ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 67-77.

УДК 517.5

БЕЗУСЛОВНЫЕ БАЗИСЫ ИЗ ВОСПРОИЗВОДЯЩИХ ЯДЕР В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

К.П. ИСАЕВ, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. Рассматривается вопрос о существовании безусловных базисов из воспроизводящих ядер в функциональном гильбертовом пространстве целых функций. Доказано, что при выполнении некоторых условий безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует. Показано, что в конкретных пространствах некоторые уже известные теоремы об отсутствии безусловных базисов являются следствиями этих результатов.

Ключевые слова: гильбертовы пространства, целые функции, воспроизводящие ядра, безусловные базисы.

1. Введение

Пусть H – функциональное гильбертово пространство целых функций. То есть функционалы $\delta_z : f \to f(z)$ являются непрерывными при каждом $z \in \mathbb{C}$. Тогда каждый функционал δ_z порождается элементом $k_z(\lambda) \in H$ в смысле $\delta_z(f) = (f(\lambda), k_z(\lambda))$. Функция $k(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется воспроизводящим ядром. Функция $\|k_z(\lambda)\|_H = (k(z,z))^{\frac{1}{2}}$ называется функцией Бергмана пространства H. Основные свойства воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах изложены в работе [1]. Обозначим $K(z) = \|k_z(\lambda)\|_H^2$. Далее наложим на пространство H дополнительные условия:

$$K(z) > 0, z \in \mathbb{C}; \tag{1}$$

если $f \in H$ и z_0 — нуль функции $f(z)$, то

$$\frac{f(z)}{z - z_0} \in H. \tag{2}$$

Система элементов e_k, $k = 1, 2, ...$, в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом (см. [2]), если она полна и найдутся числа $c, C > 0$, такие, что для для любого набора чисел $c_1, c_2, ..., c_n$ выполняется соотношение

$$c \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 ||e_k||^2 \le || \sum_{k=1}^{n} c_k e_k ||^2 \le C \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 ||e_k||^2.$$

Известно (см. [3], [4]), что если система e_k, $k = 1, 2, ...,$ — безусловный базис, то любой элемент пространства H единственным образом представляется в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k,$$

K.P. Isaev, R.S. Yulmukhametov, Unconditional bases of reproducing kernels in Hilbert spaces of entire functions.

Работа выполнена при поддержке гранта ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"№ 14.B37.21.0358.

Поступила 12 декабря 2012 г.

причем

$$c\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2||e_k||^2 \le ||x||^2 \le C\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2||e_k||^2. \tag{3}$$

Для данной последовательности комплексных чисел $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$ рассмотрим систему $\{k(\lambda,z_j)\}_{j=1}^{\infty}$. Нас будет интересовать вопрос о том, при каких условиях на последовательность $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ соответствующая система из воспроизводящих ядер может являться безусловным базисом в пространстве H.

В двойственной формулировке задача о безусловных базисах из воспроизводящих ядрах в гильбертовом пространстве целых функций становится задачей об интерполяции. В некоторых специальных случаях через преобразования Фурье-Лапласа задача оказывается эквивалентной задаче о безусловных базисах из экспонент. Базовыми примерами являются классические ряды Фурье в $L_2(-\pi,\pi)$, теорема об интерполяции в пространстве Пэли-Винера (теорема Котельникова В.А.).

В весовых пространствах целых функций вида

$$F_\varphi=\{f\in H(\mathbb{C}):\ \ \|f\|^2:=\int_{\mathbb{C}}|f(z)|^2e^{-2\varphi(z)}\,dm(z)<\infty\}, \tag{4}$$

где $\varphi(z)$ — субгармоническая функция, $dm(z)$ — мера Лебега, задача о безусловных базисах из воспроизводящих ядер рассматривались во многих работах. Из недавних работ укажем [5], [6], [8], [9].

В данной работе в параграфе 3 мы доказываем, что при выполнении некоторых условий безусловных базисов из воспроизводящих ядер в пространстве H не существует. В параграфе 4 мы показываем как из доказанных теорем следуют некоторые уже известные теоремы в конкретных пространствах.

