ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 4 (2013). С. 105-115.

УДК 517.9

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.В. ПАНОВ

Аннотация. В работе осуществлена групповая классификация псевдопараболического уравнения в частных производных с двумя параметрами. Найдены группы преобразований эквивалентности, с их помощью проклассифицированы параметры системы. Найдены ядра основных групп симметрий уравнений. Для спецификаций параметров, расширяющих ядро групп преобразований, найдены основные группы симметрий. Полученные подмодели собраны в таблице в конце работы.

Ключевые слова: алгебра Ли, групповая классификация, программа ПОДМОДЕЛИ.

Mathematics Subject Classification: 35B06, 35K58, 35K70

1. Введение

Рассматривается полулинейное уравнение

$$\alpha u_t - u_{txx} = f(u) \tag{1.1}$$

псевдопараболического типа (терминологию см. в [1, стр. 186], [2, стр. 12, 573]), где α и $f = f(z)$ — постоянный и функциональный параметры, $u = u(t,x)$ — неизвестная функция. Данное уравнение при $f(z) = e^z$ или $f(z) = ze^{z^2}$ описывает физические явления в полупроводниках при учёте дебаевской экранировки и источников свободных зарядов [2]. В случае $f(z) = z^3$ уравнение описывает квазистационарные процессы в полупроводниках при наличии стационарного распределения источников тока свободных зарядов [2], а при $f(z) = z$ получается уравнение стратификации объёмного заряда в полупроводнике [2]. Теорией полупроводников не ограничивается область применения уравнений такого класса. Например, при $f(z) = z - az^3$ получается известное уравнение Хоффа, описывающее выпучивание двутавровой балки [3].

Следуя программе ПОДМОДЕЛИ [4], уравнение (1.1) с параметрами будем называть «большой моделью». Первым шагом программы ПОДМОДЕЛИ является групповая классификация. Задача групповой классификации состоит в вычислении преобразований, допускаемых уравнением при любом значении параметров – ядра основных групп симметрий [5, стр. 80], и нахождении таких спецификаций параметров, основные группы симметрий которых расширяют ядро.

В разделе 2 осуществляется поиск группы преобразований эквивалентности уравнения (1.1) с использованием подхода, предложенного в [6, 7]. В разделе 3 осуществляется поиск спецификаций и соответствующих им основных групп симметрий уравнения, расширяющих ядро основных групп преобразований. При этом вид спецификаций преобразованиями эквивалентности, найденными во втором разделе, приводится к наиболее простому.

A.V. Panov, Group classification of a class of semilinear pseudoparabolic equations.

Поступила 4 октября 2013 г.

В результате групповой классификации найдены ядра основных групп симметрий: для $\alpha \neq 0$ ядро состоит из сдвигов по независимым переменным, а для $\alpha = 0$ к сдвигам добавляется растяжение, порождаемое генератором $X_3 = x\partial_x - 2t\partial_t$. Найдены все спецификации параметров, приводящие к дополнительным симметриям уравнения. Все нелинейные спецификации, расширяющие ядро, находятся в классах эквивалентности функций e^u, u^β, u^{-3}, $e^u \pm 1$. Среди них при $\alpha \neq 0$ самой большой алгеброй симметрий обладает уравнение с функцией $f = u^{-3}$, его алгебра Ли является пятимерной. Полученные подмодели собраны в таблице в конце работы.

2. Группа преобразований эквивалентности

При выполнении групповой классификации важно знать такие преобразования, которые изменяют параметры, содержащиеся в уравнении, сохраняя при этом дифференциальную структуру самого уравнения. Данные преобразования определяют отношение эквивалентности на множестве параметров уравнения. Группы симметрий двух дифференциальных уравнений, соответствующих двум разным, но эквивалентным параметрам, изоморфны.

Запишем исходное уравнение в виде

$$\alpha u_t - u_{txx} - f = 0, \tag{2.1}$$

подразумевая, что α, f — это дополнительные переменные, зависящие от независимых переменных t, x, u. Генераторы непрерывных групп преобразований эквивалентности будем искать в виде

$$Y = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \mu\frac{\partial}{\partial f} + \nu\frac{\partial}{\partial \alpha},$$

где функции τ, ξ, η, μ, ν зависят от t, x, u, f, α (см. [6, 7, 8]). Дополним уравнение (2.1) уравнениями

$$f_t = 0, \quad f_x = 0, \tag{2.2}$$

$$\alpha_t = 0, \quad \alpha_x = 0, \quad \alpha_u = 0, \tag{2.3}$$

означающими, что в исходной постановке задачи f зависит только от u, а α является постоянной величиной.

Будем рассматривать систему (2.1)–(2.3) как многообразие $\mathfrak{N}$ в расширенном пространстве соответствующих переменных. Для нахождения допускаемых групп многообразия $\mathfrak{N}$ воспользуемся инфинитезимальным критерием [5], подействовав продолженным оператором

$$\widetilde{Y} = Y + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{txx}\frac{\partial}{\partial u_{txx}} + \mu^t\frac{\partial}{\partial f_t} + \mu^x\frac{\partial}{\partial f_x} + \mu^u\frac{\partial}{\partial f_u} + \nu^t\frac{\partial}{\partial \alpha_t} + \nu^x\frac{\partial}{\partial \alpha_x} + \nu^u\frac{\partial}{\partial \alpha_u}$$

