевом множестве в неопределенный параметр, введем в рассмотрение постоянный параметр $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)=\Big(\dfrac{1}{2}(x_1^{(f)}-1),\dfrac{1}{2}(x_2^{(f)}-2)\Big)$ и сделаем замену фазовой переменной $\xi=x-t\alpha$. После такой замены переменных система (5.1) примет вид

$$\begin{cases}\dot{\xi}(t)=-\alpha+s\big(\xi(t)+t\alpha\big)+u(t), \quad t\in(0,2),\\ \xi(0)=x^{(0)}=(0,0).\end{cases} \tag{5.2}$$

Здесь целевым множеством будет точка $\xi^{(f)}=(1,2)$, а неопределенный векторный параметр $\alpha$ принимает любое значение из $\mathscr{L}=B^2\Big((0,0),\dfrac{1}{4}\Big)$.

Для такой преобразованной задачи выполним алгоритм 3.1.

1) Выберем $N=2$, тогда $\Gamma=\{t_0=0,t_1=1,t_0=2\}$.

2) Обозначим через $\Delta_\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$. Определим «с запасом» $\rho(\Delta)=\dfrac{3}{4}$, тогда $\check{P}(\rho(\Delta))=B^2\Big((0,0),\dfrac{1}{4}\Big)$.

3) Выберем $\widetilde{\mathscr{L}}=\{\alpha^{(1)}=(0,0)\}$. Соответственно, $\alpha^{(1,\pm,\pm)}=\Big(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8},\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}\Big)$.

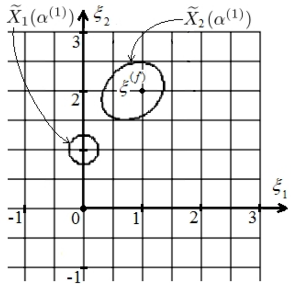


Рис. 1. Аппроксимации множеств достижимости $\widetilde{X}_1(\alpha^{(1)})$ и $\widetilde{X}_2(\alpha^{(1)})$.

4) Выберем $\Delta_x = \dfrac{\sqrt{2}}{50}$ и построим аппроксимации множеств достижимости $\widetilde{X}_1(\alpha^{(1)})$ и $\widetilde{X}_2(\alpha^{(1)})$ (рис. 1).

5) Поскольку $\rho(\xi^{(f)}, \widetilde{X}_2(\alpha^{(1)})) < \Delta_x$, то продолжаем работу алгоритма 3.1.

6) Выбираем $\overline{\xi}^{(2,1)} = (1.0015, 2)$, ближайший к $\xi^{(f)}$ из $\widetilde{X}_2(\alpha^{(1)})$. Отмечаем, что $\overline{\xi}^{(0)} = (0,0)$, $\overline{u}^{(1,1)} = (0,0)$, $\overline{\xi}^{(1,1)} = (0,1)$, $\overline{u}^{(2,1)} = (0.16, 0)$.

7) Для каждого $k = 1,2$ и $j = 1$ решаем в соответствии с замечанием 2.4 по 4 задачи

$$\begin{cases} \dot{\xi}^{(k,j,\pm,\pm)}(t) = f(t, \xi^{(k,j,\pm,\pm)}(t), \overline{u}^{(k,j)} + w^{(k,j,\pm,\pm)}, \alpha^{(j,\pm,\pm)}), \quad t \in (t_{k-1}, t_k), \\ \xi^{(k,j,\pm,\pm)}(t_{k-1}) = \overline{\xi}^{(k-1,j)},\ x^{(k,j,\pm,\pm)}(t_k) = \overline{\xi}^{(k,j)}. \end{cases}$$

Их решениями являются

$$w^{(1,1,-,+)} = (-0.70185, 0.19243), \qquad w^{(1,1,+,+)} = (-0.3472, 0.17898),$$
$$w^{(1,1,-,-)} = (-0,56727, -0,16393), \qquad w^{(1,1,+,-)} = (-0.21275, -0.17465),$$

$$w^{(2,1,-,+)} = (-0.09795, 0.23763), \qquad w^{(2,1,+,+)} = (0.26776, 0.5129),$$
$$w^{(2,1,-,-)} = (-0.09828, -0.12595), \qquad w^{(2,1,+,-)} = (0.24169, 0.13066).$$

8) По формуле (3.1) находим четыре «узловых» управления

$$u^{(1,-,-)}(t) = \begin{cases} (-0.56727, -0.16393), & t \in [0,1), \\ (0.06172, -0.12595), & t \in [1,2], \end{cases}$$
$$u^{(1,-,+)}(t) = \begin{cases} (-0.70185, 0.19243), & t \in [0,1), \\ (0.06205, 0.23763), & t \in [1,2], \end{cases}$$
$$u^{(1,+,-)}(t) = \begin{cases} (-0.21275, -0.17465), & t \in [0,1), \\ (0.40169, 0.13066), & t \in [1,2], \end{cases}$$
$$u^{(1,+,+)}(t) = \begin{cases} (-0.3472, 0.17898), & t \in [0,1), \\ (0.42776, 0.5129), & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Тем самым действие алгоритма 3.1 завершено.

Далее, предположим, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ нам были сообщены координаты цели $x^{(f)} = \left(1, \dfrac{5}{2}\right)$. Этим координатам соответствует параметр

$$\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*) = \left(\frac{1}{2}(x_1^{(f)} - 1), \frac{1}{2}(x_2^{(f)} - 2)\right) = \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

Для решения задачи о сближении выполним алгоритм 3.2.

