ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 13. № 3 (2021). С. 155-177.

УДК 517.977.56

# О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛА В ЗАДАЧЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

**А.В. ЧЕРНОВ**

**Аннотация.** Для задачи параметрической оптимизации по интегральному критерию коэффициента и правой части полулинейного дифференциального уравнения глобальной электрической цепи получены формулы частных производных первого порядка целевого функционала по управляемым параметрам. В такой форме может быть представлена задача восстановления неизвестных параметров уравнения по данным наблюдений с локальных датчиков. В работе обобщается аналогичный результат, полученный автором ранее для случая линейного уравнения глобальной электрической цепи. Однако у специалистов существует мнение, что правая часть уравнения (имеющая смысл объемной плотности сторонних токов) на самом деле зависит от градиента (относительно пространственных переменных) неизвестной функции электрического потенциала. В связи с этим и возникает необходимость изучения полулинейного уравнения. Используются условия сохранения глобальной разрешимости полулинейного уравнения глобальной электрической цепи, а также оценки приращения решения, полученные автором ранее. Математическая новизна представляемого исследования обусловлена тем, что, в отличие от линейного случая, правая часть зависит теперь (причем нелинейно) от состояния (зависящего, в свою очередь, от управляемых параметров). Такой, существенно более сложный и нелинейный характер зависимости состояния от управляемых параметров, потребовал, в частности, разработки специальной методики оценки дополнительно возникающих остатков в формуле приращения решения.

**Ключевые слова:** управление коэффициентом и правой частью, параметрическая оптимизация, полулинейное дифференциальное уравнение глобальной электрической цепи.

**Mathematics Subject Classification:** 47J05, 47J35, 47N10

## 1. Введение

Линейное уравнение следующего вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi(t,x) + 4\pi\mathrm{div}\,\big(\sigma(x)\nabla\varphi(t,x)\big) = 4\pi\,\mathrm{div}\,\vec{J}^{\text{ст}}(t,x), \tag{1.1}$$

где $t\in[0;T]$ – время, $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^3$ – пространственная переменная, в физической (и смежной математической) литературе называют *уравнением глобальной электрической цепи* в терминах потенциалов в квазистационарном приближении. В математической литературе уравнения подобного вида, в том числе не разрешенные относительно производной

A.V. Chernov, On differentiation of a functional in the problem of parametric coefficient optimization in semilinear global electric circuit equation.



*Поступила 28 августа 2020 г.*

по времени, называют уравнениями соболевского типа или псевдопараболическими уравнениями (см., например, [1]). В случае уравнения (1.1) неизвестная функция $\varphi(t,x)$ трактуется как скалярный электрический потенциал, а $\vec{J}^{\text{ст}}$ – как объемная плотность сторонних (квазистационарных) токов. Подробную библиографию на этот счет, а также все, что касается физического смысла уравнения (1.1) и корректной постановки начально-краевых условий для него (см. в [2], [3]). По поводу термина «глобальная электрическая цепь» приведем (в собственном переводе) цитату из [3]: "Термин «глобальная электрическая цепь» относится к распределению электрических токов в атмосфере Земли; это $<\ldots>$, в частности, молниевые токи, токи, связанные с выпадением осадков и токи корональных выбросов, но его наиболее важной составляющей являются $<\ldots>$ квазистационарные токи, которые текут непрерывно и $<\ldots>$ поддерживаются постоянной разностью зарядов в $<\ldots>$ электрически заряженных облаках".

Сделаем краткий обзор работ по проблеме моделирования глобальной электрической цепи (ГЭЦ). Физические механизмы формирования ГЭЦ в атмосфере Земли излагаются в [4]. Достижения и перспективы исследований ГЭЦ обсуждаются в [5]. Модели ГЭЦ, учитывающие топографию земной поверхности, конструируются в [6], [7]. Стационарная и нестационарная модели ГЭЦ с учетом грозовых облаков как генераторов электрического поля атмосферы, различных космических факторов, аэрозольных частиц и радиоактивных веществ, подробно изучаются в [8], [9]. В [10] исследуется электрическое поле и ток внутри и около стационарной мезомасштабной конвективной системы и ее вклад в ГЭЦ. В [11] предлагается схема моделирования ГЭЦ, собирающая эффекты от тропосферы до ионосферы, изучавшиеся ранее по отдельности, в единую модель. В [12] разрабатывается эффективная численная модель, основанная на методе обобщенных конечных разностей с применением радиальных базисных функций для симуляции ГЭЦ в атмосфере Земли с учетом топографии земной поверхности. В [13] исследуется альтернативный способ выбора краевых условий для стационарного аналога уравнения (1.1). В приведенных здесь источниках см. также дополнительную библиографию. Вернемся вновь к уравнению (1.1).

На практике, как правило, известны лишь некоторые параметрические представления коэффициента и правой части, то есть $\sigma=\sigma(x;\upsilon_1)$, $\vec{J}^{\text{ст}}=\vec{J}^{\text{ст}}(t,x;\upsilon_2)$, где параметры $\upsilon_1$, $\upsilon_2\in\mathbb{R}$ неизвестны (их может быть и больше; для дальнейшего изложения это, вообще говоря, не существенно). Задачу восстановления неизвестных параметров по данным наблюдений можно (при определенных условиях) представить как задачу минимизации некоторого интегрального функционала, зависящего от $\varphi$, а фактически, от неизвестных параметров. Для того, чтобы можно было применить тот или иной численный метод минимизации первого порядка, нужно знать градиент такой функции. Тем самым, возникает вопрос о вычислении частных производных указанной функции по переменным $\upsilon_1$, $\upsilon_2\in\mathbb{R}$. В связи с этим, в работе [14] для уравнения вида (1.1) (по поводу стационарного случая см. также [15], [16]) исследовалась проблема вычисления частных производных интегрального функционала, определенного на его решениях, по управляемым параметрам $\upsilon_1$, $\upsilon_2\in\mathbb{R}$. Начально-краевые условия были взяты из [2]. Отметим, что в [3] приводятся также и другие постановки начально-краевых условий с обоснованием их корректности. Вопросы единственности решения обратной задачи восстановления неизвестных параметров для стационарного случая рассматривались в работах [17], [18] (для нестационарного случая можно провести аналогичные построения).

Как указано в [19], у специалистов существует мнение, что объемная плотность сторонних токов на самом деле зависит от градиента (относительно пространственных переменных) потенциала. Но в таком случае, возникает необходимость изучения полулинейного аналога уравнения (1.1) (в частности, при тех же начально-краевых условиях), который отличается тем, что в правую часть входит также градиент функции $\varphi$. Условия локального и тотального сохранения глобальной разрешимости полулинейного уравнения глобальной электрической цепи, полезные при исследовании различных вопросов управления таким уравнением, были получены, соответственно, в работах [19], [20]. Здесь мы будем пользоваться условиями (а также оценкой разности решений), установленными в [19].

Как уже было сказано, мы изучаем полулинейный управляемый аналог уравнения (1.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi(t,x)+4\pi\mathrm{div}\,\big(\sigma(t,x;\upsilon_1)\nabla\varphi(t,x)\big)=4\pi\,\mathrm{div}\,\vec{J}^{\text{ст}}(t,x;\nabla\varphi;\upsilon_2), \tag{1.2}$$

где $t\in[0;T]$ – время, $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^3$ – пространственная переменная. Здесь $\upsilon_i\in\mathcal{D}_i$, $i=1,2$, мы понимаем как управляемые параметры. Для уравнения (1.2) при естественных для него начально-краевых условиях исследуется параметрическая оптимизация коэффициента и правой части. А именно, для целевого интегрального функционала, определенного на решениях указанной задачи, выводятся формулы частных производных первого порядка по управляемым параметрам $\upsilon_1$, $\upsilon_2\in\mathbb{R}$. При этом применяется методика, аналогичная использованной ранее в работе [14] при исследовании линейного аналога уравнения (1.2). Математическая новизна представляемого исследования обусловлена тем, что, в отличие от линейного случая, изучавшегося ранее, правая часть зависит теперь (причем нелинейно) от состояния (зависящего, в свою очередь, от управляемых параметров в старшем коэффициенте). Такой, существенно более сложный и нелинейный характер зависимости состояния от управляемых параметров, потребовал, в частности, разработки специальной методики оценки дополнительно возникающих остатков в формуле приращения решения. Новая методика позволила, в частности, ослабить условия относительно интегранта функционала даже по сравнению с линейным случаем. Там же, где по сравнению с линейным случаем не появляется ничего принципиально нового, мы просто ссылаемся на материал работы [14]. Ограничение количества управляемых параметров числом 2 (по одному на каждый тип вхождения) вводится только для упрощения формулировок утверждений и выкладок и не является сколько-нибудь существенным.