на уравнения (2.1)–(2.3), сузим результат действия на многообразие $\mathfrak{N}$ и получим определяющие уравнения

$$\nu u_t + \alpha\varphi^t - \varphi^{txx} - \mu|_{\mathfrak{N}} = 0, \tag{2.4}$$

$$\mu^t|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \mu^x|_{\mathfrak{N}} = 0, \tag{2.5}$$

$$\nu^t|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \nu^x|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \nu^u|_{\mathfrak{N}} = 0. \tag{2.6}$$

Коэффициенты оператора $\widetilde{Y}$ могут быть вычислены по формулам продолжения, использующим операторы дифференцирования

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + (f_t + f_u u_t)\frac{\partial}{\partial f} + (\alpha_t + \alpha_u u_t)\frac{\partial}{\partial \alpha} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_x} + \ldots,$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + (f_x + f_u u_x)\frac{\partial}{\partial f} + (\alpha_x + \alpha_u u_x)\frac{\partial}{\partial \alpha} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_t} + \ldots,$$

$$\widetilde{D}_t = \frac{\partial}{\partial t} + f_t\frac{\partial}{\partial f} + \alpha_t\frac{\partial}{\partial \alpha} + \ldots, \ \widetilde{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} + f_x\frac{\partial}{\partial f} + \alpha_x\frac{\partial}{\partial \alpha} + \ldots,$$

$$\widetilde{D}_u = \frac{\partial}{\partial u} + f_u \frac{\partial}{\partial f} + \alpha_u \frac{\partial}{\partial \alpha} + \ldots$$

С учетом уравнений (2.2), (2.3), операторы примут вид

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + f_u u_t \frac{\partial}{\partial f} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_x} + f_{uu} u_t \frac{\partial}{\partial f_u} + u_{ttt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + u_{ttx} \frac{\partial}{\partial u_{tx}} + \ldots,$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + f_u u_x \frac{\partial}{\partial f} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t} + f_{uu} u_x \frac{\partial}{\partial f_u} + \ldots,$$

$$\widetilde{D}_t = \frac{\partial}{\partial t},\ \widetilde{D}_x = \frac{\partial}{\partial x},\ \widetilde{D}_u = \frac{\partial}{\partial u} + f_u \frac{\partial}{\partial f} + \ldots$$

Согласно формулам продолжения

$$\varphi^t = D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi), \quad \varphi^x = D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi),$$

$$\varphi^{xx} = D_x(\varphi^x) - u_{tx} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi), \quad \varphi^{txx} = D_t(\varphi^{xx}) - u_{txx} D_t(\tau) - u_{xxx} D_t(\xi),$$

поэтому

$$\varphi^t = \eta_t + u_t \eta_u + u_t f_u \eta_f - u_t \tau_t - u_t^2 \tau_u - u_t^2 f_u \tau_f - u_x \xi_t - u_t u_x \xi_u - u_t u_x f_u \xi_f,$$

$$\varphi^x = \eta_x + u_x \eta_u + u_x f_u \eta_f - u_t \tau_x - u_t u_x \tau_u - u_t u_x f_u \tau_f - u_x \xi_x - u_x^2 \xi_u - u_x^2 f_u \xi_f.$$

Распишем сначала уравнения (2.5), (2.6), это сократит вычисление коэффициентов φ^{xx}, φ^{txx}. Получим

$$\mu^t|_{\mathfrak{N}} = (\widetilde{D}_t(\mu) - f_t \widetilde{D}_t(\tau) - f_x \widetilde{D}_t(\xi) - f_u \widetilde{D}_t(\eta))|_{\mathfrak{N}} = \mu_t - f_u \eta_t = 0,$$

$$\mu^x|_{\mathfrak{N}} = (\widetilde{D}_x(\mu) - f_t \widetilde{D}_x(\tau) - f_x \widetilde{D}_x(\xi) - f_u \widetilde{D}_x(\eta))|_{\mathfrak{N}} = \mu_x - f_u \eta_x = 0,$$

$$\nu^t|_{\mathfrak{N}} = (\widetilde{D}_t(\nu) - \alpha_t \widetilde{D}_t(\tau) - \alpha_x \widetilde{D}_t(\xi) - \alpha_u \widetilde{D}_t(\eta))|_{\mathfrak{N}} = \nu_t = 0,$$

$$\nu^x|_{\mathfrak{N}} = (\widetilde{D}_x(\nu) - \alpha_t \widetilde{D}_x(\tau) - \alpha_x \widetilde{D}_x(\xi) - \alpha_u \widetilde{D}_x(\eta))|_{\mathfrak{N}} = \nu_x = 0,$$

$$\nu^u|_{\mathfrak{N}} = \nu_u + f_u \nu_f = 0.$$

Из этих уравнений следует в силу произвольности f_u, что $\eta_t = \eta_x = 0,\ \mu_t = \mu_x = 0,$ $\nu_t = \nu_x = \nu_u = \nu_f = 0$. Поэтому $\eta = \eta(u, \alpha, f), \mu = \mu(u, \alpha, f), \nu = \nu(\alpha)$.

