ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 15. № 2 (2023). С. 20-30.

УДК 517.9

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛАМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ю.Г. ВОРОНОВА, А.В. ЖИБЕР

Аннотация. Рассматривается проблема Гурса, посвященная классификации нелинейных гиперболических уравнений второго порядка интегрируемых методом Дарбу. В работе исследуется класс гиперболических уравнений с y-интегралом второго порядка, сводящихся дифференциальной подстановкой к уравнениям с y-интегралом первого порядка. Следует отметить, что уравнения Лэне содержатся в классе рассматриваемых нами уравнений. В работе приведен y-интеграл второго порядка для второго уравнения Лэне и найдена дифференциальная подстановка, связывающая это уравнение с одним из уравнений Мутара.

Рассмотрен класс нелинейных гиперболических уравнений, обладающих y-интегралами первого порядка и x-интегралами третьего порядка. Получены три условия, при выполнении которых уравнения данного класса обладают интегралами первого и третьего порядка. Найден вид таких уравнений и получены формулы для x- и y-интегралов. Также в статье приведены дифференциальные подстановки, связывающие уравнения Лэне.

Ключевые слова: инварианты Лапласа, x- и y-интегралы, дифференциальные подстановки.

Mathematics Subject Classification: 35Q51, 37K60

1. Введение

Для полной классификации нелинейных гиперболических уравнений

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

необходимо провести классификацию уравнений специального класса, которые не были исследованы в работе [1], а именно следующих уравнений:

$$u_{xy} = \frac{p - \varphi_u}{\varphi_{u_y}} u_x + \frac{q}{\varphi_{u_y}} \sqrt{u_x}. \tag{1.1}$$

Здесь p, q — функции переменных x, y, u, а φ — переменных x, y, u, u_y.

Так, в 1926 г. Лэне построил два уравнения (см. [2]–[4])

$$u_{xy} = \left(\frac{u_y}{u - x} + \frac{u_y}{u - y} \right) u_x + \frac{u_y}{u - x} \sqrt{u_x}, \tag{1.2}$$

$$u_{xy} = 2 \left[(u + Y)^2 + u_y + (u + Y)\sqrt{(u + Y)^2 + u_y} \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{u_x} + u_x}{u - x} - \frac{u_x}{\sqrt{(u + Y)^2 + u_y}} \right], \tag{1.3}$$

$Y = Y(y)$, обладающие y-интегралом второго порядка $\bar{w} = \bar{w}(x, y, u, u_y, u_{yy})$ и x-интегралом третьего порядка $w = w(x, y, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ ($D\bar{w} = 0$, $\bar{D}w = 0$). Здесь D (соответственно, $\bar{D}$) — оператор полного дифференцирования по x (соответственно, по y).

Yu.G. Voronova, A.V. Zhiber, On a class of hyperbolic equations with third-order integrals.

Поступила 13 сентября 2022 г.

Отметим, что уравнения (1.2) и (1.3) содержатся в классе уравнений (1.1). Действительно, при

$$q = \frac{1}{u-x}, \qquad p = \frac{1}{u-x} + \frac{1}{u-y}, \qquad \varphi = \ln u_y$$

уравнение (1.2) совпадает с уравнением (1.1), а при

$$p = q = \frac{1}{u-x}, \qquad \varphi = \ln\left[(u+Y) + \sqrt{u_y + (u+Y)^2}\right]$$

уравнение (1.1) переходит в (1.3).

В работе [5] доказано следующее утверждение:

Лемма 1.1. *Если уравнение* (1.1) *обладает y-интегралом второго порядка, то функция φ не зависит от переменной x.*

Следовательно y-интеграл представим в виде

$$\bar{W} = \bar{D}r + \beta(x, y, r)$$

и поэтому дифференциальная подстановка

$$r = \varphi(y, u, u_y) - h(x, y, u), \qquad p = h_u, \tag{1.4}$$

решения уравнения (1.1) переводит в решения уравнения

$$D\bar{D}r + D\beta = 0. \tag{1.5}$$

Приведем дифференциальные подстановки (1.4), уравнения (1.5) и интегралы для уравнений Лэне (см. [2]–[4]). Дифференциальная подстановка

$$r = \ln\frac{u_y}{(u-x)(u-y)} \tag{1.6}$$

связывает уравнение (1.2) с уравнением Мутара

$$r_{xy} + \frac{1}{2}(x-y)r_x e^r + \frac{1}{2}e^r = 0. \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) обладает x-интегралом третьего порядка

$$w = \frac{r_{xxx} - 3r_x \cdot r_{xx} + r_x^3}{r_{xx} - r_x^2}. \tag{1.8}$$

Тогда уравнение (1.2) имеет x-интеграл вида

$$W = \frac{z_x}{z} + z, \tag{1.9}$$

где

$$z = \frac{u_{xx}}{2(u_x + \sqrt{u_x})} - \frac{u_x + \sqrt{u_x}}{u-x}.$$

Также уравнение (1.2) обладает y-интегралом второго порядка:

$$\bar{W} = \frac{u_{yy}}{u_y} - \frac{u_y}{2}\left(\frac{1}{u-x} + \frac{3}{u-y}\right) + \frac{1}{u-y}.$$