Отметим, что на данный момент существует не так много работ, посвященных исследованию задач оптимального управления (старшими) коэффициентами уравнений с частными производными. Из недавних упомянем, например, статью [21], где исследовались вопросы конечно-разностной аппроксимации (в совокупности – и по состоянию, и по управлению) задачи оптимизации старших коэффициентов полулинейного эллиптического уравнения второго порядка в двумерной выпуклой области. Там же смотрите дальнейшую библиографию.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – измеримое (по умолчанию – в смысле Лебега) ограниченное множество, в частности, ограниченная область; $n\geqslant 1$; $X$ – произвольное банахово пространство; $T>0$. Для удобства читателя напомним определения используемых далее функциональных пространств (для $\ell\in\mathbb{N}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$). Что касается лебеговых пространств $L_p(\Omega)$ и пространств Соболева $W_p^\ell(\Omega)$, их определения стандартны и общеизвестны (см., например, [22, §1.1]); $L_p^\ell(\Omega)=\underbrace{L_p(\Omega)\times\ldots\times L_p(\Omega)}_{\ell\ \text{раз}}$ с нормой

$$\|\psi\|_{L_p^\ell(\Omega)}=\big\|\,|\psi|\,\big\|_{L_p(\Omega)},\qquad |\psi|=\sum_{j=1}^{\ell}|\psi_j|,\qquad \psi=(\psi_1,\ldots,\psi_\ell)\in L_p^\ell(\Omega);$$

$\overset{\circ}{W}{}_p^{\ell}(\Omega)$ — множество всех элементов пространства $W_p^\ell(\Omega)$ с носителем в области $\Omega$. При $p=2$ используются обозначения $H^\ell(\Omega)=W_2^\ell(\Omega)$, $H_0^\ell(\Omega)=\overset{\circ}{W}{}_2^{\ell}(\Omega)$.

Функция $\varphi : [0;T] \to X$ называется непрерывной в точке $t \in [0;T]$, если

$$\|\varphi(t+h) - \varphi(t)\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0, \quad t+h \in [0;T].$$

Та же функция называется дифференцируемой в точке $t \in [0;T]$, если существует элемент $\psi \in X$ такой, что

$$\Big\|h^{-1}\big(\varphi(t+h) - \varphi(t)\big) - \psi\Big\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0, \quad t+h \in [0;T].$$

Элемент $\psi$ называется производной функции $\varphi(t)$ в точке $t$ и обозначается $\varphi'(t)$. Производная второго порядка определяется как производная от производной и т.д.

Для $k = 0, 1, \ldots$ множество всех функций $\varphi : [0;T] \to X$, обладающих непрерывными производными до порядка $k$ включительно, наделенное нормой

$$\|\varphi\| = \sum_{j=0}^{k} \max_{t\in[0;T]} \big\|\varphi^{(j)}(t)\big\|_X,$$

обозначается $\mathbf{C}^k\big([0;T];X\big)$. Такое пространство является банаховым (см., например, [23, глава IV, §1, с. 148]).

Для $p \in [1;\infty)$ через $L_p\big([0;T];X\big)$ обозначается множество всех измеримых по Бохнеру функций (об измеримости по Бохнеру см., например, [23, глава IV, §1]) $\varphi : [0;T] \to X$, для которых[1] конечно значение $\int\limits_0^T \big\|\varphi(t)\big\|_X^p \, dt$. Норма в таком пространстве вводится следующим образом:

$$\|\varphi\|_{L_p\left([0;T];X\right)} = \left(\int\limits_0^T \big\|\varphi(t)\big\|_X^p \, dt\right)^{1/p}.$$

Такое пространство является банаховым (см., например, [23, глава IV, §1, теорема 1.11, с. 154]).

## 2. Постановка задачи и основные соглашения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область, диффеоморфная шаровому слою, причем существует точка в пространстве[2] такая, что луч, выходящий из нее в произвольном направлении, пересекает границу области $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ровно в двух точках – по одной на каждую компоненту связности $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, причем обе эти компоненты связности диффеоморфны сфере в $\mathbb{R}^3$. С физической точки зрения, $\Omega$ понимается как атмосфера Земли. Обозначим $V(\Omega)$ — множество всех функций $\psi \in H^1(\Omega)$, для каждой из которых след $\psi\Big|_{\Gamma_1}$ нулевой, а след $\psi\Big|_{\Gamma_2}$ постоянный (то есть существует константа $c \in \mathbb{R}$, своя для каждой функции $\psi$, такая, что $\psi\Big|_{\Gamma_2} = c$). В [2] уже было показано (см. также лемму 3.1 далее), что множество $V(\Omega)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением вида

$$(\varphi, \psi)_{V(\Omega)} = \int\limits_\Omega \big(\nabla\varphi(x) \cdot \nabla\psi(x)\big)\, dx,$$

где символ “ $\cdot$ ” означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

[1] Из измеримости по Бохнеру функции $\varphi(t)$ следует измеримость числовой функции $\big\|\varphi(t)\big\|_X$ на $[0;T]$ (но не наоборот!), см., например, [25, глава V, §4, доказательство теоремы Петтиса].

[2] Для шарового слоя это будет, например, центр шара.

Пусть $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{R}$ – заданные выпуклые множества, $i = 1, 2$; $\sigma_*$, $\sigma^*$, $\overline{\sigma}_*$, $\overline{\sigma}^*$ – заданные числа такие, что

$$0 < \overline{\sigma}_* \leqslant \sigma_* \leqslant \sigma^*, \qquad \overline{\sigma}^* > 0.$$

Определим класс $\Sigma(\sigma_*, \sigma^*)$ всех функций $\sigma(t, x; \upsilon_1) : [0; T] \times \Omega \times \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$, дифференцируемых по $\upsilon_1 \in \mathcal{D}_1$ и вместе с производной $\sigma'_{\upsilon_1}(t, x; \upsilon_1)$ непрерывных по $\upsilon_1 \in \mathcal{D}_1$, ограниченных на ограниченных множествах и таких, что $\sigma(.,.;\upsilon_1)$, $\sigma'_{\upsilon_1}(.,.;\upsilon_1) \in \mathbf{C}\big([0;T]; L_\infty(\Omega)\big)$, $\sigma_* \leqslant \sigma(t, x; \upsilon_1) \leqslant \sigma^*$ для п.в. $x \in \Omega$, $\forall\, t \in [0; T]$, $\upsilon_1 \in \mathcal{D}_1$.