Расщепим по дифференциальным переменным уравнение (2.4). При f_{uuu} стоит множитель $u_x^2 u_t \eta_f - u_t^2 u_x^2 \tau_f - u_x^3 u_t \xi_f$, приравняв его к нулю, получим равенства $\eta_f = \xi_f = \tau_f = 0$. Проделав аналогичные действия с множителем при f_{uu}, получим $\xi_{xu} = 0$. Продифференцируем по f уравнение (2.4) и, учитывая равенства $\nu_f = \xi_f = \tau_f = \eta_f = 0$, придем к уравнению $\eta_u - 2u_t \tau_u - 2\xi_x - 3u_x \xi_u - \tau_t - \mu_f = 0$. Тогда $\xi_u = \tau_u = 0$ и $\mu_f = \eta_u - 2\xi_x - \tau_t$. Продолжая приравнивать к нулю коэффициенты при различных дифференциальных переменных, получим равенства

$$u_{ttx} : \tau_x = 0,$$

$$u_{xxx} : \xi_t = 0,$$

$$u_{xx} : 2\xi_{xt} - u_t \eta_{uu} = 0.$$

Таким образом, $\tau = \tau(t, \alpha), \xi = \xi(x, \alpha), \eta_{uu} = 0, \eta = \eta(u, \alpha)$. Перепишем теперь уравнение (2.4):

$$\nu u_t + u_{tx} \xi_{xx} + f \eta_u + 2\alpha u_t \xi_x - 2f \xi_x - f \tau_t - \mu = 0.$$

Видно, что $\xi_{xx} = 0, \nu + 2\alpha \xi_x = 0, f\eta_u - 2f\xi_x - f\tau_t - \mu = 0$. Если последнее равенство продифференцировать по t и учесть, что $\mu_t = \xi_t = \eta_t = 0$, то получим $\tau_{tt} = 0$. Таким образом, решение системы определяющих уравнений образуют функции $\tau = c_1(\alpha) + c_2(\alpha)t$, $\xi = c_3(\alpha) + c_4(\alpha)x$, $\eta = c_5(\alpha) + c_6(\alpha)u$, $\mu = f(c_6(\alpha) - c_2(\alpha) - 2c_4(\alpha))$, $\nu = -2\alpha c_4(\alpha)$. Здесь $c_i(\alpha)$ — произвольные функции от α. Базисные операторы можно выбрать в таком виде

$$X_1 = c_1(\alpha)\partial_t,\ X_2 = c_3(\alpha)\partial_x,\ X_3 = c_5(\alpha)\partial_u,$$

$$X_4 = c_2(\alpha)t\partial_t - c_2(\alpha)f\partial_f,\ X_5 = c_6(\alpha)u\partial_u + c_6(\alpha)f\partial_f,$$

$$X_6 = c_4(\alpha)x\partial_x - 2c_4(\alpha)f\partial_f - 2c_4(\alpha)\alpha\partial_\alpha.$$

Оператором X_6, например, при $c_4 = 1$ можно перевести константу α в любую другую того же знака. Получаем 3 случая: $\alpha = 1$, $\alpha = -1$, $\alpha = 0$. После этого оператор X_6 не используем, чтобы α не менялось. Тогда остальные операторы преобразования эквивалентности образуют пятимерную алгебру Ли с базисом

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = \partial_u,\ X_4 = t\partial_t - f\partial_f,\ X_5 = u\partial_u + f\partial_f.$$

Рассмотрим действие проекций этих операторов на пространстве $\mathbb{R}^2(u,f)$. Оператор X_3 даёт сдвиг переменного u. Проекция $\mathrm{pr}_{(u,f)}\ (-X_4) = f\partial_f$, даёт растяжение по f. Растяжение по u получим как проекцию $\mathrm{pr}_{(u,f)}(X_4 + X_5) = u\partial_u$. Непосредственно из уравнения видны 2 дискретные симметрии $\bar{t} = -t, \bar{f} = -f$ и $\bar{u} = -u, \bar{f} = -f$, из которых получаются отражения по переменным u и f.

3. Спецификации параметров

Найдем спецификации параметров α, f, при которых появляются дополнительные симметрии уравнения

$$\alpha u_t - u_{txx} = f(u). \tag{3.1}$$

Генераторы непрерывных групп преобразований будем искать в виде

$$Y = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u},$$

где функции τ, ξ, η, зависят от t, x, u.

Подействуем на функцию $F(t,x,u,u_t,u_{txx}) = \alpha u_t - u_{txx} - f(u)$, задающую систему (3.1) в виде $F = 0$, продолженным оператором

$$\widetilde{Y} = Y + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{txx}\frac{\partial}{\partial u_{txx}}.$$

По критерию инвариантности получим

$$(\alpha\varphi^t - \varphi^{txx} - f'(u)\eta)|_{F=0} = 0. \tag{3.2}$$

С помощью операторов полных производных

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_x} + \ldots,\ D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_t} + \ldots$$

согласно формулам продолжения

$$\varphi^t = D_t(\eta) - u_tD_t(\tau) - u_xD_t(\xi), \quad \varphi^x = D_x(\eta) - u_tD_x(\tau) - u_xD_x(\xi),$$
$$\varphi^{xx} = D_x(\varphi^x) - u_{tx}D_x(\tau) - u_{xx}D_x(\xi), \quad \varphi^{txx} = D_t(\varphi^{xx}) - u_{txx}D_t(\tau) - u_{xxx}D_t(\xi)$$

распишем уравнение (3.2). Приравняем коэффициенты при третьих производных к нулю:

$$u_{ttx} : \tau_x + u_x\tau_u = 0,$$
$$u_{xxx} : \xi_t + u_t\xi_u = 0.$$

Аналогичным образом получим уравнения для коэффициентов при вторых производных:

$$u_{tx} : -2\eta_{ux} + \xi_{xx} - 2u_x\eta_{uu} = 0,$$
$$u_{xx} : -\eta_{tu} - u_t\eta_{uu} = 0.$$

Тогда $\eta_{uu} = 0, \eta_{tu} = 0, \xi_{xx} = 2\eta_{xu}$. Оставшееся уравнение после расщепления по переменной u_t приводит к равенствам

$$-\eta_{xxu} + 2\alpha\xi_x = 0,$$
$$\alpha\eta_t - \eta_{txx} + f(u)\eta_u - 2f(u)\xi'(x) - f(u)\tau'(t) - f'(u)\eta = 0. \tag{3.3}$$

Отсюда легко получить следующие утверждения.