Дифференциальная подстановка

$$r = \ln\left[\frac{u + Y(y) + \sqrt{u_y + (u+Y(y))^2}}{u-x}\right] \tag{1.10}$$

решения уравнения (1.3) переводит в решения уравнения

$$r_{xy} - \frac{d}{dx}\left[e^r(x + Y(y))\right] = 0. \tag{1.11}$$

Уравнение (1.11) обладает x-интегралом третьего порядка (1.8), а уравнение (1.3) интегралом (1.9), т.е. совпадает с x-интегралом уравнения (1.2).

Также найден y-интеграл уравнения (1.3) в виде

$$\begin{aligned}\bar{W} =&\frac{u_{yy}}{2u_y}\left(1-\frac{u+Y}{\sqrt{u_y+(u+Y)^2}}\right)\\ &-\frac{u_y+(u+Y)^2+(u+Y)\sqrt{u_y+(u+Y)^2}}{u-x}+u+\frac{(u+Y)^2+2u_y+Y'}{\sqrt{u_y+(u+Y)^2}}.\end{aligned}$$

Целью данной работы является описание уравнений (1.5), обладающих y-интегралом первого порядка и x-интегралом третьего порядка.

2. x-интегралы уравнения (1.5)

Исследуем уравнение (1.5), обладающее x-интегралами третьего порядка. Сделаем замену $r \to u$, $\beta \to -p$. Тогда уравнение (1.5) перепишется в виде

$$D\bar{D}u = Dp, \qquad p = p(x, y, u). \tag{2.1}$$

Для удобства изложения материала введем обозначения

$$u_1 = u_x, \quad u_2 = u_{xx}, \quad \dots, \quad \bar{u}_1 = u_y, \quad \bar{u}_2 = u_{yy}, \quad \dots .$$

Отметим, что y-интеграл уравнения (2.1) задается формулой

$$\bar{W} = \bar{u}_1 - p.$$

Пусть $W = W(x, y, u, u_1, u_2, u_3)$ — x-интеграл уравнения (2.1). Из выражения

$$\bar{D}W = W_y + W_u \cdot \bar{u}_1 + W_{u_1} \cdot Dp + W_{u_2} \cdot D^2 p + W_{u_3} \cdot D^3 p = 0, \tag{2.2}$$

ясно, что $W_u = 0$. Известно, что если существует интеграл порядка n, $n \geq 2$, то можно считать, что последний является линейным по старшей переменной. Положим

$$W = A(x, y, u_1, u_2) \cdot u_3 + B(x, y, u_1, u_2).$$

Выражение (2.2) перепишется в виде

$$A\left(p_u \cdot u_3 + 3p_{uu} \cdot u_1 u_2 + 3u_2 \cdot p_{ux} + u_1^3 \cdot p_{uuu} + 3u_1^2 \cdot p_{uux} + 3u_1 \cdot p_{xxu} + p_{xxx}\right) + \bar{D}B = 0$$

или

$$\bar{D}A + p_u A = 0, \tag{2.3}$$

$$A\left(3p_{uu}u_1u_2 + 3u_2p_{ux} + u_1^3p_{uuu} + 3u_1^2p_{uux} + 3u_1p_{xxu} + p_{xxx}\right) + \bar{D}B = 0. \tag{2.4}$$

Рассмотрим уравнение (2.3) и первый случай, когда $A = A(x, y)$. Тогда из выражения (2.3) находим, что

$$p = -\frac{A_y}{A} \cdot u + E(x, y).$$

С помощью замены $u = v + Q(x, y)$, где $-\frac{A_y}{A}Q + E - Q_y = 0$, мы получаем уравнение

$$D\bar{D}v = D\left(a(x, y) \cdot v\right), \tag{2.5}$$

в котором $a(x, y) = -\frac{A_y}{A}$.

Теперь перейдем к случаю, когда $A = A(x, y, u_1)$, $A_{u_1} \neq 0$. Из выражения (2.3) дифференцированием по переменной u_1 получаем, что

$$\bar{D}A_{u_1} + 2A_{u_1} \cdot p_u = 0$$

и учитывая, что $\bar{D}A + p_u A = 0$, будем иметь

$$p_u = -\frac{\bar{D}A}{A} = -\frac{1}{2}\frac{\bar{D}A_{u_1}}{A_{u_1}},$$

т.е.

