ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 12-17.

УДК 517.95

О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

С. БАЙЗАЕВ, Д.А. ВОСИТОВА

Аннотация. В статье рассматриваются линейные эллиптические и гиперболические системы первого порядка с постоянными коэффициентами и двумя независимыми переменными. Для таких систем исследованы задачи о многообразии всех решений и решений, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции.

Ключевые слова: эллиптические и гиперболические системы, умеренно растущие решения, степенного роста решения, размерность пространства решений.

Mathematics Subject Classification: 35C11.

1. Рассмотрим систему линейных уравнений с частными производными вида

$$A_1U_x + A_2U_y + A_3U = F(x, y), \tag{1}$$

где $U = (u_1, u_2, ..., u_n)^T-$ искомая вектор-функция, A_1, A_2, A_3- постоянные вещественные матрицы порядка n, $F = (f_1, f_2, ..., f_n)^T-$ заданная вектор-функция.

Как известно (см., например, [1]), система (1) называется *эллиптической*, если его главный символ $P_0(\xi, \eta) = i\xi A_1 + i\eta A_2$ является невырожденным при $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$, т.е.

$$Q(\xi, \eta) \equiv det(\xi A_1 + \eta A_2) \neq 0 \ \forall\, (\xi, \eta) \neq \ (0, 0). \tag{2}$$

Система (1) называется *гиперболической*, если для каждого $\eta \in R$ все решения уравнения $Q(\xi, \eta) = 0$ относительно ξ будут действительными.

В статье для систем вида (1) в случае эллиптичности и гиперболичности исследуются задачи о многообразии всех решений и решений, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции. Вопросам о решениях, определенных во всей плоскости эллиптических и гиперболических уравнений и систем посвящены работы В.С. Виноградова, Э. Мухамадиева, В.П. Паламодова, Н.Е. Товмасяна и др. (см., например, [2 – 4]). Для эллиптических систем вида (1) при $n = 2$ в работе [5] изучены задачи об умеренно растущих решениях и решениях степенного роста.

Будем предполагать, что система (1) эллиптическая или гиперболическая. В этом случае легко доказать, что $detA_1 \neq 0$, а в случае эллиптичности также и $detA_2 \neq 0$. Поэтому систему (1) можно переписать в виде

$$U_x + A_1^{-1}A_2U_y + A_1^{-1}A_3U = A_1^{-1}F(x, y).$$

В связи с этим в дальнейшем систему (1) будем записывать в следующем виде

$$U_x + AU_y + BU = f(x, y), \tag{3}$$

S. Baizaev, D.A. Vositova, On solutions of a system of partial differential equations with two independent variables.

Поступила 27 февраля 2012 г.

где $A = A_1^{-1}A_2,\ B = A_1^{-1}A_3,\ f = A_1^{-1}F$. Тогда условие эллиптичности (2) перепишется в виде неравенства

$$det(\xi E + \eta A) \neq 0\ \forall(\xi, \eta) \neq (0, 0),$$

которое равносильно тому, что матрица A не имеет вещественных собственных значений. Условие гиперболичности системы (3) будет эквивалентно тому, что матрица A имеет только вещественные собственные значения.

Предположим, что матрицы A и B перестановочны. В системе (3) произведем замену искомой функции $U = e^{-Bx}CV$, где C — невырожденная матрица. Тогда имеем

$$-e^{-Bx}BCV + e^{-Bx}CV_x + Ae^{-Bx}CV_y + Be^{-Bx}CV = f(x, y)$$

или

$$V_x + C^{-1}e^{Bx}Ae^{-Bx}CV_y = C^{-1}e^{Bx}f(x, y). \tag{4}$$

В силу перестановочности матриц A и B имеет место равенство $e^{Bx}Ae^{-Bx} = A$. Поэтому система (4) примет вид

$$V_x + C^{-1}ACV_y = g(x, y), \tag{5}$$

где $g(x, y) = C^{-1}e^{Bx}f(x, y)$.