Определим также класс $\mathbb{F}$ всех вектор-функций

$$\vec{f}(t, x; \eta; \upsilon_2) : [0; T] \times \Omega \times \mathbb{R}^3 \times \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}^3,$$

вместе с производными $\vec{f}'_\eta(t, x; \eta; \upsilon_2)$, $\vec{f}'_{\upsilon_2}(t, x; \eta; \upsilon_2)$ измеримых по $(t, x) \in [0; T] \times \Omega$, непрерывных по $(\eta; \upsilon_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathcal{D}_2$ и удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned}
&\vec{f}(.,.;\nabla\varphi;\upsilon_2),\ \vec{f}'_{\upsilon_2}\big(.,.;\nabla\varphi,\upsilon_2\big) \in \mathbf{C}\big([0;T]; L_2^3(\Omega)\big),\\
&\vec{f}'_\eta\big(.,.;\nabla\varphi, u(.)\big) \in \mathbf{C}\big([0;T]; L_\infty^{3\times3}(\Omega)\big),\\
&\vec{f}'_\eta(t,x;\eta;\upsilon_2)\xi\cdot\xi \leqslant \overline{\sigma}_*\,|\xi|^2, \qquad \big|\vec{f}'_\eta(t,x;\eta;\upsilon_2)\xi\big| \leqslant \overline{\sigma}^*|\xi| \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^3,\\
&\big\|\vec{f}'_{\upsilon_2}\big(t,.;\eta;\upsilon_2\big)\big\|_{L_2^3(\Omega)} \leqslant \mathcal{N}\big(\|\eta\|_{L_2^3(\Omega)}\big) \quad \forall\, \eta \in L_2^3(\Omega),
\end{aligned}$$

для п.в. $x \in \Omega$ и всех $t \in [0; T]$, $\varphi \in \mathbf{C}\big([0;T]; V(\Omega)\big)$, $\upsilon_2 \in \mathcal{D}_2$, $u \in L_\infty(\Omega)$, $\|u\|_{L_\infty} \leqslant 1$ (вместо 1 можно взять любую положительную константу). Кроме того, будем считать, что задана функция $\varphi_0 \in V(\Omega)$.

Для $\upsilon = (\upsilon_1; \upsilon_2) \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, $\sigma \in \Sigma(\sigma_*, \sigma^*)$, $\vec{f} \in \mathbb{F}$ будем рассматривать полулинейное дифференциальное уравнение вида (1.2):

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi(t,x) + \operatorname{div}\big(\sigma(t,x;\upsilon_1)\nabla\varphi(t,x)\big) = \operatorname{div}\vec{f}(t,x;\nabla\varphi;\upsilon_2). \tag{2.1}$$

Для достаточно гладкой вектор-функции $\vec{g}(t, x)$ рассмотрим линейный аналог:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi(t,x) + \operatorname{div}\big(\sigma(t,x;\upsilon_1)\nabla\varphi(t,x)\big) = \operatorname{div}\vec{g}(t,x). \tag{2.2}$$

Как показано в [2], при выполнении краевых условий вида

$$\int\limits_{\Gamma_2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial\vec{n}} + \sigma(t,x;\upsilon_1)\,\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial\vec{n}} - \vec{g}_{\vec{n}}(t,x)\right) d\ell = 0, \quad t \in (0;T], \tag{2.3}$$

где $\vec{g}_{\vec{n}}$ – нормальная составляющая вектора $\vec{g}$, $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности $\Gamma_2$,

$$\varphi(t,x)\,\Big|_{x\in\Gamma_1} = 0, \quad \varphi(t,x)\,\Big|_{x\in\Gamma_2} = C(t), \quad t \in (0;T], \tag{2.4}$$

равенство (2.2), записанное для достаточно гладкой функции $\varphi(t, x)$, можно преобразовать к интегральному тождеству вида

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \big(\nabla\varphi(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx &+ \int\limits_\Omega \sigma(x;\upsilon_1)\big(\nabla\varphi(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx\\
&= \int\limits_\Omega \big(\vec{g}(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx \quad \text{для} \quad t \in (0;T], \quad \psi \in V(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Соответственно, для $\vec{g} \in \mathbf{C}\big([0;T]; L_2^3(\Omega)\big)$ можно определить обобщенное решение уравнения (2.2) в совокупности с краевыми условиями (2.3), (2.4) и начальным условием

$$\varphi(t,x)\,\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.6}$$

как функцию $\varphi \in \mathbf{C}^1\big([0;T]; V(\Omega)\big)$, удовлетворяющую тождеству (2.5) и начальному условию (2.6).

Как показано в [2], для случая $\sigma = \sigma(x; \upsilon_1)$ (то есть коэффициента, не зависящего от времени) задача (2.5), (2.6) имеет единственное решение в пространстве $\mathbf{C}^1\big([0;T]; V(\Omega)\big)$ при любом выборе функций $\varphi_0 \in V(\Omega)$, $\vec{g} \in \mathbf{C}\big([0;T]; L_2^3(\Omega)\big)$. Это означает, что обобщенное решение задачи (2.2), (2.3), (2.4), (2.6) в данном случае определено корректно. Далее мы покажем, что при наличии зависимости коэффициента $\sigma$ от переменной времени $t$ корректность понятия обобщенного решения сохраняется. Исследование описанного случая зависимости коэффициента от времени нам необходимо для того, чтобы можно было осуществить вычисление производных по управляемым параметрам интегрального функционала, определенного на решениях управляемой задачи. Дело в том, что в формулах указанных производных будут присутствовать функции, являющиеся решениями аналогичной задачи (понимаемой в смысле интегрального тождества) с коэффициентом, содержащим производную правой части $\vec{f}'_\eta(t,x;\nabla\varphi;\upsilon_2)$ (и более того, в отличие от $\sigma$, эта производная является матрицей).

Итак, обобщенное решение задачи (2.2), (2.3), (2.4), (2.6) будем понимать как функцию $\varphi \in \mathbf{C}^1\big([0;T]; V(\Omega)\big)$, удовлетворяющую интегральному тождеству (2.5) и начальному условию (2.6).

Аналогичным образом, для уравнения (2.1) будем ставить начально-краевые условия (2.4), (2.6), а также условия

$$\int\limits_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial \vec{n}} + \sigma(t,x;\upsilon_1)\,\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial \vec{n}} - \vec{f}_{\vec{n}}(t,x;\nabla\varphi;\upsilon_2) \right) d\ell = 0, \tag{2.7}$$

$t \in (0;T]$. Решение задачи (2.1), (2.4), (2.6), (2.7) будем понимать как функцию $\varphi$ из класса $\mathbf{C}^1\big([0;T]; V(\Omega)\big)$, удовлетворяющую тождеству

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} \big(\nabla\varphi(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx + \int\limits_{\Omega} \sigma(t,x;\upsilon_1)\big(\nabla\varphi(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx \\ = \int\limits_{\Omega} \big(\vec{f}(t,x;\nabla\varphi;\upsilon_2)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx \quad \text{для} \quad t \in (0;T], \quad \psi \in V(\Omega), \end{aligned} \tag{2.8}$$

и начальному условию (2.6).

**Замечание 2.1.** *Таким образом, решение $\varphi$ мы ищем в пространстве $\mathbf{C}^1\big([0;T]; V(\Omega)\big)$. Согласно определению этого пространства, при заданном $t \in [0;T]$ соответствующая функция $\varphi(t,.)$ принадлежит пространству $V(\Omega)$. Иными словами, $\varphi(t,.) \in H^1(\Omega)$, причем ее след вдоль поверхности $\Gamma_1$ равен нулю, а вдоль поверхности $\Gamma_2$ не зависит от $x \in \Omega$ (но, вообще говоря, может зависеть от $t$, учитывая, что момент времени $t$ фиксирован, а константа $c$ в определении $V(\Omega)$ своя для каждой функции из $V(\Omega)$). Поэтому задание граничных условий в определении пространства $V(\Omega)$ диктуется граничными условиями* (2.4)*. Что касается физического смысла этих условий, см.* [2], [3].