2. Формулировка основных результатов

В параграфе 3 будет доказана теорема:

Теорема 1. *Если система $\{k(\lambda,z_j)\}_{j=1}^{\infty}$ является безусловным базисом в пространстве H, то существует целая функция L с простыми нулями в точках $z_j,\ j=1,2,...$, для которой выполняется соотношение:*

$$\frac{1}{P}K(z)\le\sum_{i=j}^{\infty}\frac{|L(z)|^2K(z_j)}{|L'(z_j)|^2|z-z_j|^2}\le PK(z),\ z\in\mathbb{C}, \tag{5}$$

где P — некоторая положительная постоянная.

Введем одну характеристику для непрерывных на плоскости функций u, измеряющую отклонение данной функции от гармонических функций. Для непрерывной функции u, для $z\in\mathbb{C}$ и положительного числа p через $\tau(u,z,p)$ обозначим супремум всех таких $r>0$, для которых выполняется условие

$$\inf\{\sup_{w\in B(z,r)}|u(w)-h(w)|,\ h-\text{гармонична в } B(z,r)\}\le p.$$

Здесь $B(z,r)$ — круг с центром в точке z и радиусом r. Непосредственно из определения следует, что если $\tau(u,z_0,p)=\infty$ для некоторой точки z_0, то $\tau(u,z,p)\equiv\infty$. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Если для функции u характеристика $\tau(u,z,p)$ конечна, то функция $\tau(z)=\tau(u,z,p)$ удовлетворяет условию Липшица: для всех z_1 и z_2*

$$|\tau(z_1)-\tau(z_2)|\le|z_1-z_2|.$$

Простое доказательство этой леммы можно найти в [7].

В работе [10] показано (лемма 1.1), что в случае, когда u — непрерывная субгармоническая функция, величина $\tau = \tau(u, \lambda, p)$ вполне определяется условием: если $H(z)$ — наименьшая гармоническая мажоранта функции u в круге $B(\lambda, \tau)$, то

$$\max_{z \in \overline{B}(\lambda,\tau)} (H(z) - u(z)) = 2p.$$

Функция

$$\ln K(z) = 2 \sup_{||F|| \leq 1} \ln |F(z)|$$

является субгармонической и непрерывной на всей плоскости (мы предполагаем, что $K(z) > 0$). В продолжении этой статьи через $\tau(z)$ будем обозначать функцию $\tau(\ln K(w), z, \ln(5P))$, где P — константа из соотношения (5). Итак,

$$\inf\{ \sup_{z \in \overline{B}(\lambda,\tau(\lambda))} |\ln K(z) - h(z)|, \text{ h гармонична в } B(z, \tau(z))\} = \ln(5P).$$

Следующая теорема доказана в [7] (см. теорема 1):

Теорема 2. *Пусть $L(z)$ — целая функция с простыми нулями z_i, $i = 1, 2, ...$, при некотором P удовлетворяющая двусторонней оценке*

$$\frac{1}{P} K(z) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|L(z)|^2 K(z_i)}{|L'(z_i)|^2 |z - z_i|^2} \leq PK(z).$$

Тогда

1) В любом круге $B(z, 2\tau(z))$ содержится хотя бы один нуль z_i функции L.

2) Для любых i, j, $i \neq j$, выполняется неравенство

$$|z_i - z_j| \geq \frac{\max(\tau(z_i), \tau(z_j))}{10P^{\frac{3}{2}}}.$$

3) Для любого i в круге $B(z_i, \frac{\tau(z_i)}{20P^{\frac{3}{2}}})$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{5^6 P^8} K(z) \leq \frac{K(z_i)|L(z)|^2}{|L'(z_i)|^2 |z - z_i|^2} \leq PK(z).$$

В параграфе 3 будут доказаны теоремы 3,4:

Теорема 3. *Пусть z_i, $i = 1, 2, ...$, — нули функции $L(z)$, удовлетворяющей условиям предыдущей теоремы. Тогда в любом конечном множестве нулей B, содержащем хотя бы два нуля, найдется индекс n так, что*

$$\sum_{z_i \in B,\, i \neq n} \frac{\tau^2(z_i)}{|z_i - z_n|^2} \leq (4P)^{12}.$$

Следствие.

