

УДК 517.53

О СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В КЛАССЕ КАРЛЕМАНА

Р.А. ГАЙСИН

Аннотация. Исследуются вопросы, связанные с теоремами типа Левинсона-Шёберга-Волфа в комплексном анализе, в частности, обсуждается известный вопрос, поставленный в 70-е годы Е.М. Дынькиным об эффективной оценке мажоранты роста аналитической функции вблизи множества особых точек и другая близкая проблема о скорости стремления к нулю экстремальной функции в неквазианалитическом классе Карлемана в окрестности точки, где все производные функций из этого класса обращаются в нуль. Точные асимптотические оценки наилучшей мажоранты роста вблизи особенностей были найдены В. Мацаевым и М. Содиным в 2002 году.

Некоторые оценки (как сверху, так и снизу) для экстремальной функции в классе Карлемана в 2018 году были получены А.М. Гайсиным, но они оказались не очень близкими к истинной величине этой функции. В настоящей статье получены точные двусторонние оценки для экстремальной функции.

Ключевые слова: неквазианалитический класс Карлемана, теоремы типа Левинсона-Шёберга, экстремальная функция, регулярная последовательность, ассоциированный вес.

Mathematical Subject Classification: 26E10, 28A10.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1938 г. Н. Левинсон доказал теорему (см. [1]), представляющую собой глубокое обобщение принципа максимума модуля для аналитических функций (см. [2]). Этот результат сыграл важную роль в теории квазианалитических функций (см. [3]–[7]).

Теорема 1.1 (Н. Левинсон). Пусть $M(y)$ положительная, монотонно убывающая в полуинтервале $(0, b]$ функция, $M(y) \uparrow \infty$ при $y \downarrow 0$, $M(b) = e$. Пусть, далее, F_M — семейство функций, аналитических в прямоугольнике

$$P = \{z = x + iy : |x| < a, |y| < b\},$$

удовлетворяющих в P оценке $|F(z)| \leq M(|y|)$. Если

$$\int_0^b \ln \ln M(y) dy < \infty, \quad (1.1)$$

то для любого $\delta > 0$ существует постоянная C , зависящая только от δ и $M(y)$, такая, что для всех функций $f \in F_M$ в прямоугольнике

$$P_\delta = \{z = x + iy : |x| < a - \delta, |y| < b\}$$

справедлива оценка $|F(z)| \leq C$.

R. A. GAISIN, ON RATE OF DECREASING OF EXTREMAL FUNCTION IN CARLEMAN CLASS.

© Гайсин Р.А. 2023.

Поступила 12 декабря 2022 г.

Отметим, что независимо от Н. Левинсона, видимо, одновременно с ним, эту теорему в несколько иной форме доказал Н. Шёберг (см. [8]). Однако гораздо раньше Т. Карлеманом была получена (см. [9])

Теорема 1.2 (Т. Карлеман). *Предположим, что $M(\varphi)$ положительная на интервале $(0, 2\pi)$ функция, такая, что $\ln M(\varphi) > 1$ и интеграл*

$$\int_0^{2\pi} \ln \ln M(\varphi) d\varphi$$

сходится. Тогда всякая целая функция $f(z)$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(z)| \leq M(\varphi), \quad \varphi = \arg z, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

есть постоянная: $f(z) \equiv \text{const}$.

Именно этот результат Т. Карлемана в дальнейшем был развит Н. Левинсоном и Н. Шёбергом, которые распространили его на самый общий случай. Однако отметим, что теорема Т. Карлемана верна без каких-либо дополнительных ограничений на мажоранту $M(\varphi)$. Позже Ф. Вольф перенес теорему Левинсона-Шёберга на более широкий класс функций (см. [10]). В [2] предложено иное, более простое доказательство теоремы 1.1.

Приведем одну из версий данной теоремы (см. [11], [12]).