В качестве C возьмем матрицу, приводящую матрицу A к канонической форме Жордана. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ $(m \leqslant n)$ — собственные значения матрицы A. Тогда система (5) распадается на системы меньшей размерности

$$\frac{\partial V_k}{\partial x} + \Lambda_k \frac{\partial V_k}{\partial y} = g_k(x, y),\ \ k = 1, ..., m, \tag{6}$$

где

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

— жордановая клетка порядка s_k, $s_1 + s_2 + ... + s_m = n$, $[V_1, V_2, ..., V_m]^T = V$, $[g_1, g_2, ..., g_m]^T = g$.

Для удобства координаты вектора V_k обозначим через $w_1, w_2, ..., w_\nu$ $(\nu = s_k)$, а координаты вектора g_k– через $h_1, h_2, ..., h_\nu$. Тогда систему, получающуюся из (6) при фиксированном значении k, можно записать в виде

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = h_1(x, y), \tag{7}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial y} = h_2(x, y), \tag{8}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial w_{\nu-1}}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial w_{\nu-1}}{\partial y} + \frac{\partial w_\nu}{\partial y} = h_{\nu-1}(x, y), \tag{9}$$

$$\frac{\partial w_\nu}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial w_\nu}{\partial y} = h_\nu(x, y). \tag{10}$$

Рассмотрим уравнение вида

$$u_x + \lambda u_y = h(x, y), \tag{11}$$

где $\lambda \in C$, условия на функцию $h(x, y)$ будут приведены позже (см. лемму 2).

Лемма 1. *Общее решение однородного уравнения*

$$u_x + \lambda u_y = 0 \tag{12}$$

имеет вид

$$u(x, y) = \varphi(\lambda x - y), \tag{13}$$

где $\varphi(z)$ является произвольной функцией класса $C^1(R)$, если λ вещественное число и является произвольной аналитической функцией комплексного переменного z, если λ — комплексное число.

Доказательство. Утверждение леммы для случая вещественного λ очевидно. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ является комплексным и $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая по z функция. Тогда

$$u_x = \varphi_z(\lambda x - y) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\lambda x - y) = \lambda\varphi_z(\lambda x - y),$$
$$u_y = \varphi_z(\lambda x - y) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\lambda x - y) = -\varphi_z(\lambda x - y).$$

Отсюда следует, что функция $u(x, y) = \varphi(\lambda x - y)$ удовлетворяет уравнению (12).

Теперь покажем, что каждое решение $u(x, y)$ уравнения (12) можно представить в виде (13) с аналитической функцией $\varphi(z)$. Пусть $\zeta = \lambda x - y$. Тогда

$$x = \frac{1}{2i\beta}(\zeta - \overline{\zeta}),\ y = \frac{1}{2i\beta}(\overline{\lambda}\zeta - \lambda\overline{\zeta})$$

и, подставляя эти выражения в функцию $u(x, y)$, получаем функцию переменной $\zeta : u(\zeta) = u[x(\zeta),\ y(\zeta)]$. Вычислим производную $u_{\overline{\zeta}}$:

$$u_{\overline{\zeta}} = u_x \cdot x_{\overline{\zeta}} + u_y \cdot y_{\overline{\zeta}} = u_x(\frac{i}{2\beta}) + u_y(\frac{i\lambda}{2\beta}) = \frac{i\lambda}{2\beta}(u_x + \lambda u_y) = 0,$$

так как $u(x, y)$ — решение уравнения (12). Отсюда следует, что функция $u(\zeta)$ является аналитической по ζ. Поэтому найдется аналитическая функция $\varphi(z)$ такая, что $u = \varphi(\zeta) \equiv \varphi(\lambda x - y)$. Это и требовалось показать.

Лемма 2. *Пусть λ вещественное число, и функция $h(x, y)$ непрерывна по x и имеет непрерывную производную по y. Тогда функция*

$$w(x, y) = \int\limits_{\lambda x - y}^{x} h[t,\ \lambda(t - x) + y]dt \tag{14}$$

будет частным решением неоднородного уравнения (11).