Пусть z_i, $i = 1, 2, ...$, — нули функции $L(z)$, удовлетворяющей условиям предыдущей теоремы и $b = \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}$. Тогда для любого конечного множества нулей B, содержащем хотя бы два нуля, найдется индекс n так, что

$$\sum_{z_i \in B,\, i \neq n} \int_{B(z_i,\, b\tau(z_i))} \frac{dm(z)}{|z - z_n|^2} \leq 4^{10} P^9.$$

Теорема 4. *Пусть H — функциональное гильбертово пространство целых функций, удовлетворяющее условиям (1) и (2). Предположим, что для любого положительного числа p найдется число $\delta = \delta(p) > 0$, такое, что функция $\tau(z) = \tau(\ln K(\lambda), z, p)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию*

$$\inf_{z\in B(\lambda,2\tau(\lambda))} \tau(z) \geq \delta\tau(\lambda) \tag{6}$$

и $\tau(z) = o(|z|)$, при $|z| \longrightarrow \infty$. Тогда в пространстве H безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует.

Небольшая модификация доказательства этой теоремы приводит к заметному ослаблению условий.

Теорема 5. *Пусть H — функциональное гильбертово пространство целых функций, удовлетворяющее условиям (1) и (2). Предположим, что для любого положительного числа p найдется число $\delta = \delta(p) > 0$ и последовательность кругов $B(\zeta_j, R_j)$ (своя для каждого числа p), такие, что функция $\tau(z) = \tau(\ln K(\lambda), z, p)$ для всех $\lambda \in B(\zeta_j, R_j)$ удовлетворяет условию*

$$\inf_{z\in B(\lambda,2\tau(\lambda))} \tau(z) \geq \delta\tau(\lambda).$$

Кроме того,

$$\max_{z\in \overline{B}(\zeta_j,R_j)} \tau(z) = o(R_j), \ \ j \longrightarrow \infty.$$

Тогда в пространстве H безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует.

3. Доказательство основных утверждений

Теорема 1.

Доказательство. Пусть $k(\lambda, z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(z)k(\lambda, z_j)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Заметим, что $c_j(z_k) = \delta_j^k$, где δ_j^k — символ Кронеккера. Пусть $\{S_j(\lambda)\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ биортогональная система к системе $k(\lambda, z_j)$, то есть $(S_j(\lambda), k(\lambda, z_k)) = \delta_j^k$. Тогда

$$(k(\lambda, z), S_j(\lambda)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(z)(k(\lambda, z_k), S_j(\lambda)),$$

следовательно, $\overline{S_j(z)} = c_j(z)$. Поэтому $S_j(z_k) = \delta_k^j$. Заметим, что z_k, $k \neq j$ являются простыми нулями функции $S_j(z)$. В самом деле, если бы для некоторого $m \neq j$ величина $S_j'(z_m)$ обращалась бы в 0, то функция $(z_j - z_m)S_j(z)/(z - z_m)$, лежащая в H (в силу (2)), обращалась бы в 0 в точках z_k, $k \neq j$, и равнялась бы 1 в точке z_j, то есть во всех точках z_k, $k = 1, 2, 3, ...$, совпадала бы с функцией $S_j(z)$. Но в силу полноты системы $\{k(\lambda, z_k)\}$ в пространстве H система точек z_k, $k = 1, 2, 3, ...$, является множеством единственности для пространства H. Тем самым, функции $(z_j - z_m)S_j(z)/(z - z_m)$ и $S_j(z)$ должны были бы совпадать тождественно.

Функция $L(z) = S_1(z)(z - z_1)$ является целой функцией. Точки z_k, $k = 1, 2, ...$, — ее простые нули. Очевидно,

$$S_1(z) = \frac{L(z)}{L'(z_1)(z - z_1)}.$$

При $j > 1$

$$\frac{L(z)}{L'(z_j)(z - z_j)} = \frac{S_1(z)}{L'(z_j)} + \frac{S_1(z)(z_j - z_1)}{L'(z_j)(z - z_j)} \in H$$

и совпадает с $S_j(z)$ во всех точках z_k, $k = 1, 2, ...$ Снова в силу полноты системы $\{k(\lambda, z_k)\}$

$$S_j(z) = \frac{L(z)}{L'(z_j)(z - z_j)}, \ j = 2, 3, ...,$$

поэтому

$$k(\lambda, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{L(z)}}{\overline{L'(z_i)(z - z_i)}} k(\lambda, z_i),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пользуясь (3), получим утверждение теоремы. Изложенное выше на самом деле означает, что система

$$\frac{L(z)}{L'(z_j)(z - z_j)},\ j = 1, 2, ...,$$

есть биортогональная система к исходной системе из воспроизводящих ядер.