Теорема 1.3 (Я. Домар). *Пусть $D = \{z = x + iy : -a < x < a, 0 < y < b\}$, $M(y)$ — измеримая по Лебегу функция, $M(y) \geq e$ при $0 < y < b$. Если сходится интеграл (1.1), то существует убывающая функция $m(\delta)$, зависящая только от $M(y)$ и конечная для $\delta > 0$, такая, что если $f(z)$ аналитична в D и*

$$|f(z)| \leq M(\text{Im } z), \tag{1.2}$$

то

$$|f(z)| \leq m(\text{dist}(z, \partial D)), \quad z \in D.$$

Следствие 1.1. *Пусть $J = \{f\}$ — семейство аналитических в D функций, удовлетворяющих условию (1.2). Если интеграл (1.1) сходится, то семейство функций J является нормальным (т.е. относительно компактным).*

Как показано П. Кусисом, условие (1.1) для справедливости теоремы Н. Левинсона является и необходимым (см. [11]): если интеграл (1.1) расходится, то существует последовательность полиномов $P_n(z)$, таких, что:

1) $|P_n(z)| \leq KM(|y|)$, $K = \text{const}$, $n \geq 1$, для всех z из прямоугольника

$$P = \{z = x + iy : |x| < a, |y| < b\};$$

2) при $n \rightarrow \infty$

$$P_n(z) \rightarrow F(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \in P \cap \mathbb{C}_+; \\ -1, & \text{если } z \in P \cap \mathbb{C}_-. \end{cases}$$

Здесь $\mathbb{C}_+ = \{z = x + iy : y > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z = x + iy : y < 0\}$.

Отметим, что при некоторых дополнительных ограничениях на поведение функции $M(y)$ аналогичное утверждение доказано Н. Левинсоном в [1]. А в [12] показано, что в теореме Н. Левинсона условие монотонности функции $M(y)$ можно заменить на измеримость этой функции по Лебегу.

В [7] получено обобщение теоремы Н. Левинсона на случай, когда вместо вещественного отрезка $[-a, a]$ берется некоторая спрямляемая дуга γ , а именно — дуга ограниченного наклона.

Пусть E — компакт в \mathbb{R} , M — мажоранта из теоремы Н. Левинсона, для которой выполняется билогарифмическое условие (1.1). В [4] вводится совокупность $F_E^0(M)$ функций f , определенных и аналитических вне E , таких, что

$$|f(z)| \leq M(|\operatorname{Im} z|), \quad z \in \mathbb{C} \setminus E.$$

В данной оценке M — любая убывающая на $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ функция, совпадающая с мажорантой из теоремы 1.1 на $(0, b]$. В дальнейшем будем считать, что $M(y) \downarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$.

Согласно теореме 1.1, множество $F_E^0(M)$ нормально, т.е. для всякого $\delta > 0$

$$M^*(\delta) = \sup \{ |f(z)| : f \in F_E^0(M), \rho(z, E) \geq \delta \} < \infty.$$

Здесь $\rho(z, E) = \inf_{\xi \in E} |z - \xi|$, $z \in \mathbb{C}$.

Таким образом, M^* — наименьшая функция, для которой

$$|f(z)| \leq M^*(\rho(z, E)), \quad z \in \mathbb{C} \setminus E,$$

для всех $f \in F_E^0(M)$. Можно считать, для определенности, что E — отрезок $I = [0, 1]$.

В [4] поставлена задача (проблема 1) получить «эффективную оценку для мажоранты M^* ».

Предположим, что функция M логарифмически выпукла, т.е. $\ln M(e^{-\sigma})$ — выпуклая функция от σ . Положим

$$M_n = \sup_{\delta > 0} \frac{n!}{M(\delta)\delta^{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Тогда, как известно, класс Карлемана на отрезке I

$$C_I(M_n) = \{ f : \|f^{(n)}\| \leq cK_f^n M_n, \quad n \geq 0 \},$$

$\|f\| = \max_I |f(x)|$, квазианалитичен тогда и только тогда, когда расходится интеграл (1.1) (см. [4]). Через $C_I^N(M_n)$ далее будем обозначать нормированный класс — $C_I(M_n)$ с постоянными $c = 1$, $K_f = 1$. Следуя работе [4], введем также обозначение

$$P(\delta) = \sup \{ |f(\delta)| : f \in C_I^N(M_n), \quad f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0, \quad n \geq 0 \}, \quad 0 < \delta \leq 1.$$

Как утверждается в работе [6] (см. замечание к теореме 3), задача об эффективной оценке мажоранты «в форме $M^* \simeq P^{-1}$ с неизвестной величиной P была установлена в [4]». Здесь и далее запись $M^* \simeq P^{-1}$ означает, что

$$AP^{-1}(a\delta) \leq M^*(\delta) \leq BP^{-1}(b\delta) \tag{1.3}$$

($0 < a < b$, $0 < A < B$ — некоторые постоянные). Отметим, что оценки (1.3) в [4] не выписаны, а доказана только нижняя оценка. Доказательство верхней оценки в тех же неравенствах в [4] не приведено. В [13] показано, что оценки типа (1.3) на самом деле имеют место не для функции M^* , а для так называемого ассоциированного веса.