Предположим, что задана функция $F(t,x,\xi,\upsilon) : [0;T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathcal{D} \to \mathbb{R}$, вместе со своими производными $F'_\xi(t,x,\xi,\upsilon)$, $F'_\upsilon(t,x,\xi,\upsilon)$, измеримая по $(t,x) \in [0;T]\times\Omega \equiv \Pi$, непрерывная по $(\xi;\upsilon) \in \mathbb{R}\times\mathcal{D}$ и такая, что $F(.,.,\varphi,\upsilon) \in L_1(\Pi)$ для всех $\varphi \in \mathbf{C}^1\big([0;T]; V(\Omega)\big)$, $\upsilon \in \mathcal{D}$;

$F'_\upsilon(.,.,\varphi,u) \in L^2_1(\Pi)$ для всех $\varphi \in \mathbf{C}^1\big([0;T];V(\Omega)\big)$, $u \in L^2_\infty(\Pi)$; и $F'_\xi(.,.,\varphi,u) \in L_{q'}(\Pi)$ для всех $\varphi \in L_q(\Pi)$, $u \in L^2_\infty(\Pi)$, $\|u\|_{L^2_\infty} \leqslant 1$, где $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$, $q \in [2;6)$. Согласно теореме вложения Соболева, а также лемме 3.1 (см. далее), имеет место ограниченное (а значит, непрерывное) вложение $V(\Omega) \subset W^1_2(\Omega) \subset L_q(\Omega)$. Следовательно, $\mathbf{C}\big([0;T];V(\Omega)\big) \subset L_q(\Pi)$.

Обозначим $\mathcal{D}'$ — множество всех $\upsilon \in \mathcal{D}$, для каждого из которых существует единственное решение задачи (2.1), (2.4), (2.6), (2.7). Решение $\varphi$, отвечающее набору $\upsilon \in \mathcal{D}'$, будем обозначать $\varphi[\upsilon]$. Тем самым, имеет смысл интегральный функционал

$$J[\upsilon] = \int\limits_0^T dt \int\limits_\Omega F\big(t,x,\varphi[\upsilon](t,x),\upsilon\big)\,dx, \quad \upsilon \in \mathcal{D}'.$$

Функционал $J[\upsilon]$ можно понимать как целевой функционал в задаче параметрической оптимизации: $J[\upsilon] \to \min$, $\upsilon \in \mathcal{D}'$. Как поясняется в [14], в такой форме, в частности, можно представлять задачи восстановления коэффициентов уравнения (2.1). Далее (см. лемму 3.8) будет показано, что множество $\mathcal{D}'$ открыто в $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}^2$. Тем самым, можно ставить вопрос о дифференцировании функционала $J[\upsilon]$ на множестве $\mathcal{D}'$.

**Теорема 2.1.** *При сделанных предположениях функция $J[\upsilon]$, $\upsilon \in \mathcal{D}'$, имеет частные производные по обеим переменным, и справедливы формулы:*

$$\frac{\partial J}{\partial \upsilon_1} = \iint\limits_\Pi \Big(F'_\xi\big(t,x,\varphi[\upsilon](t,x),\upsilon\big)y(t,x) + F'_{\upsilon_1}\big(t,x,\varphi[\upsilon](t,x),\upsilon\big)\Big)\,dt\,dx, \tag{2.9}$$

*или* [1], *при дополнительном условии*

$$F'_\xi(.,.;\varphi[\upsilon];\upsilon) \in \mathbf{C}\big([0;T];L_{q'}(\Omega)\big), \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \upsilon_1} = \iint\limits_\Pi \Big(-\big(\sigma'_{\upsilon_1}(t,x;\upsilon_1)\big)\nabla p \cdot \nabla\varphi[\upsilon] + F'_{\upsilon_1}\big(t,x,\varphi[\upsilon],\upsilon\big)\Big)\,dt\,dx, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \upsilon_2} = \iint\limits_\Pi \Big(F'_\xi\big(t,x,\varphi[\upsilon](t,x),\upsilon\big)z(t,x) + F'_{\upsilon_2}\big(t,x,\varphi[\upsilon](t,x),\upsilon\big)\Big)\,dt\,dx,$$

*или, при дополнительном условии* (2.10),

$$\frac{\partial J}{\partial \upsilon_2} = \iint\limits_\Pi \Big(\vec{f}'_{\upsilon_2}(t,x;\nabla\varphi[\upsilon];\upsilon_2) \cdot \nabla p(t,x) + F'_{\upsilon_2}\big(t,x,\varphi[\upsilon](t,x),\upsilon\big)\Big)\,dt\,dx,$$

*где $y \in \mathbf{C}^1\big([0;T],V(\Omega)\big)$ – единственное решение задачи*

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \big(\nabla y(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx + \int\limits_\Omega \mathcal{S}(t,x)\nabla y(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx \\ = -\int\limits_\Omega \big(\sigma'_{\upsilon_1}(t,x;\upsilon_1)\nabla\varphi[\upsilon]\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx,\ t \in (0;T],\ \forall\psi \in V(\Omega),\end{gathered} \tag{2.12}$$

[1] Имеется в виду, что данные две формулы равносильны.

*где* $\mathcal{S}(t,x) = \sigma(t,x;\upsilon_1)E - \vec{f}_\eta{}'(t,x;\nabla\varphi[\upsilon];\upsilon_2)$, $E$ *— единичная матрица, с начальным условием* $y(0,x) = 0$, $x \in \Omega$*; а* $z \in \mathbf{C}^1\big([0;T], V(\Omega)\big)$ *– единственное решение задачи*

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \big(\nabla z(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx + \int\limits_\Omega \mathcal{S}(t,x)\nabla z(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx \\ = \int\limits_\Omega \big(\vec{f}'_{\upsilon_2}(t,x;\nabla\varphi[\upsilon];\upsilon_2)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx \quad \text{для} \quad t\in(0;T], \qquad \psi\in V(\Omega), \end{gathered} \tag{2.13}$$

*с начальным условием* $z(0,x) = 0$, $x \in \Omega$*;* $p \in \mathbf{C}^1\big([0;T], V(\Omega)\big)$ *– единственное решение сопряженной задачи*

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \big(\nabla p(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx + \int\limits_\Omega \mathcal{S}(t,x)\nabla p(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx \\ = \int\limits_\Omega F'_\xi\big(t,x,\varphi[\upsilon],\upsilon\big)\,\psi(x)\,dx \quad \text{для} \quad t\in(0;T], \quad \psi\in V(\Omega), \end{gathered} \tag{2.14}$$

*с финальным условием* $p(T,x) = 0$, $x \in \Omega$.

Доказательство теоремы 2.1 см. в разделе 4.

## 3. Вспомогательные утверждения

Для доказательства теоремы 2.1 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений. Следующее утверждение, представляющее собой аналог известного неравенства Пуанкаре – Фридрихса, было доказано в [2].

**Лемма 3.1.** *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– ограниченная область, диффеоморфная шаровому слою, причем существует точка в пространстве такая, что луч, выходящий из нее в произвольном направлении, пересекает границу области* $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ *ровно в двух точках – по одной на каждую компоненту связности* $\Gamma_1$, $\Gamma_2$*, причем обе эти компоненты связности диффеоморфны сфере в* $\mathbb{R}^3$*. Тогда существует константа* $C > 0$*, зависящая только от области* $\Omega$*, такая, что*

$$\int\limits_\Omega \big|\psi(x)\big|^2\,dx \leqslant C\int\limits_\Omega \big|\nabla\psi(x)\big|^2\,dx = C\,\|\psi\|^2_{V(\Omega)} \quad \forall\psi\in V(\Omega).$$

*Следовательно, имеет место ограниченное вложение* $V(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

**Лемма 3.2.** *Пусть* $\zeta, \eta \in \mathbf{C}^1\big([0;T]; V(\Omega)\big)$*. Тогда*

$$\frac{d}{dt}\big(\zeta(t,.),\eta(t,.)\big)_{V(\Omega)} = \left(\frac{d}{dt}\zeta(t,.),\eta(t,.)\right)_{V(\Omega)} + \left(\zeta(t,.),\frac{d}{dt}\eta(t,.)\right)_{V(\Omega)}$$

*для всех* $t \in (0;T]$.