Доказательство. Из формулы (14) с учетом правила дифференцирования интеграла с переменными пределами имеем

$$w_x = h(x, y) - \lambda h[\lambda x - y,\ \lambda(\lambda x - y - x) + y] - \lambda \int\limits_{\lambda x - y}^{x} h_y[\xi,\ \lambda(\xi - x) + y]d\xi,$$

$$w_y = h[\lambda x - y,\ \lambda(\lambda x - y - x) + y] + \int\limits_{\lambda x - y}^{x} h_y[\xi,\ \lambda(\xi - x) + y]d\xi.$$

Отсюда получим

$$w_x + \lambda w_y = h(x, y),$$

т.е. функция $w(x, y)$ является решением неоднородного уравнения (11).

В случае вещественного λ формула

$$u(x, y) = \varphi(\lambda x - y) + \int\limits_{\lambda x - y}^{x} h[\xi,\ \lambda(\xi - x) + y]d\xi$$

дает общее решение неоднородного уравнения (11), где φ — произвольная функция класса C^1.

2. Предположим, что система (3) является гиперболической. Систему (7)–(10) будем решать снизу вверх. Из уравнения (10) в силу леммы 2 находим

$$w_\nu(x,y) = \varphi_\nu(\lambda x - y) + Lh_\nu(x,y),$$

где $Lh_\nu(x,y) = \int\limits_{\lambda x - y}^{x} h_\nu[\xi, \lambda(\xi - x) + y]d\xi$, φ_ν — произвольная функция класса C^1. Подставляя w_ν в уравнение (9), найдем $w_{\nu-1}$:

$$w_{\nu-1}(x,y) = \varphi_{\nu-1}(\lambda x - y) + L[\varphi'_\nu(\lambda x - y) - \frac{\partial}{\partial y}(Lh_\nu)] + Lh_{\nu-1},$$

где $\varphi_{\nu-1}$ — произвольная функция класса C^1.

Далее имеем

$$L\varphi'_\nu(\lambda x - y) = \int\limits_{\lambda x - y}^{x} \varphi'_\nu[\lambda\xi - \lambda(\xi - x) - y]d\xi = \varphi'_\nu(\lambda x - y)(x - \lambda x + y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(Lh_\nu) = h_\nu[\lambda x - y,\ \lambda(\lambda x - y - x) + y] + \int\limits_{\lambda x - y}^{x} \frac{\partial}{\partial y} h_\nu[\xi,\ \lambda(\xi - x) + y]d\xi.$$

Поэтому

$$w_{\nu-1}(x,y) = \varphi_{\nu-1}(\lambda x - y) + \varphi'_\nu(\lambda x - y)(x - \lambda x + y) + h_\nu[\lambda x - y,\ (\lambda - 1)(\lambda x - y)] +$$
$$+ \int\limits_{\lambda x - y}^{x} \frac{\partial}{\partial y} h_\nu[\xi,\ \lambda(\xi - x) + y]d\xi + Lh_{\nu-1}.$$

Продолжая эту процедуру, находим $w_{\nu-2}, ..., w_1$. Нужно отметить, что произвольные функции φ_j, возникающие при интегрировании уравнений (7)–(10), должны иметь соответствующую гладкость, а именно, функция φ_j при $1 \leqslant j \leqslant \nu$ должна принадлежать классу C^j.

Теперь рассмотрим эллиптический случай. Найдем общее решение однородной системы, соответствующей (7)–(10). Из уравнения (10) в силу леммы 1 находим

$$w_\nu(x,y) = \varphi_\nu(\lambda_k x - y),$$

где $\varphi_\nu(z)$ — аналитическая по z функция. Тогда уравнение (9) примет вид

$$\frac{\partial w_{\nu-1}}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial w_{\nu-1}}{\partial y} = \varphi'_\nu(\lambda_k x - y). \tag{15}$$

Функция $w = x\varphi'_\nu(\lambda_k x - y)$ является частным решением уравнения (15). Поэтому общее решение этого уравнения имеет вид

$$w_{\nu-1} = x\varphi'_\nu(\lambda_k x - y) + \varphi_{\nu-1}(\lambda_k x - y),$$

где $\varphi_{\nu-1}(z)$ — аналитическая по z функция. Аналогично находим

$$w_{\nu-2} = x^2\varphi''_\nu(\lambda_k x - y) + x\varphi'_{\nu-1}(\lambda_k x - y) + \varphi_{\nu-2}(\lambda_k x - y),$$

где $\varphi_{\nu-2}(z)$ — аналитическая по z функция. Продолжая эту процедуру, находим $w_{\nu-3}, ..., w_1$.