Как и в работе [4], здесь рассматриваются только регулярные последовательности $\{M_n\}$, т.е. такие, что числа $m_n = \frac{M_n}{n!}$ удовлетворяют условиям:

- 1) $m_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty;$
- 2) $\sup_{n \geq 0} \left(\frac{m_{n+1}}{m_n} \right)^{\frac{1}{n}} < \infty;$
- 3) $m_n^2 \leq m_{n-1}m_{n+1}, \quad n \geq 1.$

Класс Карлемана $C_I((n!)^{1+\alpha})$ ($\alpha > 0$) называется, как известно, классом Жевре. Этот класс будет регулярным, ибо числа $M_n = (n!)^{1+\alpha}$ удовлетворяют всем условиям 1)–3).

Ассоциированным весом называется функция $H^*(r) = [h^*(r)]^{-1}$ (см. [4]),

$$h^*(r) = \inf_{n \geq 0} (m_n r^n).$$

Ясно, что $h^*(r) \uparrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, $h^*(0+) = 0$. Из свойства 2) определения регулярных последовательностей видно, что $h^*(r) \leq rh^*(qr)$ при некотором $q > 1$. Имеем также

$$\frac{1}{h^*(r)} = \sup_{n \geq 0} \frac{1}{m_n r^n} = \sup_{n \geq 0} \frac{n!}{M_n r^n} \stackrel{def}{=} H^*(r).$$

Как известно (см. [4]),

$$M_n = \sup_{r > 0} \frac{n!}{H^*(r)r^n}, \quad n \geq 0.$$

Класс $C_I(M_n)$ является квазианалитическим тогда и только тогда, когда выполняется любое из эквивалентных условий (см. [4]):

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty; \quad 2) \int_0^1 \ln^+ \ln H^*(t) dt = \infty.$$

Используя двойственность, В. Мацаев показал, что теорема Левинсона-Шёберга эквивалентна теореме Данжуа-Карлемана о квазианалитичности класса $C_I(M_n)$ (см. [3]). Позже этот факт был переоткрыт Е. М. Дынькиным в [5], а в работе [6] в терминах величины

$$J_M(s) = \sup \left\{ |g(s)| : \sup_I |g^{(n)}(t)| \leq M_n, \quad g^{(n)}(0) = 0, \quad n \geq 0 \right\}$$

была сформулирована другая задача, двойственная к проблеме 1, а именно соотношение $M^* \simeq J_M$. В той же работе были получены двусторонние оценки для M^* , но они, как оказалось, не только не точны, но и не верны (более подробно обзор результатов и дискуссию см. в [14], [15]). Точные оценки для мажоранты M^* иным способом были получены в [14]. Сформулируем этот результат, дающий ответ на проблему 1 из [4].

Пусть

$$P_\varphi(s) = \sup_{y > 0} \left[\frac{2y}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi(t) dt}{t^2 + y^2} - ys \right], \quad (1.4)$$

где весовая функция (логарифмический вес) удовлетворяет условиям:

- 1) $\varphi(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}_+$;
- 2) $\varphi(t) \uparrow \infty$ при $t \rightarrow +\infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{\ln t} = \infty$;
- 3) $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t^2+1} dt < \infty$;
- 4) $\varphi(e^x)$ выпукла по x на \mathbb{R}_+ .

Иногда на функцию φ накладывается дополнительное условие

- 5) $\varphi(t)$ вогнута на \mathbb{R}_+ , причем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t\varphi'(t+0) = \infty.$$

Для логарифма мажоранты M из проблемы 1 (она подчинена условию (1.1)) рассмотрим нижнее преобразование Лежандра

$$\varphi(r) = \inf_{s > 0} (\ln M(s) + rs).$$

Предположим, что для любого $n > 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^n M(s) = \infty. \quad (1.5)$$

Тогда весовая функция φ автоматически удовлетворяет условиям 1)–3), а также 5) (см. [14]). Если же функции $\ln M(e^{-s})$ и $\ln M(t)$ выпуклы, то и функция $\varphi(e^x)$ выпукла по $x \in \mathbb{R}_+$ (т.е. выполняется 4)) (см. [14]).