Доказательство см. в [14].

Следующее утверждение известно как теорема Ф. Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве (см., например, [24, §5.7, теорема 5.7, с. 83], [25, III, 6, с. 132]).

**Лемма 3.3.** *Пусть на гильбертовом пространстве* $H$ *задан линейный непрерывный функционал* $F$*. Тогда существует однозначно определенный элемент* $\varphi \in H$ *такой, что* $F[\omega] = (\varphi,\omega)$ *для всех* $\omega \in H$ *и выполнено равенство* $\|F\| = \|\varphi\|$.

Следующее утверждение известно как теорема Лакса – Мильграма (см., например, [24, §5.8, теорема 5.8, с. 84]).

**Лемма 3.4.** *Пусть $H$ – вещественное гильбертово пространство; $B : H \times H \to \mathbb{R}$ – билинейная форма, которая является ограниченной и коэрцитивной, то есть существуют константы $\gamma_1$, $\gamma_2 > 0$ такие, что*

$$\big|B[x,y]\big| \leqslant \gamma_2 \|x\|\,\|y\|, \qquad B(x,x) \geqslant \gamma_1 \|x\|^2, \qquad x, y \in H.$$

*Тогда для любого $\psi \in H^*$ существует единственный элемент $x \in H$ такой, что $B[x,.] = \psi$.*

Следующее утверждение является, по сути дела, аналогом утверждения [25, III, 7, с. 134], представленного там как специальный вариант теоремы Лакса – Мильграма (но в другой, не удобной для нас, формулировке и для комплексного случая). Более простое доказательство, опирающееся непосредственно на леммы 3.3 и 3.4 (в отличие от [25]), можно найти в [26, лемма 3.3].

**Лемма 3.5.** *Пусть выполнены условия леммы 3.4. Тогда существует сильно положительно определенный, линейный ограниченный оператор $A : H \to H$, взаимно однозначно обратимый на всем пространстве и такой, что*

$$B[x,y] = \big(A[x], y\big) \quad \text{для всех} \quad x, y \in H, \qquad \|A\| \leqslant \gamma_2, \qquad \|A^{-1}\| \leqslant \gamma_1^{-1}.$$

Определим класс $\Sigma^3(\sigma_*, \sigma^*)$ всех матричных функций $\mathcal{S}(t,x) : [0;T] \times \Omega \to \mathbb{R}^{3\times 3}$, таких, что $\mathcal{S} \in \mathbf{C}\big([0;T]; L_\infty^{3\times 3}(\Omega)\big)$,

$$\mathcal{S}(t,x)\xi \cdot \xi \geqslant \sigma_* \,|\xi|^2, \qquad \big|\mathcal{S}(t,x)\xi\big| \leqslant \sigma^* \,|\xi|$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^3$, для п.в. $x \in \Omega$ и всех $t \in [0;T]$. Для произвольных $\varphi_0 \in V(\Omega)$, $z \in \mathbf{C}\big([0;T]; L_{q'}(\Omega)\big)$, $\vec{Q} \in \mathbf{C}\big([0;T]; L_2^3(\Omega)\big)$ рассмотрим аналог задачи (2.5)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \big(\nabla\varphi(t,x) \cdot \nabla\psi(x)\big)\, dx + \int\limits_\Omega \mathcal{S}(t,x)\nabla\varphi(t,x) \cdot \nabla\psi(x)\, dx \\ = \int\limits_\Omega \big(z(t,x)\psi(x) + \vec{Q}(t,x) \cdot \nabla\psi(x)\big)\, dx, \qquad t \in (0;T], \quad \psi \in V(\Omega), \end{aligned} \tag{3.1}$$

с начальным условием (2.6).

**Лемма 3.6.** *Пусть $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$. Тогда для любых $\mathcal{S} \in \Sigma^3(\gamma_1, \gamma_2)$, $z \in \mathbf{C}\big([0;T]; L_{q'}(\Omega)\big)$, $\vec{Q} \in \mathbf{C}\big([0;T]; L_2^3(\Omega)\big)$ задача (3.1), (2.6) имеет единственное решение $\varphi \in \mathbf{C}^1\big([0;T]; V(\Omega)\big)$.*

*Доказательство.* На гильбертовом пространстве $V = V(\Omega)$ для произвольного $t \in (0;T]$ определим билинейную форму и функционал:

$$B_t[\varphi, \psi] = \int\limits_\Omega \mathcal{S}(t,x)\nabla\varphi(x) \cdot \nabla\psi(x)\, dx, \quad \varphi, \psi \in V;$$

$$F_t[\psi] = \int\limits_\Omega \big(z(t,x)\psi(x) + \vec{Q}(t,x) \cdot \nabla\psi(x)\big)\, dx, \quad \psi \in V.$$

1. Проверим, что форма $B_t$ коэрцитивна. Действительно, для любого $\varphi \in V$ имеем:

$$B_t[\varphi, \varphi] \geqslant \gamma_1 \int\limits_\Omega \big|\nabla\varphi(x)\big|^2\, dx = \gamma_1 \|\nabla\varphi\|^2_{L_2^3} = \gamma_1 \|\varphi\|^2_V, \quad \gamma_1 = \sigma_*.$$

2. Убедимся, что форма $B_t$ ограничена. Действительно, для любых $\varphi,\psi\in V$, согласно неравенствам Коши – Буняковского и Гельдера имеем:

$$\begin{aligned}\big|B[\varphi,\psi]\big|\leqslant&\int\limits_\Omega\big|\mathcal{S}(t,x)\nabla\varphi(x)\cdot\nabla\psi(x)\big|\,dx\leqslant\int\limits_\Omega\big|\mathcal{S}(t,x)\nabla\varphi(x)\big|\,\big|\nabla\psi(x)\big|\,dx\\ \leqslant&\gamma_2\int\limits_\Omega\big|\nabla\varphi(x)\big|\,\big|\nabla\psi(x)\big|\,dx\leqslant\gamma_2\|\nabla\varphi\|_{L_2^3}\|\nabla\psi\|_{L_2^3}=\gamma_2\|\varphi\|_V\,\|\psi\|_V,\quad \gamma_2=\sigma^*.\end{aligned}$$

3. Проверим, что линейный функционал $F_t$ ограничен (а следовательно, непрерывен). Действительно, для любого $\psi\in V$, с учетом ограниченного вложения $V\subset L_q(\Omega)$ и неравенства Гельдера, имеем:

$$\big|F_t[\psi]\big|\leqslant\big\|z(t,.)\big\|_{L_{q'}}\|\psi\|_{L_q}+\big\|\vec{Q}(t,.)\big\|_{L_2^3}\|\nabla\psi\|_{L_2^3}\leqslant\Big(C\|z\|_{\mathbf{C}\left([0;T];L_{q'}\right)}+\|\vec{Q}\|_{\mathbf{C}\left([0;T];L_2^3\right)}\Big)\,\|\psi\|_V.$$

4. В соответствии с леммой 3.5 существует сильно положительно определенный, линейный ограниченный оператор $A_t: V\to V$, взаимно однозначно обратимый на всем пространстве $V$ и такой, что

$$B_t[\varphi,\psi]=\big(A_t[\varphi],\psi\big)_V\quad\text{для всех}\quad\varphi,\psi\in V,\qquad\|A_t\|\leqslant\gamma_2,\qquad\|A_t^{-1}\|\leqslant\gamma_1^{-1}.$$

Очевидно, что оператор $A_t$ является равномерно липшицевым по $t\in[0;T]$:

$$\|A_t\varphi-A_t\psi\|_V=\big\|A_t[\varphi-\psi]\big\|_V\leqslant\gamma_2\,\|\varphi-\psi\|_V\quad\forall\,\varphi,\psi\in V.$$