Теорема 1. (i) *Базис ядра основных алгебр Ли уравнения* $-u_{txx} = f(u)$ *состоит из операторов* $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_x$, $X_3 = 2t\partial_t - x\partial_x$.

(ii) *Базис ядра основных алгебр Ли уравнения* (3.1) *в случае* $\alpha \neq 0$ *состоит из операторов* $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_x$.

Дальнейшее вычисление спецификаций разбивается на 3 случая: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$, $\alpha < 0$. Результаты классификации выписаны в таблицу 1. Далее, номер спецификации указывает номера столбца и строки в таблице.

Первый случай $\alpha = 0$. Тогда, так как $\eta_{uu} = 0, \eta_{tu} = 0, \eta_{xxu} = 0$, то $\eta = (c_1x+c_2)u+b(t,x)$. Так как $\xi_{xx} = 2\eta_{xu}$, то $\xi = c_1x^2 + c_3x + c_4$. Подставив эти выражения в уравнение (3.3), получим

$$-b_{txx}(t,x) + f(u)(c_1x + c_2 - 4c_1x - 2c_3 - \tau'(t)) - f'(u)((c_1x + c_2)u + b(t,x)) = 0. \tag{3.4}$$

Случай $f'(u) = 0$ разбивается на два.

1.1. Если $f = 0$, получим уравнение $b_{txx} = 0$, которое дает решение определяющей системы уравнений

$$\tau = \tau(t),\ \xi = c_1x^2 + c_3x + c_4,\ \eta = (c_1x + c_2)u + c(t)x + d(t) + e(x).$$

Ему соответствует бесконечномерная алгебра Ли.

1.2. Если же $f = \mathrm{const} \neq 0$, растяжением по переменной f можно получить $f = 1$. Тогда решение имеет вид

$$\tau = \tau(t),\ \xi = c_1x^2 + c_3x + c_4,$$
$$\eta = (c_1x + c_2)u + \left(\frac{c_2}{2} - c_3\right)x^2t - \frac{c_1}{2}x^3t - \tau(t)\frac{x^2}{2} + c(t)x + d(t) + e(x).$$

При $f'(u) \neq 0$ рассмотрим два различных случая.

1.3. Пусть $f''(u) = 0$, тогда $f = \sigma u+\delta$, $\sigma \neq 0$. Применяя сдвиг и растяжение по u, можно преобразовать спецификацию к виду $f = u$. Тогда уравнение (3.4) после расщепления по переменным x, u влечет равенства

$$c_1 = 0,\ \tau = -2c_3t + c_5,$$
$$b_{txx}(t,x) + b(t,x) = 0. \tag{3.5}$$

Итак, в данном случае коэффициенты генераторов группы симметрий имеют вид

$$\tau = -2c_3t + c_5,\ \xi = c_3x + c_4,\ \eta = c_2u + b(t,x),$$

где $b(t,x)$ — решение уравнения (3.5).

Пусть теперь $f''(u) \neq 0$. Тогда, продифференцировав по u уравнение (3.4), получим

$$f'(u)(4c_1x + 2c_3 + \tau'(t)) + f''(u)((c_1x + c_2)u + b(t,x)) = 0. \tag{3.6}$$

Двойное дифференцирование по t, x последнего уравнения дает равенство $b_{tx}(t,x) = 0$, поэтому $b(t,x) = b_1(t)+b_2(x)$. Продифференцируем (3.6) один раз по t и x соответственно:

$$f'(u)\tau''(t) + f''(u)b_1'(t) = 0, \tag{3.7}$$
$$4c_1f'(u) + c_1uf''(u) + b_2'(x)f''(u) = 0. \tag{3.8}$$

Из уравнения (3.7) видно, что возможны два случая: $\tau = c_5t + c_6$, b_1 — константа; или $b_1'(t) \neq 0$, $\tau''(t) \neq 0$. Во втором случае, используя растяжение и, если надо, отражение по u, получим уравнение

$$\frac{f''(u)}{f'(u)} = -\frac{\tau''(t)}{b_1'(t)} = 1.$$

Отсюда $b_1(t) = -\tau'(t)+c_7$, $f = \sigma e^u+\omega$ или $f = e^u+\omega$ после растяжения по f. Из уравнения (3.8) теперь видно, что $c_1 = 0$ и $b_2(x) = c_8$ — константа. Переобозначим $c_7 + c_8$ на c_7 и подставим найденное в (3.4):

$$(e^u + \omega)(c_2 - 2c_3 - \tau'(t)) - e^u(c_2u - \tau'(t) + c_7) = 0.$$

Случай $\omega \neq 0$ не даёт расширения ядра алгебр. Если же $\omega = 0$, то

$$\tau = \tau(t),\ \tau''(t) \neq 0,\ \xi = c_3 x + c_4,\ \eta = -(\tau'(t) + 2c_3).$$

Вернемся к случаю, когда $\tau = c_5 t + c_6$, $b = b_1 + b_2(x)$. Рассмотрим уравнение (3.8). Пусть $c_1 = 0$, тогда $b_2'(x) = 0$ и уравнение (3.4) примет вид

$$f(u)(c_2 - 2c_3 - c_5) - f'(u)(c_2 u + b) = 0, \tag{3.9}$$

где b — константа. Здесь также возможны два случая.