В [14] доказана

Теорема 1.4. Пусть мажоранта M из теоремы 1.1 удовлетворяет условиям (1.1), (1.5), а функции $\ln M(e^{-s})$ и $\ln M(t)$ выпуклы. Тогда при $s \rightarrow 0$

$$\ln M^*(s) = (1 + o(1)) \ln P_\varphi(s),$$

где P_φ — функция, заданная формулой (1.4), φ — нижнее преобразование Лежандра функции $\ln M(t)$ ¹.

Цель настоящей статьи — найти точные двусторонние оценки для $J_M(s)$ на I .

2. ВТОРАЯ ПРОБЛЕМА Е.М. ДЫНЬКИНА ОБ ОЦЕНКЕ ФУНКЦИИ $J_M(s)$

История вопроса восходит к работе Т. Банга [16].

Пусть $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ — произвольная положительная последовательность, $M_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty$ (она необязательно регулярна). Тогда существует наибольшая логарифмически выпуклая миноранта $\{M_n^c\}_{n=0}^\infty$, т.е. такая, что: $M_n^c \leq M_n$, $n \geq 0$; $M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1}$, $n \geq 1$. Последовательность $\{M_n^c\}$ называется *выпуклой регуляризацией* $\{M_n\}$ посредством логарифмов (см. [17]).

Пусть $P = \{n_i\}$ — последовательность основных индексов, т.е. $M_{n_i} = M_{n_i}^c$, $i \geq 1$. В [16] для каждой функции $f \in C^\infty(I)$ рассматривается величина

$$B_f(x) = \inf_{p \in P} \left[\max \left(e^{-p}, \max_{0 \leq n \leq p} \frac{|f^{(n)}(x)|}{e^n M_n^c} \right) \right]. \quad (2.1)$$

Она непрерывна по x на I .

Основной в [16] является следующая теорема Т. Банга.

Теорема 2.1. Если $f \in C^\infty(I)$ и $\|f^{(n)}\| \leq M_n$, $n \geq 0$, то из оценки

$$B_f(x) \geq e^{-q}$$

при некотором $q \in \mathbb{N}$ следует, что

$$B_f(x+h) \leq B_f(x) \exp \left(e|h| \frac{M_q^c}{M_{q-1}^c} \right). \quad (2.2)$$

Отметим, что в этой теореме q необязательно принадлежит множеству основных индексов P . Параметр h выбирается так, чтобы сдвиг $x+h$ принадлежал I .

Замечание 2.1. Если обозначить $L(x) = \ln B_f(x)$, то в условиях теоремы Т. Банга справедливы оценки (см. [16]):

1) для всех x , $x+h \in I$

$$|L(x+h) - L(x)| \leq e \frac{M_q^c}{M_{q-1}^c} |h|;$$

2) в точках, где существует производная $L'(x)$, верна оценка

$$|L'(x)| \leq e \frac{M_q^c}{M_{q-1}^c}.$$

В качестве q можно брать индекс $p \in P$, в котором достигается инфимум в (2.1).

Теорема 2.1 была использована Т. Бангом для доказательства критерия квазианалитичности класса $C_I(M_n)$. Нас будет интересовать только достаточная часть, поскольку из ее доказательства вытекает одна простая оценка для каждой функции f из класса $C_I^0(M_n) = \{f : f \in C_I^N(M_n), f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0, n \geq 0\}$ в окрестности точки $x=0$, которую в ряде работ некорректно переносят и на экстремальную функцию $J_M(M_n)$ (см. [6], [14]).

¹В [14] теорема доказана для случая $E = \{0\}$. Но она верна и для отрезка I .