Убедимся, что для всех $\varphi\in V$ отображение $[0;T]\ni t\to A_t[\varphi]$ принадлежит классу $\mathbf{C}\big([0;T];V\big)$. Выберем произвольно $t,\tau\in[0;T]$, $\varphi,\psi\in V$, и пользуясь неравенствами Коши – Буняковского и Гельдера, оценим:

$$\begin{aligned}(A_t\varphi-A_\tau\varphi,\psi)_V=&B_t[\varphi,\psi]-B_\tau[\varphi,\psi]=\int\limits_\Omega\big(\mathcal{S}(t,x)-\mathcal{S}(\tau,x)\big)\nabla\varphi\cdot\nabla\psi\,dx\\ &\leqslant\int\limits_\Omega\Big|\big(\mathcal{S}(t,x)-\mathcal{S}(\tau,x)\big)\nabla\varphi\Big|\,|\nabla\psi|\,dx\leqslant\big\|\mathcal{S}(t,.)-\mathcal{S}(\tau,.)\big\|_{L_\infty^{3\times3}(\Omega)}\|\varphi\|_V\,\|\psi\|_V.\end{aligned}$$

Подставляя $\psi=A_t\varphi-A_\tau\varphi$, получаем:

$$\|A_t\varphi-A_\tau\varphi\|_V\leqslant\big\|\mathcal{S}(t,.)-\mathcal{S}(\tau,.)\big\|_{L_\infty^{3\times3}(\Omega)}\|\varphi\|_V\to0\quad\text{при}\quad\tau\to t,$$

с учетом того, что $\mathcal{S}\in\mathbf{C}\big([0;T];L_\infty^{3\times3}(\Omega)\big)$. Это означает, что отображение $[0;T]\ni t\to A_t[\varphi]$ принадлежит классу $\mathbf{C}\big([0;T];V\big)$. Как показано в [23, глава V, §1, лемма 1.1], отсюда следует: $A:\mathbf{C}\big([0;T];V\big)\to\mathbf{C}\big([0;T];V\big)$, где $A$ — оператор, определяемый формулой $(A\varphi)(t)=A_t\varphi(t,.)$.

5. Согласно лемме 3.3, для любого $t\in[0;T]$ существует единственный элемент $Z(t)\in V$ такой, что

$$F_t[\psi]=\big(Z(t),\psi\big)_V\quad\forall\,\psi\in V.$$

Более того, $\big\|Z(t)\big\|_V=\|F_t\|$. Покажем, что $Z\in\mathbf{C}\big([0;T];V\big)$. Действительно, для любых $t,\tau\in[0;T]$, $\psi\in V$ имеем:

$$\begin{aligned}\big(Z(t)-Z(\tau),\psi\big)_V=&F_t[\psi]-F_\tau[\psi]\\ =&\int\limits_\Omega\Big(\big(z(t,x)-z(\tau,x)\big)\psi(x)+\big(\vec{Q}(t,x)-\vec{Q}(\tau,x)\big)\cdot\nabla\psi(x)\Big)\,dx.\end{aligned}$$

Теперь аналогично пункту 3 получаем:

$$\big(Z(t)-Z(\tau),\psi\big)_V\leqslant\Big(C\big\|z(t,.)-z(\tau,.)\big\|_{L_{q'}}+\big\|\vec{Q}(t,.)-\vec{Q}(\tau,.)\big\|_{L_2^3}\Big)\,\|\psi\|_V.$$

Подставляя $\psi = Z(t) - Z(\tau)$, находим:

$$\big\|Z(t) - Z(\tau)\big\|_V \leqslant C\big\|z(t,.) - z(\tau,.)\big\|_{L_{q'}} + \big\|\vec{Q}(t,.) - \vec{Q}(\tau,.)\big\|_{L_2^3} \to 0$$

при $\tau \to t$. Это означает, что $Z \in \mathbf{C}\big([0;T];V\big)$.

6. Заметим, что тождество (3.1) в принятых обозначениях и с учетом леммы 3.2 переписывается следующим образом:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt},\psi\right)_V + B_t[\varphi(t,.),\psi] = F_t[\psi] \quad \forall\,\psi \in V.$$

И по доказанному выше, представляется в виде:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} + A_t\varphi(t,.) - Z(t),\psi\right)_V \quad \forall\,\psi \in V.$$

Таким образом, задача (3.1), (2.6) равносильна задаче Коши для операторного дифференциального уравнения в пространстве $V$:

$$\frac{d\varphi}{dt} + A_t\varphi(t,.) = Z(t), \quad t \in (0;T], \quad \varphi(0) = \varphi_0; \quad \varphi \in \mathbf{C}^1\big([0;T];V\big).$$

В силу пунктов 4, 5, для этой задачи выполнены условия теоремы 1.1 из [23, глава V, §1]. И в силу указанной теоремы поставленная задача имеет в точности одно решение $\varphi \in \mathbf{C}^1\big([0;T];V\big)$. $\square$

**Замечание 3.1.** *Пусть $\sigma \in \Sigma(\sigma_*,\sigma^*)$, $\mathcal{S}(t,x) = \sigma(t,x;\upsilon_1)E$, где $E$ — единичная матрица. Очевидно, что $\mathcal{S} \in \Sigma^3(\sigma_*,\sigma^*)$. Поэтому, согласно лемме 3.6, задача* (2.5), (2.6) *имеет единственное решение в пространстве* $\mathbf{C}^1\big([0;T];V(\Omega)\big)$.

**Замечание 3.2.** *Для $\sigma \in \Sigma(\sigma_*,\sigma^*)$, $\vec{f} \in \mathbb{F}$, $\varphi \in \mathbf{C}\big([0;T];V(\Omega)\big)$ $\upsilon \in \mathcal{D}$, рассмотрим матричную функцию*

$$\mathcal{S}(t,x) = \sigma(t,x;\upsilon_1)E - \vec{f}'_\eta(t,x;\nabla\varphi;\upsilon_2).$$

*Согласно нашим предположениям, имеют место оценки:*

$$\mathcal{S}(t,x)\xi\cdot\xi = \sigma\,|\xi|^2 - \vec{f}'_\eta\xi\cdot\xi \geqslant \big(\sigma_* - \overline{\sigma}_*\big)|\xi|^2, \quad \big|\mathcal{S}(t,x)\xi\big| \leqslant \big(\sigma^* + \overline{\sigma}^*\big)|\xi|$$

*для п.в. $x \in \Omega$ и всех $t \in [0;T]$, $\xi \in \mathbb{R}^3$. Таким образом, $\mathcal{S} \in \Sigma^3(\gamma_1,\gamma_2)$ при $\gamma_1 = \sigma_* - \overline{\sigma}_*$, $\gamma_2 = \sigma^* + \overline{\sigma}^*$. Поэтому, согласно лемме 3.6, начальные задачи, связанные с уравнениями* (2.12)–(2.14), *имеют единственные решения в пространстве* $\mathbf{C}^1\big([0;T];V(\Omega)\big)$ *(уравнение* (2.14) *сводится к виду* (3.1) *с помощью замены «обращения времени» $\tau = T - t$).*

**Лемма 3.7.** *Пусть $\gamma_1,\ \gamma_2 > 0$, $\mathcal{S} \in \Sigma^3(\gamma_1,\gamma_2)$, $\vec{Q} \in \mathbf{C}\big([0;T];L_2^3(\Omega)\big)$, $z \equiv 0$, $\varphi = \zeta \in \mathbf{C}^1\big([0;T];V(\Omega)\big)$ — решение задачи с начальным условием $\varphi(0,x) = 0$, $x \in \Omega$ для уравнения* (3.1). *Тогда справедлива оценка*

$$\sup_{\tau\in[0;t]}\|\zeta(\tau,.)\|_{V(\Omega)} \leqslant 2\int_0^t \|\vec{Q}(\tau,.)\|_{L_2^3}\,d\tau.$$

*И по лемме 3.1 найдется константа $C_1 > 0$, зависящая лишь от области $\Omega$, такая, что*

$$\sup_{\tau\in[0;t]}\|\zeta(\tau,.)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_1\int_0^t \|\vec{Q}(\tau,.)\|_{L_2^3}\,d\tau, \qquad t \in [0;T].$$

Доказательство получается дословным формальным переписыванием доказательства [19, лемма 2.3] при замене $\sigma(x)$ на $\mathcal{S}(t,x)$, $\sigma_*$ на $\gamma_1$, $\sigma^*$ на $\gamma_2$.