Теорема 1 доказана. □

Теорема 3.

Доказательство. По условию теоремы для любого z выполняется оценка

$$\sum_{z_i \in B} \frac{K(z_i)|L(z)|^2}{|L'(z_i)|^2|z - z_i|^2} \leq PK(z). \tag{7}$$

Поскольку множество B конечно, то существует такой номер n, что

$$\frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2\tau^2(z_n)} = \min_{z_i \in B} \left(\frac{K(z_i)}{|L'(z_i)|^2\tau^2(z_i)} \right).$$

По пункту 3 теоремы 2 для точек z, лежащих на границе круга $B\left(z_n, \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}\tau(z_n)\right)$, справедлива оценка

$$\frac{1}{5^6 P^8} K(z) \leq 20^2 P^3 \frac{K(z_n)|L(z)|^2}{|L'(z_n)|^2\tau^2(z_n)}$$

или

$$\frac{K(z)}{|L(z)|^2} \leq 4^2 5^8 P^{11} \frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2\tau^2(z_n)}.$$

Отсюда и из оценки (7) получим

$$4^2 5^8 P^{11} \frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2\tau^2(z_n)} \geq \frac{1}{P} \sum_{z_i \in B} \frac{K(z_i)}{|L'(z_i)|^2|z - z_i|^2}.$$

Следовательно, для точек z, лежащих на границе круга $B\left(z_n, \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}\tau(z_n)\right)$,

$$4^2 5^8 P^{12} \frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2\tau^2(z_n)} \geq \sum_{z_i \in B} \frac{K(z_i)}{|L'(z_i)|^2\tau^2(z_i)} \cdot \frac{\tau^2(z_i)}{|z - z_i|^2}.$$

Учитывая выбор номера n, для точек z на границе $B\left(z_n, \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}\tau(z_n)\right)$ имеем

$$4^2 5^8 P^{12} \frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2\tau^2(z_n)} \geq \frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2\tau^2(z_n)} \sum_{z_i \in B} \frac{\tau^2(z_i)}{|z - z_i|^2}$$

или

$$\sum_{z_i \in B} \frac{\tau^2(z_i)}{|z - z_i|^2} \leq 4^2 5^8 P^{12}. \tag{8}$$

По пункту 2 теоремы 2 для указанных точек z при $i \neq n$ выполняется оценка

$$|z - z_i| \leq |z - z_n| + |z_n - z_i| = \frac{\tau(z_n)}{20P^{\frac{3}{2}}} + |z_n - z_i| \leq \frac{3}{2}|z_n - z_i|,$$

поэтому из (8) вытекает требуемая оценка

$$\sum_{z_i\in B,\, i\neq n} \frac{\tau^2(z_i)}{|z_n - z_i|^2} \le (4P)^{12}.$$

Теорема 3 доказана. □

Следствие из теоремы 3.

Доказательство. Поскольку для точек $z \in B(z_i, b\tau(z_i))$ имеем

$$|z - z_n| \ge |z_i - z_n| - |z - z_i| \ge \frac{1}{2}|z_i - z_n|,$$

то

$$\int_{B(z_i,\, b\tau(z_i))} \frac{dm(z)}{|z - z_n|^2} \le \frac{4\pi b^2\tau^2(z_i)}{|z_i - z_n|^2}.$$

Тогда

$$\sum_{z_i\in B,\, i\neq n} \int_{B(z_i,\, b\tau(z_i))} \frac{dm(z)}{|z - z_n|^2} \le 4\pi b^2 (4P)^{12} = \frac{4\pi}{400P^3}(4P)^{12} \le 4^{10}P^9.$$

□

Теорема 4.

Доказательство. Воспользуемся следующим утверждением (см. [11], стр. 216).

Лемма (Лемма о покрытиях шарами)

Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^p$ покрыто шарами так, что каждая точка $x \in A$ является центром некоторого шара $S(x)$ радиуса $r(x)$. Если $\sup_{x\in A} r(x) < \infty$, то из системы $\{S(x)\}$ можно выделить не более чем счетную систему $\{S(x_k)\}$, покрывающую все множество A и имеющую кратность, не превосходящую некоторого числа $N(p)$, зависящего только от размерности пространства.