Приведем краткое доказательство Т. Банга утверждения: *если класс $C_I(M_n)$ неквази-аналитичен, то*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c} < \infty.$$

По условию, существует функция f из класса $C_I^0(M_n)$, $f(x) \not\equiv 0$. Значит, и $B_f(x) \not\equiv 0$. Следовательно, существует $p_1 \in P$, существует $x_1 \in I$, такие, что $B_f(x_1) = e^{-p_1}$. Далее по индукции строится последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$: $x_n \downarrow 0$, $B_f(x_j) = e^{-p_j}$, $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$, $p_j \in P$. Если положить $x = x_j$, $x + h = x_{j-1}$ то $h > 0$. По теореме 2.1, согласно (2.2),

$$B_f(x_{j-1}) \leq B_f(x_j) \exp \left[e|x_j - x_{j-1}| \frac{M_{p_j}^c}{M_{p_{j-1}}^c} \right].$$

Отсюда

$$p_j - p_{j-1} \leq e|x_j - x_{j-1}| \frac{M_{p_j}^c}{M_{p_{j-1}}^c},$$

или

$$(p_j - p_{j-1}) \frac{M_{p_{j-1}}^c}{M_{p_j}^c} \leq e|x_j - x_{j-1}|. \quad (2.3)$$

Но левая часть последней оценки равна

$$\sum_{n=p_{j-1}}^{p_j-1} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c},$$

все слагаемые которой равны между собой (их количество есть $p_j - p_{j-1}$). Это легко усматривается из геометрического смысла регуляризации последовательности $\{M_n\}$ посредством логарифмов (см. [17]). Так как

$$\sum_{j=2}^{\infty} |x_j - x_{j-1}| \leq x_1,$$

то из (2.3) получаем, что

$$\sum_{n=p_1}^{\infty} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c} \leq ex_1 < \infty. \quad (2.4)$$

Утверждение доказано, но для нас представляет интерес само неравенство (2.4), поскольку из него Т. Банг получил важную оценку для функции f , а именно: если $x \in I$, причем

$$x < \frac{1}{e} \sum_{n=p_1}^{\infty} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c},$$

то

$$|f(x)| < M_0^c e^{-p_1}. \quad (2.5)$$

Следует заметить, что число p_1 зависит от конкретной функции f : чем меньше $\|f\|$, тем больше число $p_1 = p_1(f)$.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть

$$C_I^0(M_n) = \{f : f \in C_I^N(M_n), f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0, n \geq 0\}.$$

Пользуясь формулой Тейлора, для любой функции $f \in C_I^0(M_n)$ Т. Банг получил простое неравенство (см. [16]), из которого легко следует оценка

$$J_M(x) \leq \inf_{n \geq 0} \frac{M_n x^n}{n!}, \quad x \in I. \quad (3.1)$$

Чтобы понять, насколько точна эта оценка, рассмотрим пример.

Возьмем последовательность чисел M_n , чисел

$$M_n = n! [\ln(n+e)]^{(1+\beta)n}, \quad \beta > 0, n \geq 0.$$

Пусть f — любая функция из класса (очевидно, неквазианалитического) $C_I^0(M_n)$, $f(x) \not\equiv 0$. Тогда из формулы Тейлора получим

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\sup_{n \geq 0} \frac{n!}{M_n x^n}} = \frac{1}{H_1(x)}, \quad (3.2)$$

где

$$H_1(x) \asymp \exp \exp \left[c_1 \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{1+\beta}} \right], \quad 0 < x \leq 1,$$

c_1 — положительная постоянная, не зависящая от f (пишем $H_1 \asymp H_2$, если имеются $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, такие, что $a_1 H_1(x) \leq H_2(x) \leq a_2 H_1(x)$).

Учитывая быстрый рост функции $H_1(x)$ при $x \rightarrow 0$, оценку (3.2) перепишем в виде

$$\ln \ln \frac{1}{|f(x)|} \geq c_2 \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{1+\beta}}, \quad (3.3)$$

где $0 < c_2 < c_1$, c_2 от f также не зависит (c_2 зависит только от последовательности $\{M_n\}$).

Неквазианалитичность класса $C_I^N(M_n)$ легко следует из условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty,$$

а также из того, что

$$\int_0^1 \ln^+ \ln H_1(x) dx < \infty. \quad (3.4)$$

Но при $\beta = 0$ интеграл (3.4), как и ряд, расходится, и класс $C_I^N(M_n)$ становится квазианалитическим, что и следовало ожидать. Это наводит на мысль о том, что оценка (3.1) достаточно точна.