$$\bar{D} \ln \frac{A_{u_1}}{A^2} = 0.$$

Так как мы рассматриваем x-интеграл третьего порядка, то

$$\frac{A_{u_1}}{A^2} = a(x), \quad a(x) \neq 0.$$

Откуда получаем, что
$$A = \frac{\tilde{a}(x)}{u_1 + b(x,y)}.$$
Можно считать, что $\tilde{a}(x) = 1$, а замена $u \to u - \int b(x,y)dx$, позволяет представить A в виде
$$A = \frac{1}{u_1}.$$
Из равенства (2.3) находим, что $p_x = 0$, т.е. в данном случае имеем
$$A = \frac{1}{u_1}, \qquad D\bar{D}u = Dp(y,u).$$

Осталось рассмотреть случай, когда $A = A(x,y,u_1,u_2)$, $A_{u_2} \neq 0$. Дифференцированием выражения (2.3) по переменной u_2 находим, что
$$\bar{D}A_{u_2} + 2p_u \cdot A_{u_2} = 0.$$
Откуда имеем
$$p_u = -\frac{\bar{D}A}{A} = -\frac{1}{2}\frac{\bar{D}A_{u_2}}{A_{u_2}}.$$
Тогда
$$A = \frac{1}{u_2 + b(x,y,u_1)}. \tag{2.6}$$
Подставим найденное A в (2.3), получим
$$p_{uu} \cdot u_1^2 + 2u_1 \cdot p_{ux} + p_{xx} + b_y + b_{u_1} \cdot Dp - p_u \cdot b = 0. \tag{2.7}$$
Откуда, дифференцированием по переменной u_1, находим
$$2p_{uu} \cdot u_1 + 2p_{ux} + \bar{D}b_{u_1} = 0.$$
Далее
$$\bar{D}b_{u_1u_1u_1} + 2p_u \cdot b_{u_1u_1u_1} = 0.$$
Если $b_{u_1u_1u_1} \neq 0$, то $p_u = -\frac{1}{2}\bar{D}\ln b_{u_1u_1u_1}$. А т.к. $p_u = -\bar{D}\ln A$, то
$$\bar{D}\left(\ln\frac{1}{u_2 + b} - \frac{1}{2}\ln b_{u_1u_1u_1}\right) = 0$$
и следовательно есть интеграл второго порядка, что противеречит предположению, что порядок x-интеграла равен три. Итак $b_{u_1u_1u_1} = 0$ и
$$b = \frac{\alpha}{2} \cdot u_1^2 + \gamma \cdot u_1 + \delta, \tag{2.8}$$
где α, γ, δ — функции переменных x и y. Подставим функцию (2.8) в уравнение (2.7). Получим равенства
$$p_{uu} + \frac{\alpha_y}{2} + \frac{\alpha}{2} \cdot p_u = 0, \tag{2.9}$$
$$2p_{ux} + \gamma_y + \alpha \cdot p_x = 0, \tag{2.10}$$
$$p_{xx} + \delta_y + \gamma \cdot p_x - \delta \cdot p_u = 0. \tag{2.11}$$
Решение уравнения (2.9) дается формулой
$$p = -\frac{2}{\alpha}Ce^{-\frac{\alpha}{2}u} - \frac{\alpha_y}{\alpha}u + \kappa(y), \tag{2.12}$$
при $\alpha \neq 0$.

Если $\alpha = 0$, то $p_{uu} = 0$, $p_u = \mu(x,y)$ и
$$\bar{D}\left(\ln A + \int \mu dy\right) = 0,$$
т.е. существует x-интеграл второго порядка.

Таким образом, если функция $A = A(x,y,u_1,u_2)$, то верны формулы (2.6), (2.8), (2.9)–(2.12).

Для того чтобы упростить вид функции p в (2.12), в уравнении (2.1) сделаем замену
$$u = \beta(y) \cdot v + \mu(x,y).$$

После несложных преобразований, получим уравнение ($v \to u$)

$$D\bar{D}u = D(e^u + d(x,y)),$$

где $p = e^u + d(x,y)$. Тогда условия (2.9)–(2.11) примут вид

$$\alpha = -2, \qquad \delta = 0, \qquad \gamma_{xy} = -\gamma \cdot \gamma_y, \qquad d_x = \frac{1}{2}\gamma_y.$$

Доказано следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть уравнение* (2.1) *имеет x-интеграл третьего порядка*

$$W = A(x,y,u_1,u_2) \cdot u_3 + B(x,y,u_1,u_2).$$

Тогда выполнено одно из условий

$$A = A(x,y), \quad p = a(x,y) \cdot u, \quad a = -\frac{A_y}{A}, \tag{2.13}$$

$$A = \frac{1}{u_1}, \quad p = p(y,u), \tag{2.14}$$

$$A = \frac{1}{u_2 + b}, \quad b = -u_1^2 + \gamma u_1, \quad p = e^u + d(x,y), \tag{2.15}$$

$$\gamma_{xy} = -\gamma \cdot \gamma_y, \quad d_x = \frac{1}{2}\gamma_y.$$

При выполнении условий (2.13)–(2.15) *выполнено равенство* (2.3) *и обратно, условие* (2.3) *сводится к одному из* (2.13), (2.14), (2.15).