Нетрудно убедиться в том, что $N(2) = 6$.

Проведем доказательство от противного: допустим, что условия теоремы выполнены, но в пространстве H существует безусловный базис из воспроизводящих ядер $\{k(\lambda, z_i)\}$. Тогда верны теоремы 1,2 и 3. В условии доказываемой теоремы положим $p = \ln(5P)$ и пусть $\tau(z) = \tau(\ln K(\lambda), z, \ln(5P))$.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, и число R будем считать таким большим, чтобы выполнялось условие

$$\max_{|z|\le R} \tau(z) \le \varepsilon R. \tag{9}$$

Такие R можно найти по условию на $\tau(z)$. В самом деле, найдется R' такое, что при $|z| \ge R'$ будет выполняться $\tau(z) < \varepsilon|z|$. Если взять $R > \frac{2R'}{\varepsilon}$, то при $|z| \in [\frac{\varepsilon}{2}R; R]$ будем иметь $\tau(z) < \varepsilon|z| \le \varepsilon R$. По лемме 1 выполняется соотношение $\tau(z) \le \tau(0) + |z|$, поэтому если $|z| \in [\tau(0); \frac{\varepsilon}{2}R]$, то $\tau(z) \le 2|z| \le \varepsilon R$. Наконец, выбирая R больше, чем $\frac{1}{\varepsilon}\max_{|z|\le\tau(0)} \tau(z)$, получим соотношение (9).

Рассмотрим систему кругов $B(\lambda, 2\tau(\lambda))$, $\lambda \in B(0, R)$. По п.1 теоремы 2 в каждом из этих кругов содержится хотя бы одно z_i, и эти круги покрывают весь круг $B(0, R)$. По лемме о покрытиях шарами можно выделить не более чем счетный набор кругов $B_n = B(\lambda_n, 2\tau(\lambda_n))$, покрывающих круг $B(0, R)$, при этом каждая точка этого круга попадает не более чем в $N(2) = 6$ кругов покрытия. В каждом из кругов B_n выберем по одному $z_{i(n)}$. При этом некоторые $z_{i(n)}$ могут оказаться выбранными неоднократно, но по свойствам выделенного покрытия кратность выбора одного показателя не больше шести. Перенумеруем систему выбранных показателей, присвоив им номер круга, в котором данный показатель выбран. Получим набор чисел $\{w_n\}$, в котором каждое число повторяется не более шести раз. К полученному набору применим теорему 3. Найдется номер m так, что с учетом кратности будет выполняться оценка

$$\sum_{w_n \neq w_m} \frac{\tau^2(w_n)}{|w_n - w_m|^2} \leq 6(4P)^{12}. \tag{10}$$

В наших обозначениях $w_n \in B_n = B_n(\lambda_n, 2\tau(\lambda_n))$. Далее рассмотрим такие n, что $w_m \notin B'_n = B_n(\lambda_n, 3\tau(\lambda_n))$. Тогда для любого $w \in B_n$ имеем $|w - w_m| \geq \tau(\lambda_n)$. Кроме того,

$$|w_n - w_m| \leqslant |w_n - w| + |w - w_m| \leq 4\tau(\lambda_n) + |w - w_m| \leq 5|w - w_m|,$$

или

$$\frac{1}{|w - w_m|^2} \leq \frac{25}{|w_n - w_m|^2},\ w \in B_n,\ w_m \notin B'_n.$$

Интегрируя это неравенство по кругу B_n, получим

$$\int_{B_n} \frac{dm(w)}{|w - w_m|^2} \leq \frac{100\pi\tau^2(\lambda_n)}{|w_n - w_m|^2},\ w_m \notin B'_n.$$

Так как $w_n \in B(\lambda_n, 2\tau(\lambda_n))$, то по условию (6) $\tau^2(w_n) \geq \delta^2\tau^2(\lambda_n)$. Таким образом, из последней оценки и из (10) следует соотношение

$$\sum_{w_n \neq w_m \notin B'_n} \int_{B_n} \frac{dm(w)}{|w - w_m|^2} \leq \frac{100\pi}{\delta^2} \sum_{w_n \neq w_m \notin B'_n} \frac{\tau^2(w_n)}{|w_n - w_m|^2} \leq \frac{600(4P)^{12}}{\delta^2} := C. \tag{11}$$