Однако, если воспользоваться оценкой (2.5) Т. Банга, можно получить еще более точную оценку, но для фиксированной функции f (см. [16]): существует $x_0 = x_0(f)$, такое, что при всех x , $0 < x < x_0(f)$, и некотором $c = c(f) > 0$

$$\ln \ln \frac{1}{|f(x)|} \geq c \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (3.5)$$

Возникает естественный вопрос: какая из оценок, (3.3) или (3.5), реально отражает поведение экстремальной функции $J_M(x)$?

В [6] была сделана неудачная попытка дать ответ на этот вопрос (по этому поводу см. [13]).

Пусть $\{M_n\}$ — регулярная последовательность, а H_0 — подправленный ассоциированный вес, т.е.

$$H_0(y) = \sup_{n \geq 0} \frac{n!}{M_n y^{n+1}}.$$

Тогда, как известно,

$$M_n = \sup_{y > 0} \frac{n!}{H_0(y) y^{n+1}}.$$

Введем также функцию

$$H(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{M_n y^{n+1}}. \quad (3.6)$$

Тогда критерий неквазианалитичности класса $C_I^N(M_n)$ можно записать в виде:

$$\int_0^d \ln h(t) dt < \infty, \quad (3.7)$$

где $h(t) = \ln H(t)$, а $d > 0$ такое, что $h(d) = 1$. Этот критерий равносильен сходимости интеграла Лебега-Стилтьеса (см. [13])

$$- \int_0^d t \psi'(t) dt, \quad \psi(t) = \ln h(t).$$

Как и в работе [13], через $\theta = \theta(y)$ обозначим функцию, обратную к

$$y = - \int_0^{\theta} t \psi'(t) dt.$$

В [6] получен следующий результат, а именно

Теорема 3.1. Пусть $t|\psi'(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$. Тогда верны утверждения:

- 1) если интеграл (3.7) расходится, то $J_M(x) \equiv 0$.
- 2) если интеграл (3.7) сходится, то найдется функция $f \in C_I^0(M_n)$, для которой

$$H_0(q_1\theta(x)) \leq f(x) \leq H_0(q_2\theta(x)),$$

где $0 < q_1 < q_2 < \infty$.

Для последовательности $M_n = n![\ln(n+e)]^{(1+\beta)n}$, $\beta > 0$, $n \geq 0$, как легко видеть,

$$h(y) \asymp y^{-\frac{1}{1+\beta}}, \quad \theta(y) \asymp y^{\frac{1+\beta}{\beta}}.$$

Значит, если применить теорему 3.1, найдется функция $f \in C_I^0(M_n)$, такая, что

$$c_f x^{-\frac{1}{\beta}} \leq \ln \ln \frac{1}{|f(x)|} \leq C_f x^{-\frac{1}{\beta}}, \quad 0 < x \leq 1.$$

В [6] приводится соответствующая оценка, где вместо $\frac{1}{|f(x)|}$ фигурирует величина $\delta_{\{M_n\}}(s) = \sup\{|g(s)|, g \in C_I^0(M_n)\}$, что неверно (см. [13]).

Таким образом, асимптотическая оценка (3.5) Т. Банга для каждой такой фиксированной функции f лучше оценки (3.3). Но, как показано в [13], она не отражает истинное поведение величины $J_M(x)$.

В [13] доказана

Теорема 3.2. Пусть $\{M_n\}$ — регулярная последовательность. Если функция H , заданная формулой (3.6), удовлетворяет билогарифмическому условию (3.7), то экстремальная функция $J_M(x)$ удовлетворяет оценкам

$$\frac{1}{q_1 H\left(\frac{x}{2}\right)} \leq J_M(x) \leq \frac{1}{H(2q_2 x)}, \quad 0 < x \leq 1, \quad (3.8)$$

где q_1 — некоторая положительная постоянная, зависящая только от функции H (т.е. от чисел M_n), а

$$q_2 = \sup_{n \geq 1} \sqrt[n]{\frac{m_n}{m_{n-1}}} < \infty, \quad m_n = \frac{M_n}{n!}.$$

Сформулируем теперь основной результат, который существенно уточняет оценки (3.2). Верна