Далее рассмотрим уравнение (2.4) в случае (2.13):

$$A \cdot (3u_2 \cdot a_x + 3u_1 \cdot a_{xx} + a_{xxx} \cdot u) + \bar{D}B = 0. \tag{2.16}$$

Из (2.16) дифференцированием по переменной u_2 получаем

$$3a_x \cdot A + \bar{D}B_{u_2} + a \cdot B_{u_2} = 0,$$
$$\bar{D}B_{u_2 u_2} + 2a \cdot B_{u_2 u_2} = 0.$$

Отметим, что $a_x \neq 0$. Если $a_x = 0$, то $B = B(x)$ и существует x-интеграл первого порядка $W = A \cdot u_1$. Также $B_{u_2} \neq 0$, иначе $a_x = 0$.

Если $B_{u_2 u_2} = 0$, то

$$B = \alpha(x,y,u_1) \cdot u_2 + \beta(x,y,u_1). \tag{2.17}$$

После подстановки (2.17) в выражение (2.16) получим соотношения

$$3A \cdot a_x + \alpha \cdot a + \alpha_y + \alpha_{u_1}(a_x \cdot u + a \cdot u_1) = 0, \tag{2.18}$$

$$A \cdot a_{xxx} + \alpha \cdot a_{xx} + a_x \cdot \beta_{u_1} = 0, \tag{2.19}$$

$$3A \cdot a_{xx} \cdot u_1 + 2\alpha \cdot a_x \cdot u_1 + \beta_y + \beta_{u_1} \cdot a \cdot u_1 = 0. \tag{2.20}$$

Так как $a_x \neq 0$, то $\alpha_{u_1} = 0$, т.е. $\alpha = \alpha(x,y)$ и выражение (2.18) перепишется в виде

$$3A \cdot a_x + \alpha \cdot a + \alpha_y = 0. \tag{2.21}$$

Из (2.19) находим

$$\beta = -\frac{1}{a_x}\left(A \cdot a_{xxx} + \alpha \cdot a_{xx}\right) \cdot u_1 + \gamma(x,y). \tag{2.22}$$

Тогда выражение (2.20) примет вид

$$3A \cdot a_{xx} + 2\alpha \cdot a_x - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{a_x}\left(Aa_{xxx} + \alpha a_{xx}\right)\right] - a\left[\frac{1}{a_x}\left(Aa_{xxx} + \alpha a_{xx}\right)\right] = 0 \tag{2.23}$$

и $\gamma_y = 0$. Так как $W = Au_3 + \alpha u_2 + \beta$, то можно считать, что $\gamma \equiv 0$.

Из уравнения (2.23) находим α в виде

$$\alpha = -\frac{\left(6a_{xx} - \left(\frac{a_{xxx}}{a_x}\right)'_y\right) \cdot A}{2a_x - \left(\frac{a_{xx}}{a_x}\right)'_y}, \tag{2.24}$$

знаменатель $2a_x - \left(\frac{a_{xx}}{a_x}\right)'_y \neq 0$, так как иначе существует x-интеграл второго порядка $W = A\left(u_2 - \frac{a_{xx}}{a_x}u_1\right)$.

Итак, из (2.21), (2.22) и (2.24) следует, что x-интеграл третьего порядка в случае, когда $B_{u_2u_2} = 0$, можно представить в виде

$$W = e^{-b}\cdot\left(u_3 - \frac{E}{Fa_x}(a_xu_2 - a_{xx}u_1) - \frac{a_{xxx}}{a_x}u_1\right),$$

где $b_y = a$, $E = 6a_{xx} - \left(\frac{a_{xxx}}{a_x}\right)'_y$, $F = 2a_x - \left(\frac{a_{xx}}{a_x}\right)'_y$ и выполняется условие

$$\frac{E}{F} - 3b_x + \kappa(x) = 0, \tag{2.25}$$

где $\kappa(x)$ — произвольная функция.

Теперь, пусть $B_{u_2u_2} \neq 0$. Тогда

$$\bar{D}\ln B_{u_2u_2} = -2a = 2\frac{A_y}{A}$$

или

$$B_{u_2u_2} = \gamma(x)\cdot A^2,$$

или

$$B = \frac{\gamma(x)}{2}A^2u_2^2 + \varepsilon(x,y,u,u_1)u_2 + \mu(x,y,u,u_1),$$