Пусть матрица A имеет n различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ и $z_1, z_2, ..., z_n$ соответствующие собственные векторы. Если матрицы A и B перестановочны, то как известно (см., например, [6]]), $z_1, z_2, ..., z_n$ будут собственными векторами и матрицы B. Через $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ обозначим собственные значения матрицы B, которым соответствуют собственные векторы $z_1, z_2, ..., z_n$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть матрица A имеет n различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ и $z_1, z_2, ..., z_n$ соответствующие собственные векторы. Пусть матрицы A и B перестановочны. Тогда общее решение однородной системы*

$$U_x + AU_y + BU = 0 \tag{16}$$

имеет вид

$$U(x,y) = C(e^{-\mu_1 x}\varphi_1(\lambda_1 x - y), ..., e^{-\mu_n x}\varphi_n(\lambda_n x - y))^T, \tag{17}$$

где C — матрица, столбцы которой это собственные векторы $z_1, z_2, ..., z_n$ матрицы A, μ_j – собственные значения матрицы B, указанные выше, $\varphi_j(z)-$ функции класса C^1 в случае гиперболичности системы (16) и аналитические по z в случае эллиптичности системы (16).

Доказательство. Так как $C = [z_1, z_2, ..., z_n]$, то замена $U = e^{-Bx}CV$ систему (16) приводит к виду

$$V_x + \Lambda V_y = 0,$$

где $\Lambda = diag[\lambda_1, ..., \ \lambda_n]$. В силу леммы 1 общее решение последней системы имеет вид

$$V(x,y) = [\varphi_1(\lambda_1 x - y), ..., \ \varphi_n(\lambda_n x - y)]^T,$$

где $\varphi_1(z), ..., \ \varphi_n(z)-$ функции класса C^1 в случае гиперболичности системы (16) и аналитические по z в случае эллиптичности системы (16). Поэтому

$$U(x,y) = e^{-Bx}C[\varphi_1(\lambda_1 x - y), ..., \ \varphi_n(\lambda_n x - y)]^T. \tag{18}$$

Так как $z_1, ..., z_n$ собственные векторы матрицы B, соответствующие собственным значениям $\mu_1, ..., \mu_n$, то матрица C приводит матрицу B к диагональному виду $M = diag[\mu_1, ..., \mu_n]$, т.е. $C^{-1}BC = M$. Следовательно, в силу свойств экспоненциала матрицы справедливо равенство

$$e^{-Bx}C = e^{-CMC^{-1}x}C = Ce^{-Mx} = Cdiag[e^{-\mu_1 x}, ..., \ e^{-\mu_n x}].$$

Отсюда и из (18) получим формулу

$$U = Cdiag[e^{-\mu_1 x}, ..., \ e^{-\mu_n x}][\varphi_1(\lambda_1 x - y), ..., \ \varphi_n(\lambda_n x - y)]^T,$$

из которой следует (17). Теорема доказана.

В случае эллиптичности системы (16) общее решение (17) можно также представить в виде

$$U(x,y) = C(e^{-iRe(\lambda_1\overline{\mu_1}x - \mu_1 y)/Im\lambda_1}\psi_1(\lambda_1 x - y), ..., e^{-iRe(\lambda_n\overline{\mu_n}x - \mu_n y)/Im\lambda_n}\psi_n(\lambda_n x - y))^T. \tag{19}$$

Для этого в формулу (17) нужно положить

$$\varphi_j(z) = e^{i\gamma_j z}\psi_j(z),$$

где $\gamma_j = -Re\mu_j/Im\lambda_j, \ \ \psi_j(z)-$ аналитические по z функции.