Теорема 3.3. Пусть $\{M_n\}$ — регулярная последовательность, H_0 — ассоциированный вес, понимаемый в следующем смысле:

$$H_0(t) = \sup_{n \geq 0} \frac{n!}{M_n t^{n+1}}, \quad t > 0.$$

Если для этого веса сходится билогарифмический интеграл, что равносильно условию (3.7), то экстремальная функция $J_M(x)$ удовлетворяет оценкам

$$\frac{1}{KH_0(x)} \leq J_M(x) \leq \frac{1}{xH_0(x)},$$

где $K = (1 + L)C$, C ($0 < C < \infty$) — постоянная, не зависящая от x^1 , а

$$L = \sup_{n \geq 1} \frac{nM_{n-1}}{M_n}.$$

Таким образом, при $x \rightarrow 0$

$$\ln J_M(x) = -\ln H_0(x) + O\left(\ln \frac{1}{x}\right) = -(1 + O(1)) \ln H_0(x).$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3

Пусть $\{M_n\}$ — регулярная последовательность, H_0 — ассоциированный вес, введенный выше.

Если сходится интеграл (3.7), то сходится и интеграл

$$\int_0^{d_0} \ln \ln H_0(t) dt < \infty, \quad H_0(d_0) = e, \quad (4.1)$$

и потому найдется функция $f \in C_I^0(M_n)$, $f(x) \neq 0$. Тогда, пользуясь формулой Тейлора, получим

$$|f(x)| \leq \inf_{n \geq 0} \frac{M_n x^n}{n!} = \frac{1}{\sup_{n \geq 0} \frac{n!}{M_n x^n}} = \frac{1}{xH_0(x)}, \quad x \in I.$$

Отсюда

$$J_M(x) \leq \frac{1}{xH_0(x)}, \quad x \in I.$$

¹ C — экстремальная (наилучшая) постоянная, однозначно определяемая по семейству функций $F_{\{0\}}^0(H_0)$ (см. доказательство теоремы 3.3).

Оценка сверху для $J_M(x)$ получена. Чтобы оценить $J_M(x)$ снизу, рассмотрим нормированное пространство $F_I(H_0)$ аналитических вне отрезка $I = [0, 1]$ функций, удовлетворяющих оценке

$$|f(z)| \leq C_f H_0(\text{dist}(z, I)), \quad z \in \mathbb{C} \setminus I,$$

с нормой

$$\|f\|_0 = \sup_{\text{Im } z \neq 0} \frac{|f(z)|}{H_0(|\text{Im } z|)}.$$

Через $F_I^0(H_0)$ обозначим единичный шар в $F_I(H_0)$.

Вместо I можно рассматривать любое замкнутое множество $E \subset \mathbb{R}$ (см. [4]). Поэтому, полагая $E = \{0\}$, рассмотрим в пространстве $F_{\{0\}}(H_0)$ линейный функционал $\langle G, f \rangle = f(\delta)$, $\delta \in (0, 1]$. Тогда, очевидно, имеем: $|\langle G, f \rangle| \leq C_f H_0(\delta)$. Так как интеграл (4.1) сходится, то по теореме Н. Левинсона, множество функций $F_{\{0\}}^0$ является нормальным. Это означает, что если $C_f^0 = \inf C_f$, то $\sup_{f \in F_{\{0\}}^0(H_0)} C_f^0 = C < \infty$. Значит, $\|G\| \leq C H_0(\delta)$

(положительная постоянная C от δ не зависит). Далее, поскольку $F_{\{0\}}(H_0) \subset F_I(H_0)$, то по теореме Хана-Банаха, функционал G с сохранением нормы допускает продолжение на все пространство $F_I(H_0)$. Обозначая этот функционал по-прежнему через G , рассмотрим функцию

$$\eta(t) = \left\langle G, \frac{1}{z-t} \right\rangle, \quad t \in I.$$

Тогда $\eta \in C^\infty(I)$, причем

$$\begin{aligned} |\eta^{(n)}(t)| &= \left| \left\langle G, \frac{n!}{(z-t)^{n+1}} \right\rangle \right| \\ &\leq C H_0(\delta) \|n!(z-t)^{-n-1}\| = C H_0(\delta) M_n, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