1.4. Пусть $c_2 = 0$, тогда условие $b \neq 0$ необходимо для расширения ядра алгебр Ли. Растяжением и отражением по u уравнение (3.9) можно привести к виду $f'(u) = f(u)$. Решением уравнения в этом случае будет $f = \sigma e^u$, после растяжения по f получим $f = e^u$. Подставляя это значение f в (3.4), найдем решение

$$\tau = c_5 t + c_6,\ \xi = c_3 x + c_4,\ \eta = -(2c_3 + c_5).$$

Объединяя его с ранее найденным для функции $f = e^u$, получим

$$\tau = \tau(t),\ \xi = c_3 x + c_4,\ \eta = -(\tau'(t) + 2c_3).$$

1.5. Если $c_2 \neq 0$, то сдвигом по u можно занулить b и получить уравнение $uf'(u) = \beta f(u)$, где $\beta = \frac{c_2 - 2c_3 - c_5}{c_2}$. Нелинейным решением при $2c_3 + c_5 \neq 0$, $2c_3 + c_5 \neq c_2$ будет $f = \sigma u^\beta$ или $f = u^\beta$ после растяжения по f. При этом исключаются из рассмотрения линейные случаи $\beta = 0$, $\beta = 1$. Подставив в (3.4), получим $b = 0$ и решение для этой спецификации

$$\tau = ((1-\beta)c_2 - 2c_3)t + c_6,\ \xi = c_3 x + c_4,\ \eta = c_2 u.$$

Остался случай $c_1 \neq 0$. Уравнение (3.8) можно представить в виде

$$\frac{4f'(u) + uf''(u)}{f''(u)} = \frac{-b'(x)}{c_1}.$$

Слева от знака равенства стоит функция от u, справа — от x. Значит, эти функции постоянны. Пусть $\dfrac{-b'(x)}{c_1} = c_7$, тогда $b = -c_1 c_7 x + c_8$. После сдвига по u на c_7 осталось уравнение

$$4f'(u) + f''(u)u = 0.$$

Его решение $f = \sigma u^{-3} + \delta$ или после растяжения $f = u^{-3} + \delta$. Подставим такие функции f, b в (3.4) и домножим на u^4. Получим уравнение

$$u(c_2 - 2c_3 - \tau'(t)) + 3(c_2 u - c_1 c_7 x + c_8) + \delta u^4(c_2 - 3c_1 x - 2c_3 - \tau'(t)) = 0.$$

Случай $\delta \neq 0$ не дает расширения ядра алгебр. Рассмотрим случай $\delta = 0$. Тогда, расщепляя последнее уравнение по x, u, получим

$$4c_2 - 2c_3 - \tau'(t) = 0,\ c_7 = c_8 = 0.$$

Отсюда видно, что $\tau = (4c_2 - 2c_3)t + c_6$, $b = 0$, тогда $\eta = (c_1 x + c_2)u$.

1.6. Итак, для функции $f = u^{-3}$ получено решение

$$\tau = (4c_2 - 2c_3)t + c_6,\ \xi = c_1 x^2 + c_3 x + c_4,\ \eta = (c_1 x + c_2)u.$$

Этот случай расширяет алгебру, полученную для произвольной степенной функции.

Таким образом, случай $\alpha = 0$ полностью рассмотрен.

При $\alpha > 0$ любое уравнение можно привести к эквивалентному уравнению с $\alpha = 1$, а при $\alpha < 0$ — к уравнению с $\alpha = -1$.

Возвратимся к уравнению (3.3) определяющей системы, считая, что $\alpha = 1$. Тогда, используя равенство $\xi_{xx} = 2\eta_{xu}$, получим

$$\eta_{xxu} = \frac{\xi_{xxx}}{2},\ -\xi_{xxx} + 4\xi_x = 0.$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$\xi = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3,$$

тогда

$$\eta = (c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4)u + b(t,x).$$

Подстановкой в уравнение (3.3) получим

$$b_t(t,x) - b_{txx}(t,x) + f(u)(c_4 - 3c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{-2x} - \tau'(t)) -$$
$$- f'(u)((c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4)u + b(t,x)) = 0. \qquad (3.10)$$

2.1. Случай $f = 0$ дает уравнение $b_t(t,x) - b_{txx}(t,x) = 0$, откуда $b = \sigma(t)e^x + \delta(t)e^{-x} + \gamma(x)$. Таким образом,

$$\tau = \tau(t),\ \xi = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3,$$
$$\eta = (c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4)u + \sigma(t)e^x + \delta(t)e^{-x} + \gamma(x).$$

2.2. При $f = 1$ имеем уравнение

$$b_t(t,x) - b_{txx}(t,x) = 3c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-2x} - c_4 + \tau'(t).$$

Это уравнение интегрируется сначала для функции b_t, потом интегрируется по t. Общее решение имеет вид

$$b = d_1(t)e^x + d_2(t)e^{-x} + (-c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - c_4)t + \tau(t) + d_3(x).$$
$$\tau = \tau(t),\ \xi = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3,$$
$$\eta = (c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4)(u - t) + d_1(t)e^x + d_2(t)e^{-x} + \tau(t) + d_3(x).$$

2.3. Пусть $f = u$, тогда после подстановки в (3.10) получим

$$b_t(t,x) - b_{txx}(t,x) + u(-4c_1 e^{2x} + 4c_2 e^{-2x} - \tau'(t)) - b(t,x) = 0,$$