3. Для однородной системы (16) рассмотрим задачу о решениях, определенных во всей плоскости и удовлетворяющих при $|x| + |y| \to \infty$ условию роста

$$\|U(x,y)\| \leqslant K(1 + |x|^N + |y|^N), \tag{20}$$

где $\|U\| = |u_1| + |u_2| + ... + |u_n|$, $N-$целое неотрицательное число, $K-$постоянная, зависящая от U. Многообразие таких решений образует вещественное линейное пространство, которое обозначим через $\mathcal{P}_\mathcal{N}$.

Пусть система (16) является гиперболической. Тогда числа $\lambda_j, \ \mu_j, \ j = 1, ..., \ n$ будут вещественными. Из формулы (17) в силу (20) получим оценку

$$|e^{-\mu_j x}\varphi_j(\lambda_j x - y)| \leqslant K\|C^{-1}\|(1 + |x|^N + |y|^N), \tag{21}$$

при $|x| + |y| \to \infty$. Отсюда при $x = 0, \ |y| \to \infty$ имеем оценку

$$|\varphi_j(y)| \leqslant K\|C^{-1}\|(1 + |y|^N), \tag{22}$$

а при $y = 0,\ |x| \to \infty$– оценку

$$|e^{-\mu_j x}\varphi_j(\lambda_j x)| \leqslant K\|C^{-1}\|(1 + |x|^N). \tag{23}$$

Из оценки (22) следует, что функция $\varphi_j(t)$ при $|t| \to \infty$ растет не быстрее степенной функции. Тогда из оценки (23) получаем, что либо $\mu_j = 0$ либо $\varphi_j = 0$. Поэтому в гиперболическом случае, если все собственные значения матрицы B ненулевые, то задача (16), (20) имеет только нулевое решение, если же какое-то собственное значение $\mu_{j_0} = 0$, то, взяв в формуле (17) в качестве функции $\varphi_{j_0}(t)$ функцию класса C^1, растущую при $|t| \to \infty$ не быстрее степенной функции, и полагая $\varphi_j = 0$ для $\mu_j \neq 0$, получим ненулевые решения задачи (16), (20). В этом случае пространство $\mathcal{P}_N$ будет бесконечномерным.

Пусть теперь система (16) является эллиптической. Из формулы (19) в силу (20) получим оценку

$$|\psi_j(\lambda_j x - y)| \leqslant K\|C^{-1}\|(1 + |x|^N + |y|^N)$$

при $|x|+|y| \to \infty$. Так как функция $\psi_j(z)$ аналитическая по z, то в силу теоремы Лиувилля она будет полиномом относительно z степени не выше N. Поэтому решения задачи (16), (20) имеют вид

$$U(x,y) = C(e^{-iRe(\lambda_1\overline{\mu_1}x - \mu_1 y)/Im\lambda_1} p_{1N}(\lambda_1 x - y), ...,$$
$$e^{-iRe(\lambda_n\overline{\mu_n}x - \mu_n y)/Im\lambda_n} p_{nN}(\lambda_n x - y))^T,$$

где $p_{jN}(z)$ полиномы относительно z степени не выше N. Тогда пространство $\mathcal{P}_N$ будет конечномерным, и его размерность равна $(N+1)n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.* М.: Мир, 1986, 455 с.
2. Виноградов В.С. О теореме Лиувилля для обобщенных аналитических функций // *ДАН СССР,* 1968. Т. 183, № 3. С. 503–506.
3. Мухамадиев Э., Байзаев С. О нётеровости и индексе эллиптических операторов 1-го порядка на плоскости // *Доклады АН ТаджССР,* 1987. Т. 30, № 4. С. 206–210.
4. Байзаев С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости. Новосибирск. НГУ, 1999. 74 с.
5. Байзаев С., Воситова Д.А. О решениях одной эллиптической системы в пространстве функций умеренного роста // *Вестник Таджикского госуниверситета права, бизнеса и политики. 2009.* №1 (37). - С. 92 – 96.
6. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* М.: Наука, 1967. 576 с.

Саттор Байзаев,
Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета,
ул. Белова, 21,
453838, г. Сибай, Россия
E-mail: baisat54@rambler.ru

Дилором Абдурасуловна Воситова,
Худжандский государственный университет,
ул. Мавлонбекова, 2,
735700, г. Худжанд, Республика Таджикистан
E-mail: rasuli@mail.ru