Если номер n такой, что $w_m \in B'_n$, то для любого $w \in B_n$ имеем

$$|w - w_m| \leq |w - \lambda_n| + |w_m - \lambda_n| \leq 2\tau(\lambda_n) + 3\tau(\lambda_n) = 5\tau(\lambda_n).$$

По выбору числа R имеем $|w - w_m| \leq 5\varepsilon R$, то есть круги B_n полностью лежат в круге $B(w_m, 5\varepsilon R)$. Это значит, что круги покрытия, номера которых участвуют в суммировании в (11), покрывают множество $C(R) = B(0, R) \setminus B(w_m, 5\varepsilon R)$. Следовательно,

$$\int_{C(R)} \frac{dm(w)}{|w - w_m|^2} \leq C.$$

Применим замену переменных $w = R\zeta$, $w_m = R\zeta_m$, $\zeta_m \in B(0, 1 + 2\varepsilon)$, получим

$$\int_{B(0,1)\setminus B(\zeta_m, 5\varepsilon)} \frac{dm(\zeta)}{|\zeta - \zeta_m|^2} \leq C.$$

Число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, устремив ε к нулю, получим противоречие.

Теорема 4 доказана. □

4. Весовые гильбертовы пространства целых функций

В этом параграфе мы рассмотрим более конкретные гильбертовы пространства.

Предварительно докажем утверждение, которое при некоторых условиях на субгармоническую функцию u позволяет связать асимптотическое поведение характеристики $\tau(u, z, p)$ с поведением оператора Лапласа функции u.

Лемма 2. *Пусть субгармоническая на плоскости функция u дважды непрерывно дифференцируема, и для любого числа $p > 0$ существует число $b = b(p) \geq 1$ такое, что выполняется условие*

$$\frac{1}{b} \leq \frac{\Delta u(w)}{\Delta u(z)} \leq b,\ \ w \in B(z, \sqrt{8pb}(\Delta u(z))^{-\frac{1}{2}}). \tag{12}$$

Тогда выполняются оценки

$$\sqrt{\frac{8p}{b\Delta u(z)}} \le \tau(u,z,p) \le \sqrt{\frac{8pb}{\Delta u(z)}}. \tag{13}$$

Доказательство. Для краткости введем обозначение $\rho(z) = (\Delta u(z))^{-\frac{1}{2}}$. Как уже отмечалось, величину $\tau = \tau(u,z,p)$ можно определить из условия

$$\max_{w\in\overline{B}(z,\tau)} (H_u(w) - u(w)) = 2p,$$

где H_u — наименьшая гармоническая мажоранта функции u в круге $B(z,\tau)$. По формуле Грина

$$h_u(w) - u(w) = \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)d\mu_u(\zeta),$$

где h_u — наименьшая гармоническая мажоранта функции u в круге $B(z,r)$, $G(w,\zeta)$ — функция Грина этого круга и μ_u — ассоциированная мера функции u. В нашем случае $2\pi d\mu_u(\zeta) = \Delta u(\zeta)dm(\zeta)$, значит, величину τ можем определить из условия

$$\max_{w\in\overline{B}(z,\tau)} \int_{B(z,\tau)} G(w,\zeta)\frac{\Delta u(\zeta)}{2\pi}dm(\zeta) = 2p.$$

Если положить $r = \sqrt{\frac{8p}{b}}\rho(z)$ $(r \le \sqrt{8pb}(\Delta u(z))^{-\frac{1}{2}})$, то

$$\max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{\Delta u(\zeta)}{2\pi}dm(\zeta) \le b\Delta u(z) \max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{dm(\zeta)}{2\pi}.$$

Функция $v(w) = |w-z|^2$ субгармонична, ее ассоциированная мера тождественно равна $\frac{2}{\pi}$, а наименьшая гармоническая мажоранта в круге $B(z,r)$ тождественно равна r^2, поэтому

$$\max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{dm(\zeta)}{2\pi} = \frac{1}{4}\max_{w\in\overline{B}(z,r)} (r^2 - |w-z|^2) = \frac{r^2}{4}.$$

Таким образом,

$$\max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{\Delta u(\zeta)}{2\pi}dm(\zeta) \le \frac{br^2}{4}\Delta u(z),$$

и в условиях теоремы

$$\max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{\Delta u(\zeta)}{2\pi}dm(\zeta) \le \frac{br^2}{4}\Delta u(z) = 2p.$$

Отсюда следует нижняя оценка для $\tau = \tau(u,z,p)$.