поэтому $4c_1 e^{2x} - 4c_2 e^{-2x} + \tau'(t) = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\tau = c_5$. Получили коэффициенты генераторов

$$\tau = c_5,\ \xi = c_3,\ \eta = c_4 u + b(t,x),$$

где b — решение уравнения

$$b_t(t,x) - b_{txx}(t,x) - b(t,x) = 0. \qquad (3.11)$$

Пусть теперь f — нелинейная функция. Продифференцируем по u уравнение (3.10)

$$f'(u)(4c_1 e^{2x} - 4c_2 e^{-2x} + \tau'(t)) + f''(u)((c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4)u + b(t,x)) = 0, \qquad (3.12)$$

Дифференцированием по t уравнения (3.12) получим

$$f'(u)\tau''(t) + f''(u)b_t(t,x) = 0. \qquad (3.13)$$

Если $b_t = 0$, то $\tau = c_5 t + c_6$. Рассмотрим еще одно дифференциальное следствие уравнения (3.12), продифференцировав его по x:

$$(8f'(u) + 2uf''(u))(c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}) + f''(u)b'(x) = 0. \qquad (3.14)$$

Если $c_1 = c_2 = 0$, то b — константа. Подставив найденное в (3.10), получим

$$f(u)(c_4 - c_5) - f'(u)(c_4 u + b) = 0.$$

При $c_4 = c_5 = 0$ получим $b = 0$ и отсутствие дополнительных к ядру симметрий.

2.4. Если $c_4 = 0$, то, применив растяжение по u, получим уравнение $f'(u) = f(u)$ с решением $f = e^u$ (после растяжения по f). Коэффициенты генератора принимают вид

$$\tau = c_5 t + c_6,\ \xi = c_3,\ \eta = -c_5.$$

2.5. Если $c_4 \neq 0$, то сдвигом по u можно обнулить b. Решением оставшегося уравнения после растяжения по f будет функция $f = u^\beta$, где $\beta = \frac{c_4 - c_5}{c_4}$, $\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$. И коэффициенты оператора симметрий примут вид

$$\tau = (1-\beta)c_4 t + c_6,\ \xi = c_3,\ \eta = c_4 u.$$

Второй случай $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$. Тогда уравнение (3.14) примет вид

$$-\frac{8f'(u) + 2uf''(u)}{f''(u)} = \frac{b'(x)}{c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}} = \gamma,\ c_1^2 + c_2^2 \neq 0,\ \gamma = \text{const}.$$

На функцию f после сдвига по u останется уравнение $4f'(u) + uf''(u) = 0$.

2.6. Отсюда видно, что $f = u^{-3} + \delta$. Подставим эту функцию в (3.10)

$$(u^{-3} + \delta)(-3c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{-2x} + c_4 - c_5) + 3u^{-4}((c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4)u + b) = 0$$

или

$$u^{-3}(4c_4 - c_5) + \delta(-3c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{-2x} + c_4 - c_5) + 3bu^{-4} = 0.$$

Случай $\delta \neq 0$ не даст дополнительных симметрий. Пусть $\delta = 0$. Тогда $b = 0$, $c_5 = 4c_4$. Решение определяющих уравнений имеет вид

$$\tau = 4c_4 t + c_6,\ \xi = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3,\ \eta = \left(c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4\right) u.$$

Пусть теперь $b_t \neq 0$, тогда уравнение (3.13) можно преобразовать к виду

$$\frac{f''(u)}{f'(u)} = -\frac{\tau''(t)}{b_t(t,x)} = \gamma = \text{const} \neq 0.$$

Можно добиться $\gamma = 1$ растяжением по u. Тогда $b(t,x) = -\tau'(t) + \psi(x)$, $f = \sigma e^u + \delta$. Используя сдвиг по u и растяжение по f, можно получить $f = e^u + \delta$, где $\delta = 0$ или $\delta = \pm 1$. Подставим эти функции в (3.10) и получим уравнение

$$-\tau''(t) + (e^u + \delta)(-3c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{-2x} + c_4 - \tau'(t)) -$$
$$-e^u((c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4)u - \tau'(t) + \psi(x)) = 0.$$

Отсюда $c_1 = c_2 = c_4 = 0$, $\psi(x) = 0$, $\tau''(t) + \delta\tau'(t) = 0$. Случай $\delta = 0$ приводит к тому же решению, что было получено в п. 2.4.

2.7. Пусть $\delta \neq 0$, тогда $\tau = c_5 e^{-\delta t} + c_6$, $b = c_5 \delta e^{-\delta t}$. Коэффициенты оператора для случая $f = e^u + \delta$, $\delta \neq 0$, примут вид

$$\tau = c_5 e^{-\delta t} + c_6,\ \xi = c_3,\ \eta = c_5 \delta e^{-\delta t}.$$

Остался случай $\alpha = -1$. Рассуждая, как при $\alpha = 1$, получим уравнение на ξ

$$\xi_{xxx} + 4\xi_x = 0.$$

Его решение $\xi = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3$, тогда $\eta_{xu} = \frac{1}{2}\xi_{xx} = -2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x$. Отсюда $\eta_u = -c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_4$, так как $\eta_{uu} = \eta_{tu} = 0$. Поэтому $\eta = (-c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_4)u + b(t,x)$. Рассуждая так же, как в случае $\alpha = 1$, можно получить аналогичные спецификации с группами симметрий, приведенными в таблице.