где

$$M_n = \sup_{y>0} \frac{n!}{H_0(y)y^{n+1}}.$$

Заметим также, что

$$\eta^{(n)}(0) = \left\langle G, \frac{n!}{z^{n+1}} \right\rangle = \frac{n!}{\delta^{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Введем теперь функцию g , полагая $g(t) = 1 + \eta(t)(t - \delta)$. Поскольку

$$g^{(n)}(t) = \eta^{(n)}(t)(t - \delta) + n\eta^{n-1}(t), \quad n \geq 1,$$

то получаем: $g^{(n)}(0) = 0$, $n \geq 0$; $|g^{(n)}(t)| \leq C H_0(\delta) (M_n + n M_{n-1})$, $n \geq 1$. Но последовательность $\{M_n\}$ логарифмически выпукла, т.е. $M_n^2 \leq M_{n-1} M_{n+1}$, $n \geq 1$. Значит, последовательность $\left\{ \frac{M_{n-1}}{M_n} \right\}$ — невозрастающая. Тогда из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{n-1}}{M_n}$$

следует, что $n M_{n-1} = o(M_n)$ при $n \rightarrow \infty$. Так что

$$\sup_{n \geq 1} \frac{n M_{n-1}}{M_n} = L < \infty.$$

Следовательно,

$$\sup_I |g^{(n)}(t)| \leq C(1+L)M_n H_0(\delta), \quad \delta \in (0, 1], \quad n \geq 0.$$

Таким образом, окончательно получаем, что:

$$1) \quad g^{(n)}(0) = 0, \quad n \geq 0;$$

$$2) \|g^{(n)}\| \leq KH_0(\delta)M_n, \quad n \geq 0, \quad K = (1 + L)C;$$

$$3) g(\delta) = 1.$$

Значит, функция

$$\psi(t) = \frac{g(t)}{KH_0(\delta)}$$

принадлежит классу $C_I^0(M_n)$. Осталось заметить, что

$$J_M(\delta) \geq \frac{1}{KH_0(\delta)}, \quad \delta \in (0, 1], \quad K = (1 + L)C.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N. Levinson. *Gap and density theorems*. New-York: Amer. Math. Soc. 1940.
2. В.П. Гурарий. *К теореме Н. Левинсона о нормальном семействе аналитических функций* // Зап. науч. сем. ЛОМИ. Исследования по линейным операторам и теории функций. I. **19**, 215–220 (1970).
3. В. Мацаев. *Теоремы единственности, полноты и компактности, связанные с классической квазианалитичностью*. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Харьков, 1964.
4. Е.М. Дынькин. *О росте аналитической функции вблизи множества ее особых точек* // Зап. науч. сем. ЛОМИ. Исследования по линейным операторами теории функций. III. **30**, 158–160 (1972).
5. Е.М. Дынькин. *Функции с заданной оценкой $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ и теорема Н. Левинсона* // Матем. сб. **89**:2. 1972. С. 182–190.
6. Е.М. Дун'кин. *The pseudoanalytic extension* // J. Anal. Math. **60**, 45–70 (1993).
7. А.М. Гайсин, И.Г. Кинзябулатов. *Теорема типа Левинсона-Щёберга. Применения* // Матем. сб. **199**:7, 41–62 (2008).
8. N. Sjöberg. *Sur les minorantes subharmoniques d'une fonction donnée* // Comp. rendus IX Congres des Math. Scandinaves, Helsingfors. 309–319 (1939).
9. T. Carleman. *Extension d'un theoreme de Liouville* // Acta Math. **48**:3-4, 363–366 (1926).
10. F. Wolf. *On majorants of subharmonic and analytic functions* // Bull. Amer. Math. Soc. **48**, 925–932 (1942).
11. P. Koosis. *The logarithmic integral. I*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1988.
12. Y. Domar. *On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function* // Ark. Mat. **3**:5, 429–440 (1958).
13. А.М. Гайсин. *Экстремальные задачи в неквазианалитических классах Карлемана* // Матем. сб. **209**:7, 44–78 (2018).
14. V. Matsaev, M. Sodin. *Asymptotics of Fourier and Laplace transforms in weighted spaces of analytic functions* // Алгебра и анализ. **14**:4, 107–140 (2002).
15. N. Nikol'skii. *Yngve Domar's forty years in harmonic analysis*. Uppsala: Uppsala Univ. 1995. P. 45–78.
16. T. Bang. *The theory of metric spaces applied to infinitely differentiable functions* // Math. Scand. **1**, 137–152 (1953).
17. С. Мандельброт. *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения*. М.: ИЛ. 1955.

Рашит Ахтярович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: rashit.gajsin@mail.ru