**Замечание 3.3.** *Можно получить аналогичное утверждение и для случая $z \not\equiv 0$, но нам это не потребуется.*

**Лемма 3.8.** *Пусть $\sigma \in \Sigma(\sigma_*, \sigma^*)$, $\vec{f} \in \mathbb{F}$, $\varphi_0 \in V(\Omega)$ произвольно заданы. Предположим, что управлению $v = \overline{v} \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ отвечает решение $\varphi = \overline{\varphi}$ уравнения* (2.8) *с начальным условием* (2.6) *(а тем самым, и задачи* (2.1), (2.4), (2.6), (2.7)*). Тогда найдется константа $\gamma > 0$, а также некоторая окрестность точки $\overline{v}$ в пространстве $\mathbb{R}^2$, такие, что для всякого управления $v$ из пересечения этой окрестности с $\mathcal{D}$ существует единственное решение уравнения* (2.8) *с начальным условием* (2.6)*. И более того, справедлива оценка: $\|\varphi - \overline{\varphi}\|_{\mathbf{C}\left([0;T];V(\Omega)\right)} \leqslant \gamma\, |v - \overline{v}|$.*

*Доказательство.* Выберем произвольно

$$t \in [0;T], \qquad M > 0, \qquad \overline{\zeta}, y \in \mathbf{C}\big([0;T]; V(\Omega)\big), \qquad \overline{v}_1, \overline{v}_1 + w_1 \in \mathcal{D}_1, \qquad \overline{v}_2, \overline{v}_2 + w_2 \in \mathcal{D}_2,$$
$$\max\Big(\|\overline{\zeta}(\tau,.)\|_{V(\Omega)}, \|(\overline{\zeta}+y)(\tau,.)\|_{V(\Omega)}, |\overline{v}_1|, |\overline{v}_2|, |\overline{v}_1 + w_1|, |\overline{v}_2 + w_2|\Big) \leqslant M, \qquad \tau \in [0;T].$$

Пользуясь теоремой Лагранжа о конечных приращениях в интегральной форме, для п.в. $x \in \Omega$ получаем:

$$\big|\sigma(t,x;\overline{v}_1 + w_1) - \sigma(t,x;\overline{v}_1)\big| \leqslant |w_1| \int_0^1 \big|\sigma'_{v_1}(t,x;\overline{v}_1 + \theta w_1)\big|\, d\theta.$$

В силу наших предположений, производная $\sigma'_{v_1}$ ограничена на ограниченных множествах. Поэтому существует функция $\mathcal{N}_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (не зависящая от $t$ и $x$) такая, что

$$\big|\sigma(t,x;\overline{v}_1 + w_1) - \sigma(t,x;\overline{v}_1)\big| \leqslant \mathcal{N}_1(M)|w_1|.$$

Более того, эту функцию можно считать неубывающей: в противном случае ее надо просто заменить функцией вида $\widetilde{\mathcal{N}}_1(s) = \sup\limits_{\xi \in [0;s]} \mathcal{N}_1(\xi)$. Оценим

$$\big\|\vec{f}(t,.,\nabla[\overline{\zeta}+y], \overline{v}_2 + w_2) - \vec{f}(t,.,\nabla\overline{\zeta}, \overline{v}_2)\big\|_{L_2^3(\Omega)} \leqslant \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2,$$

где

$$\mathcal{F}_1 = \big\|\vec{f}(t,.,\nabla[\overline{\zeta}+y], \overline{v}_2 + w_2) - \vec{f}(t,.,\nabla\overline{\zeta}, \overline{v}_2 + w_2)\big\|_{L_2^3(\Omega)},$$
$$\mathcal{F}_2 = \big\|\vec{f}(t,.,\nabla\overline{\zeta}, \overline{v}_2 + w_2) - \vec{f}(t,.,\nabla\overline{\zeta}, \overline{v}_2)\big\|_{L_2^3(\Omega)}.$$

Опять же, пользуясь теоремой Лагранжа о конечных приращениях в интегральной форме, для п.в. $x \in \Omega$ получаем:

$$\mathcal{F}_1 \leqslant \left\| \int_0^1 \big|\vec{f}'_\eta(t,.,\nabla\overline{\zeta} + \theta\nabla y, \overline{v}_2 + w_2)\nabla y\big|\, d\theta \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \overline{\sigma}^* \|\nabla y\|_{L_2^3(\Omega)} = \overline{\sigma}^* \|y\|_V;$$
$$\mathcal{F}_2 \leqslant \left\| \int_0^1 \vec{f}'_{v_2}(t,.,\nabla\overline{\zeta}, \overline{v}_2 + \theta w_2) w_2\, d\theta \right\|_{L_2^3(\Omega)} \leqslant |w_2| \mathcal{N}(M),$$

см. определение класса $\mathbb{F}$ и [27, лемма 5.2]. С учетом полученных оценок, а также лемм 3.6, 3.7, дальнейшее доказательство получается практически дословным переписыванием доказательств [19, теорема 1.1, теорема 1.2]. $\square$

**Лемма 3.9.** *Пусть* $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ *— ограниченное, измеримое по Лебегу множество, функция* $g(t,x) : \Pi \times \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ *измерима по* $t \in \Pi$, *непрерывна по* $x \in \mathbb{R}^\nu$ *и такова, что* $g\big(.,x_1(.),\dots,x_\nu(.)\big) \in Z$ *для всех* $x_j \in X_j$, $j=\overline{1,\nu}$, *где* $X_j = X_j(\Pi)$, $j=\overline{1,\nu}$, $Z=Z(\Pi)$ *– лебеговы пространства с индексами суммируемости из* $[1;+\infty)$; $X = X_1\times\ldots\times X_\nu$. *Тогда оператор* $G : X \to Z$, *определяемый формулой* $G[x] = g\big(.,x(.)\big)$, *является непрерывным и ограниченным.*

Для $\nu = 1$ лемма 3.9 доказана в [28, §I.2, теорема 2.1, с. 31; теорема 2.2, с. 35]. Ее справедливость для $\nu > 1$ следует из анализа доказательств [28, §I.2, теорема 2.1, с. 31; теорема 2.2, с. 35].

**Лемма 3.10.** *Пусть* $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ *— ограниченное, измеримое по Лебегу множество,* $(a;b) \subset \mathbb{R}$ *— интервал, содержащий нуль; функция* $\Phi(t,y,v) : \Pi \times \mathbb{R}^\mu \times [a;b] \to \mathbb{R}_+$ *измерима по* $t\in\Pi$, *непрерывна по* $(y,v) \in \mathbb{R}^\mu \times [a;b]$ *и такова, что*

$$\Phi\big(.,y_1(.),\dots,y_\mu(.),u(.)\big) \in Z(\Pi)$$

*для всех* $y_j \in Y_j$, $j=\overline{1,\mu}$, $u\in L_\infty(\Pi)$, $u(t)\in[a;b]$ *при п.в.* $t\in\Pi$, *где* $Y_j = Y_j(\Pi)$, $j=\overline{1,\mu}$, $Z=Z(\Pi)$ *– лебеговы пространства с индексами суммируемости из* $[1;+\infty)$; $Y = Y_1\times\ldots\times Y_\mu$. *Предположим, что* $\Phi(t,0,\dots,0)=0$ *для п.в.* $t\in\Pi$. *Тогда для семейства* $\big(y[v]\big)\subset X$ *такого, что* $\big\|y[v]\big\|_Y \to 0$ *при* $v\to 0$, $v\in(a;b)$, *и функции*

$$\omega(v) = \Big\|\Phi\big(.,y[v],v\big)\Big\|_Z, \qquad v\in(a;b),$$

*имеем:* $\omega(v)\to 0$ *при* $v\to 0$.