$\gamma \neq 0$. Далее,

$$W = Au_3 + \frac{\gamma}{2}A^2u_2^2 + \varepsilon u_2 + \mu$$

и исполузуя замену $\gamma\cdot A \to A$, интеграл можно переписать в виде

$$W = Au_3 + \frac{1}{2}A^2u_2^2 + \varepsilon u_2 + \mu,$$

где ε, μ — функции, переменных x, y, u, u_1. Таким образом

$$B = \frac{A^2}{2}u_2^2 + \varepsilon u_2 + \mu. \tag{2.26}$$

Теперь запишем условие (2.16) для функции B (2.26). Получим соотношения

$$\varepsilon_u = 0, \qquad \mu_u = 0,$$

$$A^2a_{xx} + \varepsilon_{u_1}a_x = 0, \tag{2.27}$$

$$3Aa_x + 2A^2a_xu_1 + \varepsilon_y + \varepsilon_{u_1}au_1 + \varepsilon a = 0, \tag{2.28}$$

$$Aa_{xxx} + \varepsilon a_{xx} + \mu_{u_1}a_x = 0, \tag{2.29}$$

$$3Aa_{xx}u_1 + 2\varepsilon a_xu_1 + \mu_y + \mu_{u_1}au_1 = 0. \tag{2.30}$$

Отметим, что $a_x \neq 0$. Далее, из (2.27) находим

$$\varepsilon = -A^2\cdot\frac{a_{xx}}{a_x}\cdot u_1 + \delta(x,y), \tag{2.31}$$

а из (2.29)

$$\mu = \left(\frac{a_{xx}}{a_x}\right)^2\frac{A^2}{2}u_1^2 - \left(A\frac{a_{xxx}}{a_x} + \frac{a_{xx}}{a_x}\delta\right)u_1 + \gamma(x,y). \tag{2.32}$$

В силу (2.31), (2.32) соотношения (2.28), (2.30) перепишутся в виде

$$3Aa_x + \delta_y + a\delta = 0, \tag{2.33}$$

$$2A^2a_x - \left(A^2\frac{a_{xx}}{a_x}\right)'_y - 2aA^2\frac{a_{xx}}{a_x} = 0, \tag{2.34}$$

$$3Aa_{xx} + 2a_x\delta - \left(A\frac{a_{xxx}}{a_x} + \frac{a_{xx}}{a_x}\delta\right)'_y - a\left(A\frac{a_{xxx}}{a_x} + \frac{a_{xx}}{a_x}\delta\right) = 0, \tag{2.35}$$

$$-2A^2a_{xx} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_{xx}}{a_x}A\right)^2\right]'_y + a\left(\frac{a_{xx}}{a_x}A\right)^2 = 0, \tag{2.36}$$

$\gamma_y = 0$. Можно считать, что $\gamma(x) \equiv 0$. После несложных преобразований, соотношения (2.33)–(2.36) можно представить в виде

$$3Aa_x + \delta_y + a\delta = 0,$$

$$2a_x - \left(\frac{a_{xx}}{a_x}\right)'_y = 0,$$

$$6a_{xx} - \left(\frac{a_{xxx}}{a_x}\right)'_y = 0.$$

Но, если $2a_x - \left(\frac{a_{xx}}{a_x}\right)'_y = 0$, то исходное уравнение (2.1) имеет x-интеграл второго порядка $W = A\left(u_2 - \frac{a_{xx}}{a_x}u_1\right)$, $a = -\frac{A_y}{A}$. Так как мы ищем x-интеграл третьего порядка, то данный случай не реализуется.

Перейдем к рассмотрению случая (2.14). Уравнение (2.4) запишется в виде

$$3p_{uu}u_2 + u_1^2p_{uuu} + B_y + B_{u_1}(p_uu_1) + B_{u_2}(p_uu_2 + p_{uu}u_1^2) = 0. \tag{2.37}$$

Откуда, дифференцированием по переменной u_2, получим

$$3p_{uu} + \bar{D}B_{u_2} + p_u \cdot B_{u_2} = 0. \tag{2.38}$$

Если $B_{u_2} = 0$, тогда $p_{uu} = 0$, т.е. $p = \alpha(y)u + \beta(y)$. В этом случае существует x-интеграл первого порядка $W = \gamma(y) \cdot u_1$, где $\gamma' + \gamma \cdot \alpha = 0$.

Теперь, пусть $B_{u_2} \neq 0$, $B_{u_2u_2} = 0$, т.е.

$$B = \alpha(x, y, u_1) \cdot u_2 + \beta(x, y, u_1).$$

Выражение (2.37) примет вид:

$$3p_{uu} + \alpha_y + \alpha_{u_1}p_uu_1 + \alpha p_u = 0, \tag{2.39}$$

$$u_1^2p_{uuu} + \alpha p_{uu}u_1^2 + \bar{D}\beta = 0. \tag{2.40}$$

Из (2.39) дифференцированием по переменной u_1, получим:

$$\bar{D}\alpha_{u_1} + 2p_u \cdot \alpha_{u_1} = 0.$$

Если $\alpha_{u_1} = 0$, то $\alpha = \alpha(x, y)$ и

$$3p_{uu} + \alpha_y + \alpha \cdot p_u = 0. \tag{2.41}$$

Решение уравнения (2.41) дается формулой

$$p = -\frac{\alpha_y}{\alpha} \cdot u - 3\frac{\kappa(x, y)}{\alpha} \cdot e^{-\frac{1}{3}\alpha u} + \mu(x, y).$$