Аналогично, взяв $r = \sqrt{8pb}\rho(z)$, получим оценку:

$$\max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{\Delta u(\zeta)}{2\pi}dm(\zeta) \ge \frac{\Delta u(z)}{b} \max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{dm(\zeta)}{2\pi} \ge$$

$$\ge \frac{\Delta u(z)}{b}\cdot\frac{r^2}{4} = 2p.$$

Отсюда следует верхняя оценка для $\tau = \tau(u,z,p)$. □

Покажем, что теоремы 4 и 5 позволяют единообразно описывать ситуации отсутствия безусловных базисов в различных пространствах.

А) В работе [9] доказано, что если $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ — субгармоническая дважды непрерывно дифференцируемая на плоскости функция и для $\rho(z) = (\Delta\varphi(z))^{-\frac{1}{2}}$ выполнены условия:

$$0 < \inf_{r>0} \rho(r) \ \text{ и } \ \rho(r) = o(r), \ \ r\to\infty, \tag{14}$$

а также

$$\rho(r+\rho(r)) = (1+o(1))\rho(r), \ \ r\to\infty \ \text{ и } \ \rho(2r)\asymp\rho(r), \ \ r>0, \tag{15}$$

то в пространстве F_φ (4) безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует.

Условие $\rho(2r)\asymp\rho(r), \ \ r>0$ означает, что найдутся константы $c, C>0$, такие что

$$c<\frac{\rho(2r)}{\rho(r)}<C$$

для всех $r>0$.

Условия (14) означают, что $\varphi(x)$ растет быстрее, чем $(\ln x)^2$, и не быстрее, чем x^2 при $x\to\infty$.

Из выполнения (15) следует, что для $\varphi(z)$ выполнено условие (12) леммы 4.1, а значит, выполняются оценки (13).

Тогда из условий (14) следуют оценки:

$$\sqrt{\frac{8p}{b\Delta\varphi(z)}}\le\tau(\ln K(\lambda), z, p)\le\sqrt{\frac{8pb}{\Delta\varphi(z)}}.$$

Таким образом, выполняются предположения теоремы 4, что означает отсутствие безусловных базисов из воспроизводящих ядер.

Б) Рассмотрим пространство Смирнова $E_2(D)$ и пространство Бергмана $B_2(D)$, где D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости.

Пространство $E_2(D)$ — это пополнение пространства полиномов относительно нормы

$$\|p\|^2=\int_{\partial D}|p(z)|^2\,ds(z),$$

где $ds(z)$ — элемент дуги границы D.

Пространство $B_2(D)$ состоит из функций, аналитических в области D и интегрируемых с квадратом по плоской мере Лебега:

$$B_2(D)=\{f\in H(D): \ \int_D|f(z)|^2\,dm(z)<\infty\}.$$

Система $\{e^{\lambda z}, \ \lambda\in\mathbb{C}\}$ полна в этих пространствах. Это обстоятельство позволяет описать сопряженные пространства $E_2^*(D)$ и $B_2^*(D)$ в терминах преобразований Фурье-Лапласа. Каждому линейному непрерывному функционалу S в этих пространствах поставим в соответствие целую функцию $\widehat{S}(\lambda)=S(e^{\lambda z})$, $\lambda\in\mathbb{C}$, которая называется преобразованием Фурье-Лапласа функционала S.

В работе [12] показано, что преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм пространства $E_2^*(D)$ и гильбертова пространства целых функций $\widehat{E}_2(D)$ с нормой:

$$||F||^2=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})}d\Delta(\varphi)dr, \tag{16}$$

где

$$\Delta(\varphi)=\int_0^\varphi h(\alpha)d\alpha+h'(\varphi), \ \ h(\varphi)=\max_{z\in\overline{D}} Re\, ze^{i\varphi},$$

$$K(\lambda)=\|e^{\lambda z}\|^2_{E_2(D)}=\int_{\partial D}|e^{\lambda z}|^2\,ds(z).$$

В работе [13] доказан изоморфизм пространства $B_2^*(D)$ и гильбертова пространства целых функций $\widehat{B}_2(D)$ с нормой, которая задается формулой (16), где

$$K(\lambda)=\|e^{\lambda z}\|^2_{B_2(D)}=\int_D|e^{\lambda z}|^2\,dm(z). \tag{17}$$

Благодаря этому, задачи о безусловных базисах из экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ в пространствах $E_2(D)$ и $B_2(D)$ оказываются эквивалентными задачам о безусловных базисах из воспроизводящих ядер в сопряженных пространствах целых функций.