1) По полученному $\alpha^*$ выбираем единственный $\alpha^{(1)} = (0,0)$.

2) В соответствии с замечанием 3.1 представляем в виде невыпуклой линейной комбинации

$$\alpha^* = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\Big(\frac{1}{2}\alpha^{(1,-,+)} + \frac{1}{2}\alpha^{(1,+,+)}\Big) + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\Big(\frac{1}{2}\alpha^{(1,-,-)} + \frac{1}{2}\alpha^{(1,+,-)}\Big).$$

3) В качестве искомого разрешающего управления используем функцию

$$\hat{u}(t) = \frac{1+\sqrt{2}}{4}u^{(1,-,+)}(t) + \frac{1+\sqrt{2}}{4}u^{(1,+,+)}(t) + \frac{1-\sqrt{2}}{4}u^{(1,-,-)}(t) + \frac{1-\sqrt{2}}{4}u^{(1,+,-)}(t)$$
$$= \begin{cases} (-0.55238, 0.25923), & t \in [0,1), \\ (0.24764, 0.45250), & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Найденное программное управление переведет систему (2.1) в точку $x_*^{(f)} = (1.122, 2.492)$. Полученная в примере погрешность является весьма малой относительно $\Delta = 1$ и $\Delta_\alpha = \sqrt{2}/8$, особенно с учетом того, что мы использовали невыпуклую линейную комбинацию для интерполяции. Ее величина свидетельствует о возможном выполнении условия E по части гладкости зависимости идеального вектора-компенсатора от параметра $\alpha$.

## 6. Заключение

Для простоты изложения в настоящей статье был рассмотрен случай двумерного параметра, однако принципиальных отличий от такой же задачи с постоянным векторным параметром произвольной размерности нет, за исключением определенных технических трудностей при формулировке и доказательстве аналога леммы 4.1, хотя оценка из следствия 4.1 справедлива для любой размерности. По сравнению с [11] было произведено значительное упрощение алгоритма: в новом алгоритме не вводится «обратное» время и не строятся дополнительные «узловые» разрешающие управления для точек внутри ячеек разбиения множества возможных значений параметра.

Заметим, что неудобно большая норма векторов-компенсаторов $w^{(1,1,-,+)}$ и $w^{(1,1,+,+)}$ в разобранном примере связана с большим расстоянием точки $\overline{\xi}^{(1,1)}$ от настоящего движения $\xi(1)$ системы (5.2), на преодоление которого ушло слишком много ресурсов управления. Решение этой проблемы может заключаться в замене метода Эйлера на метод Рунге-Кутта [17] при построении точек $\overline{x}^{(k,j)}$, а также в уменьшении $\Delta$. Однако, более существенной проблемой является непроверяемость условия E в существующей формулировке. В связи с этим, дальнейшие исследования можно направить на нахождение достаточных условий, заменяющих условие E, и примеров управляемых систем, для которых условие E гарантированно выполняется. Также необходимо исследовать численные способы нахождения вычисления функции $w = w(\widetilde{\alpha})$ из замечания 2.4.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Э.Б. Ли, Л. Маркус. *Основы теории оптимального управления.* М.: Наука. 1972.
2. Н.Н. Красовский. *Игровые задачи о встрече движений.* М.: Наука. 1970.
3. Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука. 1974.
4. V.M. Veliov. *Parametric and functional uncertainties in dynamic systems local and global relationship* // Computer Arithmetic and Enclosure Methods, North–Holland, Amsterdam (1992).
5. А.Б. Куржанский. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности.* М.: Наука. 1977.
6. А.А. Ершов, В.Н. Ушаков. *О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр* // Матем. сб. **208**:9, 56–99 (2017).
7. V.N. Ushakov, A.A. Ershov, A.V. Ushakov. *An Approach Problem with an Unknown Parameter and Inaccurately Measured Motion of the System* // IFAC-PapersOnLine **51**:32, 234–238 (2018).

8. М.С. Никольский. *Об одной задаче управления с неполностью известным начальным условием* // Прикл. матем. и информ. **51**, 16–23 (2016).
9. С.С. Лемак. *К вопросу о формировании позиционных стратегий дифференциальной игры в методе экстремального прицеливания Н.Н. Красовского* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 6, 61–65 (2015).
10. В.Н. Ушаков, А.Р. Матвийчук, Г.В. Паршиков. *Метод построения разрешающего управления задачи о сближении, основанный на притягивании к множеству разрешимости* // Тр. ИММ УрО РАН. **19**:2, 275—284 (2013).
11. А.А. Ершов. *Интерполяция программного управления по параметру в задаче о сближении* // Пробл. матем. анал. **113**, 17–27 (2022).
12. А. Брессан, Б. Пикколи. *Введение в математическую теорию управления.* М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2015.
13. С.Г. Михлин. *Курс математической физики.* М.: Наука. 1968.
14. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. *Численные методы.* М.: Лаборатория Базовых Знаний. 2001.
15. В.Н. Ушаков, А.А. Ершов. *К решению задач управления с фиксированным моментом окончания* // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. **26**:4, 543–564 (2016).
16. П.И. Лизоркин. *Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа.* М.: Наука. 1981.
17. А.О. Новикова. *Построение множеств достижимости двумерных нелинейных управляемых систем пиксельным методом* // Труды ПМИ. **50**, 62–82 (2015).

Александр Анатольевич Ершов,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16,
620108, г. Екатеринбург, Россия

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина,
ул. Мира, 19,
620002, г. Екатеринбург, Россия
E-mail: ale10919@yandex.ru