Далее, так как $p_x = 0$, то имеем либо

$$\kappa = 0, \quad \frac{\alpha_y}{\alpha} = \delta(y), \quad \mu = \mu(y),$$

$$p = -\delta(y) \cdot u + \mu(y), \tag{2.42}$$

либо

$$\kappa = \kappa(y) \neq 0, \quad \frac{\alpha_y}{\alpha} = \delta(y), \quad \alpha = \alpha(y), \quad \mu = \mu(y),$$

$$p = -\delta(y)\cdot u - 3\frac{\kappa(y)}{\alpha(y)}\cdot e^{-\frac{1}{3}\alpha u} + \mu(y). \qquad (2.43)$$

В случае (2.39), (2.40), (2.42) существует x-интеграл первого порядка $W = \gamma(y)\cdot u_1$. А в случае (2.39), (2.40), (2.43) существует x-интеграл второго порядка $W = \frac{u_2}{u_1} + \frac{\alpha(y)}{3}\cdot u_1$. Таким образом, данные случаи не реализуются.

Если $\alpha_{u_1} \neq 0$, то

$$\bar{D}\ln\alpha_{u_1} + 2p_u = 0$$

или

$$\bar{D}\ln\alpha_{u_1} + 2\bar{D}\ln u_1 = 0.$$

Откуда

$$\alpha = -\frac{\varepsilon(x)}{u_1} + \gamma(x,y). \qquad (2.44)$$

Теперь (2.39), с учетом (2.44), примет вид

$$3p_{uu} + \gamma_y + \gamma p_u = 0. \qquad (2.45)$$

Так как $p_x = 0$, то $\gamma = \gamma(y)$. Уравнение (2.45) совпадает с (2.41) ($\alpha \to \gamma$). Значит данный случай также не реализуется.

И, наконец, рассмотрим случай, когда $B_{u_2u_2} \neq 0$. Из уравнения (2.38), дифференцированием по переменной u_2, получаем

$$\bar{D}B_{u_2u_2} + 2p_u\cdot B_{u_2u_2} = 0$$

или

$$\bar{D}\ln B_{u_2u_2} + 2\bar{D}\ln u_1 = 0.$$

Откуда

$$B = \alpha(x)\cdot\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 + \beta(x,y,u_1)\cdot u_2 + \gamma(x,y,u_1). \qquad (2.46)$$

После подстановки (2.46) в (2.37), имеем

$$(3+2\alpha)\cdot p_{uu} + (\beta + u_1\beta_{u_1})\cdot p_u + \beta_y = 0, \qquad (2.47)$$

$$u_1^2\cdot p_{uuu} + \gamma_y + p_u\cdot u_1\cdot\gamma_{u_1} + p_{uu}\cdot u_1^2\cdot\beta = 0. \qquad (2.48)$$

Тогда $\frac{\partial}{\partial u_1}(\beta + u_1\beta_{u_1}) = 0$, иначе $p_{uu} = 0$ и $B_{u_2} = 0$. Найдем

$$\beta = \varepsilon(x,y) + \frac{\delta(x,y)}{u_1}$$

и подставим выражение для β в (2.47), получим, что $\delta_y = 0$ и

$$(3 + 2\alpha(x))\cdot p_{uu} + \varepsilon(x,y)\cdot p_u + \varepsilon_y = 0.$$

Если $3 + 2\alpha = 0$, то $\varepsilon = 0$ и $\beta = \frac{\delta(x)}{u_1}$. Теперь рассмотрим (2.48):

$$u_1^2\cdot p_{uuu} + \gamma_y + \gamma_{u_1}\cdot u_1\cdot p_u + p_{uu}\cdot u_1\cdot\delta = 0.$$

При $\delta(x) \neq 0$ имеем

$$p_{uu} = c_1p_u + c_2, \quad p_{uuu} = a_1p_u + a_2, \quad c_i = c_i(y), \quad a_i = a_i(y), \quad i = 1,2.$$

Так как $p_u \neq 0$, то $c_1^2 = a_1$, $c_1c_2 = a_2$ и

$$p_{uu} = c_1p_u + c_2, \quad p_{uuu} = c_1^2p_u + c_1c_2. \qquad (2.49)$$

После подстановки (2.49) в равенство (2.48), получим следующие соотношения

$$\gamma_{u_1} = -c_1^2u_1 - c_1\delta, \quad \gamma_y = -c_1c_2u_1^2 - c_2\delta u_1.$$

Откуда следует, что $c_1' = c_2$. Тогда

$$p_{uu} = c_1p_u + c_1', \quad p_{uuu} = c_1^2p_u + c_1c_1'.$$

В этом случае уравнение (2.1) обладает x-интегралом второго порядка $W = \frac{u_2}{u_1} - c_1(y)\cdot u_1$. Т.е. данный случай нам не подходит.