Подстановкой найденного в уравнение (3.3) получим

$$-b_t(t,x) - b_{txx}(t,x) + f(u)(3c_1 \sin 2x - 3c_2 \cos 2x + c_4 - \tau'(t)) -$$
$$-f'(u)((-c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_4)u + b(t,x)) = 0. \tag{3.15}$$

3.1. При $f = 0$ уравнение (3.15) имеет вид $b_t(t,x) + b_{txx}(t,x) = 0$, тогда $b = c_5(t) \sin x + c_6(t) \cos x + c_7(x)$. Решение определяющих уравнений имеет вид

$$\tau = \tau(t),\ \xi = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3,$$
$$\eta = (-c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_4)u + c_5(t) \sin x + c_6(t) \cos x + c_7(x).$$

3.2. Пусть $f = 1$, получим уравнение

$$b_t(t,x) + b_{txx}(t,x) = 3c_1\sin 2x - 3c_2\cos 2x + c_4 - \tau'(t)).$$

Общее решение этого уравнения

$$b(t,x) = d(t)\sin x + e(t)\cos x + (-c_1\sin 2x + c_2\cos 2x + c_4)t - \tau(t) + h(x).$$

Коэффициенты генераторов примут вид

$$\tau = \tau(t),\ \xi = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + c_3,$$

$$\eta = (-c_1\sin 2x + c_2\cos 2x + c_4)(u+t) + d(t)\sin x + e(t)\cos x - \tau(t) + h(x).$$

3.3. Пусть $f = u$. Подставив эту функцию в (3.15), получим

$$-b_t(t,x) - b_{txx}(t,x) + u(4c_1\sin 2x - 4c_2\cos 2x - \tau'(t)) - b(t,x) = 0.$$

Следовательно, $c_1 = c_2 = 0$, $\tau = c_5$. Коэффициенты генераторов имеют вид

$$\tau = c_5,\ \xi = c_3,\ \eta = c_4 u + b(t,x),$$

где b — решение уравнения

$$b_t(t,x) + b_{txx}(t,x) + b(t,x) = 0. \tag{3.16}$$

Рассмотрим случай нелинейной функции f. Дифференцируя (3.15) по u, получим

$$f'(u)(4c_1\sin 2x - 4c_2\cos 2x - \tau'(t)) -$$
$$-f''(u)((c_4 - c_1\sin 2x + c_2\cos 2x)u + b(t,x)) = 0. \tag{3.17}$$

Продифференцировав (3.17) по t, получим

$$f'(u)\tau''(t) + f''(u)b_t(t,x) = 0. \tag{3.18}$$

Если $b_t = 0$, то $\tau = c_5 t + c_6$. Если же уравнение (3.17) продифференцировать по x, то получится дифференциальное следствие

$$(8f'(u) + 2uf''(u))(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) - f''(u)b'(x) = 0. \tag{3.19}$$

Пусть $c_1 = c_2 = 0$, тогда b — константа, и уравнение (3.15) запишется в виде

$$f(u)(c_4 - c_5) - f'(u)(c_4 u + b) = 0.$$

3.4. Если $c_4 = 0$, то, используя растяжение по u и по f, получим решение $f = e^u$. Тогда $b = -c_5$ и решение определяющей системы уравнений имеет вид

$$\tau = c_5 t + c_6,\ \xi = c_3,\ \eta = -c_5.$$

3.5. В случае $c_4 \neq 0$, рассуждая так же, как и для $\alpha = 1$, получим спецификацию $f = u^\beta$, где $\beta = \frac{c_4 - c_5}{c_4}$, $\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$. Коэффициенты генератора группы симметрий примут вид

$$\tau = c_4(1-\beta)t + c_6,\ \xi = c_3,\ \eta = c_4 u.$$

Пусть теперь $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Тогда уравнение (3.19) можно записать в виде

$$\frac{8f'(u) + 2uf''(u)}{f''(u)} = \frac{b'(x)}{c_1\cos 2x + c_2\sin 2x} = \gamma = \mathrm{const}.$$

После сдвига по u для функции f получаем уравнение $4f'u + uf''(u) = 0$.

3.6. Из последнего уравнения получим $f = u^{-3} + \delta$. Подставим такую функцию в (3.15) и получим

$$u^{-3}(4c_4 - c_5) + \delta(3c_1\sin 2x - 3c_2\cos 2x + c_4 - c_5) + 3b(x)u^{-4} = 0.$$

Случай $\delta \neq 0$ не даст дополнительных симметрий. Пусть $\delta = 0$. Тогда $b = 0, c_5 = 4c_4$. Решение определяющих уравнений имеет вид

$$\tau = 4c_4 t + c_6,\ \xi = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + c_3,\ \eta = (-c_1\sin 2x + c_2\cos 2x + c_4)\,u.$$

Пусть теперь $b_t \neq 0$, тогда уравнение (3.18) можно преобразовать к виду

$$\frac{f''(u)}{f'(u)} = -\frac{\tau''(t)}{b_t(t,x)} = \gamma = \mathrm{const} \neq 0.$$

Можно получить $\gamma = 1$, используя растяжение по u. Тогда $b(t,x) = -\tau'(t)+\psi(x)$, $f = e^u+\delta$, $\delta = 0$ или $\delta = \pm 1$. Подставим эту функцию в (3.15):

$$\tau''(t) + (e^u+\delta)(3c_1 \sin 2x - 3c_2 \cos 2x + c_4 - \tau'(t)) -$$

$$-e^u((-c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_4)u - \tau'(t) + \psi(x)) = 0.$$

Отсюда следует, что $c_1 = c_2 = c_4 = 0$, $\psi(x) = 0$, $\tau''(t) - \delta\tau'(t) = 0$. Случай $\delta = 0$ рассмотрен выше.