В работе [7] доказано, что если на границе области есть точка с конечной ненулевой кривизной, то в пространстве Бергмана безусловные базисы из экспонент не существуют. Это может быть выведено из теоремы 5, так как функция Бергмана в сопряженном пространстве совпадает с функцией (17) и в некотором угле комплексной плоскости $\tau(\lambda) \asymp \sqrt{|\lambda|}$ (см. лемму 7 в [7]).

В работе [14] доказано, что если на границе области есть дуга, в точках которой кривизна отграничена от нуля и от бесконечности постоянными, то в пространстве Смирнова безусловные базисы из экспонент не существуют. Эта теорема аналогичным образом может быть получена из теоремы 5.

В) Пусть I — ограниченный интервал вещественной оси, $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале и $L^2(I,h)$ — пространство локально интегрируемых функций на I, удовлетворяющих условию

$$||f|| := \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)}\,dt} < \infty.$$

В работах [15], [16], [17] описано пространство $\widehat{L}^2(I,h)$. Доказано, что пространство $\widehat{L}^2(I,h)$ изоморфно (как банахово пространство) пространству целых функций F, удовлетворяющих условиям

$$|F(z)| \le C_F\sqrt{K(z)},\ z \in \mathbb{C}.$$

$$||F||^2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)} d\widetilde{h}'(x)dy < \infty,$$

где

$$K(z) = \int_I |e^{2zt}| e^{-2h(t)}dt, \tag{18}$$

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{t\in I}(xt - h(t)).$$

Таким образом, задача о безусловных базисах из экспонент в пространстве $L^2(I,h)$ оказывается эквивалентной задаче о безусловных базисах из воспроизводящих ядер в сопряженном пространстве целых функций $\widehat{L}^2(I,h)$, и функция Бергмана в нем определяется по формуле (18). Значит, теорема 4 или теорема 5 могут применяться как тест на отсутствие безусловных базисов из экспонент в пространстве $L^2(I,h)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N. Aronszajn *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the American Mathematical Society. 1950. V. 68, № 3. P. 337–404.
2. Никольский Н.К., Павлов Б.С., Хрущев С.В. *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер, I* // Препринт ЛОМИ. С. 8–80.
3. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука, 1965. 448 с.
4. Никольский Н.К. *Лекции об операторе сдвига.* М.: Наука, 1980.
5. K. Seip *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space, I* // Reine Angew. Math. 429 (1992). P. 91–106.
6. K. Seip, R. Wallsten *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space, II* // Reine Angew. Math. 429 (1992). P. 107–113.
7. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками* // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 6. С. 69–90.

8. A. Borichev, R. Dhuez, K. Kellay *Sampling and interpolation in large Bergman and Fock spaces* // Journal of Functional Analysis 242 (2007), №2. P. 563–606.
9. A. Borichev, Yu.Lyubarskii *Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces* // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 9 (2010). P. 449-461.
10. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций* // Сиб. мат. ж. 1985. Т.26, № 4. С. 159–175.
11. Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала.* М.: Наука,1966.
12. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Винера–Пэли на функционалы в пространствах Смирнова* // Тр. МИАН, 200 (1991), 245–254.
13. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана* // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68, № 1. С. 5–42.
14. Луценко В.И. *Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 1992.
15. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства* // Матем. заметки. 1990. Т. 48, № 5. С. 80–87.
16. Луценко В.И. *Теорема Пэли–Винера на неограниченном интервале* // Исследования по теории приближений. Уфа, 1989. С. 79–85.
17. Напалков В.В., Башмаков Р.А., Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическое поведение интегралов Лапласа и геометрические характеристики выпуклых функций* // ДАН. 2007. Т. 413, № 1. С. 20–22.
18. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *О безусловных базисах из экспонент в гильбертовых пространствах* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, № 1. С. 3–15.

Константин Петрович Исаев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `orbit81@list.ru`

Юлмухаметов Ринад Салаватович,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `Yulmukhametov@mail.ru`