Пусть $\delta(x) = 0$, тогда $\beta = 0$ и соотношение (2.48) примет вид

$$p_{uuu} + \frac{\gamma_y}{u_1^2} + \frac{\gamma_{u_1}}{u_1} \cdot p_u = 0.$$

Тогда

$$\frac{\gamma_{u_1}}{u_1} = \mu(x,y), \quad \frac{\gamma_y}{u_1^2} = \kappa(x,y), \tag{2.50}$$
$$p_{uuu} + \kappa(x,y) + \mu(x,y) \cdot p_u = 0.$$

Так как $p_x = 0$, то $\mu_x = 0$ и $\kappa_x = 0$. Из (2.50) следует, что $\mu' = 2\kappa$, $\gamma = \frac{\mu(y)}{2} u_1^2$ и

$$p_{uuu} + \mu(y) \cdot p_u + \frac{1}{2}\mu'(y) = 0.$$

В этом случае x-интеграл третьего порядка представим в виде

$$W = \frac{u_3}{u_1} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 + \frac{\mu(y)}{2} \cdot u_1^2.$$

Далее, пусть $3 + 2\alpha \neq 0$. Тогда из уравнения (2.47) получим, что

$$\frac{\beta + u_1\beta_{u_1}}{3 + 2\alpha(x)} = \mu(y), \qquad \frac{\beta_y}{3 + 2\alpha(x)} = \kappa(y), \tag{2.51}$$
$$p_{uu} + \mu(y) \cdot p_u + \kappa(y) = 0.$$

Из соотношений (2.51) находим $\mu'(y) = \kappa(y)$. Данный случай не реализуется так как уравнение (2.1) обладает x-интегралом $W = \frac{u_2}{u_1} - \mu(y) \cdot u_1$.

И, наконец, рассмотрим последний случай (2.15). Сделаем замену

$$B = A \cdot C,$$

тогда, в силу (2.3), $\bar{D}B = A \cdot (\bar{D}C - e^u \cdot C)$ и уравнение (2.4) примет вид

$$3e^u \cdot u_1 u_2 + u_1^3 \cdot e^u + d_{xxx} + \bar{D}C - e^u \cdot C = 0. \tag{2.52}$$

Откуда

$$\bar{D}C_{u_2u_2} + e^u \cdot C_{u_2u_2} = 0. \tag{2.53}$$

Если $C_{u_2u_2} = 0$, то есть $C = \alpha(x,y,u_1) \cdot u_2 + \beta(x,y,u_1)$, из соотношения (2.52) получим равенства

$$3u_1 + u_1 \cdot \alpha_{u_1} = 0, \tag{2.54}$$
$$u_1^3 + \alpha \cdot u_1^2 + u_1 \cdot \beta_{u_1} - \beta = 0, \tag{2.55}$$
$$\alpha_y + \alpha_{u_1} \cdot d_x = 0, \tag{2.56}$$
$$d_{xxx} + \alpha \cdot d_{xx} + \beta_y + \beta_{u_1} \cdot d_x = 0. \tag{2.57}$$

Из (2.54), (2.56) находим α в виде

$$\alpha = -3u_1 + 3 \cdot \int d_x(x,y)dy.$$

А из уравнений (2.55), (2.57) нетрудно получить, что

$$\beta = u_1^3 - \varepsilon \cdot u_1^2 + \mu(x,y) \cdot u_1,$$

где

$$\mu = -\frac{d_{xxx}}{d_x} + 3\frac{d_{xx}}{d_x} \cdot \int d_x(x,y)dy,$$

а также выполнено соотношение

$$\left(\frac{d_{xx}}{d_x}\right)'_y + 2d_x = 0.$$

Тогда x-интеграл третьего порядка примет вид

$$W = \frac{1}{u_2 - u_1^2 - \frac{d_{xx}}{d_x}u_1}\left(u_3 - 3u_1u_2 + u_1^3 - \frac{d_{xxx}}{d_x}u_1\right) + 3\int d_x(x,y)dy,$$

при этом
$$d_{xy} + 2d \cdot d_x = \varepsilon(y) \cdot d_x.$$
Остался случай, когда $C_{u_2u_2} \neq 0$. Из равенства (2.53) находим, что
$$C_{u_2u_2} = \frac{\varphi(x)}{u_2 + b}, \qquad \varphi(x) \neq 0.$$
Тогда
$$C = \varphi(x) \cdot ((u_2 + b) \cdot \ln(u_2 + b) - u_2) + \alpha(x, y, u_1)u_2 + \beta(x, y, u_1).$$
Подставим последнее выражение для C в уравнение (2.54), получим, что $\varphi(x) = 0$, противоречие. Таким образом, данный случай не реализуется. В итоге доказана следующая

Теорема 2.1. *Если уравнение* (2.1) *обладает x-интегралом третьего порядка и y-интегралом первого порядка $\bar{W} = \bar{u}_1 - p$, то реализуется один из следующих трех случаев:*

1) $\quad p = a(x, y) \cdot u, \qquad W = e^{-b} \cdot \left(u_3 - \dfrac{E}{Fa_x}(a_x u_2 - a_{xx} u_1) - \dfrac{a_{xxx}}{a_x} u_1\right),$

где $\quad b_y = a, \quad E = 6a_{xx} - \left(\dfrac{a_{xxx}}{a_x}\right)'_y, \quad F = 2a_x - \left(\dfrac{a_{xx}}{a_x}\right)'_y$ *и выполняется условие* (2.25).