3.7. Пусть $\delta \neq 0$, тогда последнее уравнение имеет решение $\tau = c_5 e^{\delta t} + c_6$, отсюда $b = -c_5 \delta e^{\delta t}$. Коэффициенты оператора примут вид

$$\tau = c_5 e^{\delta t} + c_6,\ \xi = c_3,\ \eta = -c_5 \delta e^{\delta t},$$

где $f = e^u + \delta$, $\delta = \pm 1$.

4. Заключение

Результаты групповой классификации можно выписать в следующую таблицу. Функция $b_{(i.j)}(t,x)$ является решением уравнения с номером $(i.j)$. Все остальные функции считаются произвольными.

Таблица 1

	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = -1$
$f = 0$	$\tau(t)\partial_t$, ∂_x, $x\partial_x$, $u\partial_u$, $x^2\partial_x + xu\partial_u$, $d(t)\partial_u$, $e(x)\partial_u$, $c(t)x\partial_u$	$\tau(t)\partial_t$, ∂_x, $u\partial_u$, $e^{2x}(\partial_x + u\partial_u)$, $e^{-2x}(\partial_x - u\partial_u)$, $\gamma(x)\partial_u$, $\sigma(t)e^x\partial_u$, $\delta(t)e^{-x}\partial_u$	$\tau(t)\partial_t$, ∂_x, $u\partial_u$, $\cos 2x\partial_x - u \sin 2x\partial_u$, $\sin 2x\partial_x + u\cos 2x\partial_u$, $c_5(t)\sin x\partial_u$, $c_6(t)\cos x\partial_u$, $c_7(x)\partial_u$
$f = 1$	$2\tau(t)\partial_t - \tau(t)x^2\partial_u$, ∂_x, $x\partial_x - tx^2\partial_u$, $2x^2\partial_x + (2xu - tx^3)\partial_u$, $(2u + tx^2)\partial_u$, $d(t)\partial_u$, $e(x)\partial_u$, $c(t)x\partial_u$	$\tau(t)(\partial_t + \partial_u)$, ∂_x, $e^{2x}(\partial_x + (u-t)\partial_u)$, $e^{-2x}(\partial_x - (u-t)\partial_u)$, $e^x d_1(t)\partial_u$, $e^{-x}d_2(t)\partial_u$, $d_3(x)\partial_u$	$\tau(t)(\partial_t - \partial_u)$, ∂_x, $\cos 2x\partial_x - (u + +t)\sin 2x\partial_u$, $\sin 2x\partial_x + (u + +t)\cos 2x\partial_u$, $d(t)\sin x\partial_u$, $e(t)\cos x\partial_u$, $h(x)\partial_u$
$f = u$	∂_t, ∂_x, $u\partial_u$, $2t\partial_t - x\partial_x$, $b_{(3.5)}(t,x)\partial_u$	∂_t, ∂_x, $u\partial_u$, $b_{(3.11)}(t,x)\partial_u$	∂_t, ∂_x, $u\partial_u$, $b_{(3.16)}(t,x)\partial_u$
$f = e^u$	$\tau(t)\partial_t - \tau'(t)\partial_u$, ∂_x, $x\partial_x - 2\partial_u$	∂_t, ∂_x, $t\partial_t - \partial_u$	∂_t, ∂_x, $t\partial_t - \partial_u$
$f = u^\beta$	∂_t, ∂_x, $2t\partial_t - x\partial_x$, $(1-\beta)t\partial_t + u\partial_u$	∂_t, ∂_x, $(1-\beta)t\partial_t + u\partial_u$	∂_t, ∂_x, $(1-\beta)t\partial_t + u\partial_u$
$f = u^{-3}$	∂_t, ∂_x, $2t\partial_t - x\partial_x$, $4t\partial_t + u\partial_u$, $x^2\partial_x + xu\partial_u$	∂_t, ∂_x, $4t\partial_t + u\partial_u$, $e^{2x}(\partial_x + u\partial_u)$, $e^{-2x}(\partial_x - u\partial_u)$	∂_t, ∂_x, $4t\partial_t + u\partial_u$, $\cos 2x\partial_x - u\sin 2x\partial_u$, $\sin 2x\partial_x + u\cos 2x\partial_u$
$f = e^u+\delta$, $\delta = \pm 1$		∂_t, ∂_x, $e^{-\delta t}(\partial_t + \delta\partial_u)$	∂_t, ∂_x, $e^{\delta t}(\partial_t - \delta\partial_u)$

Результаты проведенной работы будут использованы для поиска инвариантных и частично инвариантных решений уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1978. 336 с.
2. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа.* М.: Физматлит, 2007. 736 с.
3. N.J. Hoff *Creep buckling* // Aeron. Quarterly. 1956. Vol. 7, № 1. P. 1–20.
4. Овсянников Л.В. *Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика* // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 29–55.
5. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1978. 400 с.
6. Мелешко С.В. *Групповая классификация уравнений двумерных движений газа* // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 56–62.
7. Хабиров С.В. *Групповая классификация систем Гамильтона* // Динамика сплошной среды. Новосибирск. 1980. Вып. 44. С. 139–146.
8. Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. *Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды.* Новосибирск: Изд-во НГТУ. 2012. 659 с.

Александр Васильевич Панов,
Челябинский государственный университет,
ул. Бр. Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
E-mail: gjd@bk.ru