2) $\quad p_{uuu} + \mu(y) \cdot p_u + \dfrac{1}{2}\mu'(y) = 0, \qquad W = \dfrac{u_3}{u_1} - \dfrac{3}{2} \cdot \left(\dfrac{u_2}{u_1}\right)^2 + \dfrac{\mu(y)}{2} \cdot u_1^2,$

3) $\quad p = e^u + d(x, y), \qquad d_{xy} + 2d \cdot d_x = \varepsilon(y) \cdot d_x,$

$$W = \frac{1}{u_2 - u_1^2 - \frac{d_{xx}}{d_x} u_1}\left(u_3 - 3u_1u_2 + u_1^3 - \frac{d_{xxx}}{d_x} u_1\right) + 3\int d_x(x, y)dy,$$

где $\mu(y)$, $\varepsilon(y)$ — произвольные функции.

3. Дифференциальные подстановки уравнений Лэне (1.2), (1.3)

В данном параграфе рассмотрим дифференциальные подстановки, связывающие уравнения (1.2), (1.3). Для этого в уравнении (1.2) заменим переменную y на z:
$$u_{xz} = \left(\frac{u_z}{u - x} + \frac{u_z}{u - z}\right) u_x + \frac{u_z}{u - x}\sqrt{u_x}. \tag{3.1}$$
Данное уравнение дифференциальной подстановкой
$$r = \ln \frac{u_z}{(u - x)(u - z)} \tag{3.2}$$
сводится к уравнению Мутара:
$$D\bar{D}r = \frac{1}{2} D\left[e^r(z - x)\right]. \tag{3.3}$$
А второе уравнение Лэне
$$v_{xy} = 2\left[(v + Y)^2 + v_y + (v + Y)\sqrt{(v + Y)^2 + v_y}\right] \times \left[\frac{\sqrt{v_x} + v_x}{v - x} - \frac{v_x}{\sqrt{(v + Y)^2 + v_y}}\right] \tag{3.4}$$
дифференциальной подстановкой
$$s = \ln\left[\frac{v + Y(y) + \sqrt{v_y + (v + Y(y))^2}}{v - x}\right] \tag{3.5}$$
сводится к уравнению
$$D\bar{D}s = D\left[e^s(x + Y(y))\right]. \tag{3.6}$$
Покажем, что уравнения (3.6) и (3.3) связаны между собой. Положим
$$z = -Y(y),$$
тогда
$$s(x, y) = q(x, z).$$

Уравнение (3.6) перепишем в виде:

$$q_{xz} = D\left[(z-x)e^{q-\ln Y'(y)}\right].$$

Положим $\ln Y'(y) = a(z)$,

$$r = q - a(z) + \ln 2. \tag{3.7}$$

Тогда получаем уравнение (3.3)

$$r_{xz} = \frac{1}{2}D\left[e^r(z-x)\right].$$

Далее, подставим (3.2) в выражение (3.7)

$$\ln\frac{u_z}{(u-x)(u-z)} = q - \ln Y' + \ln 2,$$

заменим $z = -Y(y)$, тогда

$$s = \frac{u_y}{2(x-u)(u+Y)}.$$

С учетом (3.5), получим

$$\frac{u_y}{2(x-u)(u+Y(y))} = \frac{v+Y(y)+\sqrt{v_y+(v+Y(y))^2}}{v-x}. \tag{3.8}$$

Продифференцируем выражение (3.8) по x и заменим u_{xz} и v_{xy} в силу уравнений (3.1) и (3.4). Получим соотношение

$$\frac{\sqrt{u_x}+1}{u-x} = \frac{\sqrt{v_x}+1}{v-x}. \tag{3.9}$$

Таким образом, получили что уравнения (3.1) и (3.4) связаны дифференциальной подстановкой (3.8), (3.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.В. Жибер, В.В. Соколов. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* // УМН. **56**:1, 63–106 (2001).
2. О.В. Капцов. *Методы интегрирования уравнений с частными производными* // М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009.
3. О.В. Капцов. *О проблеме классификации Гурса* // Программирование. **2**, 68–71 (2012).
4. M.E. Laine. *Sur l'application de la méthode de Darboux aux équations* $s = f(x, y, z, p, q)$ // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. **182**, 1127–1128 (1926).
5. А.В. Жибер, А.М. Юрьева. *Гиперболические уравнения лиувиллевского типа специального класса* // Дифференциальные уравнения, Математ. физика. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. ВИНИТИ РАН, Москва. **137**, 17–25 (2017).

Юлия Геннадьевна Воронова,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `mihaylovaj@mail.ru`

Анатолий Васильевич Жибер,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `zhiber@mail.ru`