*Доказательство.* Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $(a;b) = (-1;1)$. Положим

$$h[v] = \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2}v\Big), \qquad x[v] = \big(y[v],h[v]\big), \qquad \nu = \mu+1, \qquad X = Y\times Y_\nu, \qquad Y_\nu = L_1(\Pi),$$

и для $t\in\Pi$, $x=(y,h)\in\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}$ определим функцию $g(t,x) = \Phi\big(t,y,\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}h\big)$. Ясно, что эта функция удовлетворяет условиям леммы 3.9. При этом

$$\big\|y[v]\big\|_Y \to 0, \quad \big\|h[v]\big\|_{Y_\nu}\to 0 \quad\Rightarrow\quad \big\|x[v]\big\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad v\to 0.$$

Учитывая, что $\omega(v) = \Big\|g\big(.,x[v]\big) - g(.,0)\Big\|_Z$, остается лишь воспользоваться леммой 3.9. $\square$

**Лемма 3.11.** *Пусть* $\vec{Q}\in\mathbf{C}\big([0;T];L_2^3(\Omega)\big)$, $W\in\mathbf{C}\big([0;T];L_{q'}(\Omega)\big)$; $\gamma_1,\gamma_2>0$ *— заданные числа;* $\mathcal{S}\in\Sigma^3(\gamma_1,\gamma_2)$; $y = y[\vec{Q}]\in\mathbf{C}^1\big([0;T];V(\Omega)\big)$ *– решение задачи*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \big(\nabla y(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx + \int\limits_\Omega \mathcal{S}(t,x)\nabla y(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx$$
$$= \int\limits_\Omega \vec{Q}(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx \quad \textit{для} \quad t\in(0;T], \quad \psi\in V(\Omega),$$

*с начальным условием* $y(0,x)=0$, $x\in\Omega$, *а* $p = p[W]\in\mathbf{C}^1\big([0;T];V(\Omega)\big)$ *– решение задачи*

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \big(\nabla p(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx + \int\limits_\Omega \mathcal{S}(t,x)\nabla p(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx$$
$$= \int\limits_\Omega W(t,x)\,\psi(x)\,dx \quad \textit{для} \quad t\in(0;T], \quad \psi\in V(\Omega),$$

*с финальным условием* $p(T,x)=0$, $x\in\Omega$. *Тогда справедливо равенство*

$$\iint\limits_{\Pi} W(t,x)\,y[\vec{Q}](t,x)\,dt\,dx=\iint\limits_{\Pi}\vec{Q}(t,x)\cdot\nabla p[W](t,x)\,dt\,dx.$$

Доказательство, с учетом леммы 3.6, получается дословным формальным переписыванием доказательства [14, лемма 2.5] с заменой $\sigma(x)$ на $\mathcal{S}(t,x)$.

**Лемма 3.12.** *Пусть* $\vec{f}\in\mathbb{F}$, $\varphi,\zeta\in\mathbf{C}\big([0;T];V(\Omega)\big)$, $\upsilon_2\in\mathcal{D}_2$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1\vec{f}'_\eta(.,.;\nabla\varphi+\theta\nabla\zeta;\upsilon_2)\,d\theta\in\mathbf{C}\big([0;T];L_\infty^{3\times3}(\Omega)\big).$$

*Доказательство.* Поскольку в конечномерном евклидовом пространстве любые две нормы эквивалентны, то здесь с точностью до постоянного множителя будем считать, что модуль вектора понимается как сумма модулей компонент, а модуль матрицы понимается как операторная норма. Обозначим для краткости

$$\omega[\theta](t,x)=\big(\vec{f}'_\eta(.,.;\nabla\varphi+\theta\nabla\zeta;\upsilon_2)\big)(t,x).$$

По нашим предположениям, $\omega[\theta]\in\mathbf{C}\big([0;T];L_\infty^{3\times3}(\Omega)\big)$ для всех $\theta\in[0;1]$. Зафиксируем произвольно $t\in[0;T]$. Нам требуется доказать, что

$$\Psi(\tau)=\Bigg\|\int\limits_0^1\big(\omega[\theta](\tau,.)-\omega[\theta](t,.)\big)\,d\theta\Bigg\|_{L_\infty^{3\times3}(\Omega)}\to0\quad\text{при}\quad\tau\to t,\quad\tau\in[0;T].$$

Выберем произвольно $\xi\in\mathbb{R}^3$, $|\xi|=1$, и для п.в. $x\in\Omega$ оценим

$$\begin{aligned}\Bigg|\int\limits_0^1\big(\omega[\theta](\tau,x)-\omega[\theta](t,x)\big)\,d\theta\,\xi\Bigg|&\leqslant\int\limits_0^1\Big|\big(\omega[\theta](\tau,x)-\omega[\theta](t,x)\big)\xi\Big|\,d\theta\\&\leqslant\int\limits_0^1\big|\omega[\theta](\tau,x)-\omega[\theta](t,x)\big|\,d\theta\leqslant\int\limits_0^1\Phi_\tau(\theta)\,d\theta,\end{aligned}$$

где

$$\Phi_\tau(\theta)=\big\|\omega[\theta](\tau,.)-\omega[\theta](t,.)\big\|_{L_\infty^{3\times3}}\to0\quad\text{при}\quad\tau\to t\quad\text{для всех}\quad\theta\in[0;1].$$

По определению класса $\mathbb{F}$, $\Phi_\tau(\theta)\leqslant2\overline{\sigma}^*$. Поэтому, пользуясь теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, заключаем, что

$$\Psi(\tau)\leqslant\int\limits_0^1\Phi_\tau(\theta)\,d\theta\to0\quad\text{при}\quad\tau\to t.$$

□

**Лемма 3.13.** *Пусть* $\vec{f}\in\mathbb{F}$, $\varphi\in\mathbf{C}\big([0;T];V(\Omega)\big)$, $\upsilon_2,\upsilon_2+h\in\mathcal{D}_2$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1\vec{f}'_{\upsilon_2}(.,.;\nabla\varphi;\upsilon_2+\theta h)\,d\theta\in\mathbf{C}\big([0;T];L_2^3(\Omega)\big).$$

*Доказательство.* По неравенству Гельдера, для любой функции $g = g(x,\theta) \in L_2(\Omega\times[0;1])$, можно оценить:

$$\int\limits_\Omega \left(\int\limits_0^1 g(x,\theta)\,d\theta\right)^2 dx \leqslant \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^1 g^2(x,\theta)\,d\theta = \int\limits_0^1 d\theta \int\limits_\Omega g^2(x,\theta)\,dx. \tag{3.2}$$

Далее, с точностью до постоянного множителя, будем считать, что модуль вектора понимается как сумма модулей компонент. Обозначим для краткости

$$\omega[\theta](t,x) = \big(\vec{f}'_{\upsilon_2}(.,.;\nabla\varphi;\upsilon_2+\theta h)\big)(t,x).$$

По нашим предположениям, $\omega[\theta] \in \mathbf{C}\big([0;T];L_2^3(\Omega)\big)$ для всех $\theta\in[0;1]$. Зафиксируем произвольно $t\in[0;T]$. Нам требуется доказать, что

$$\Psi(\tau) = \left\|\int\limits_0^1 \big(\omega[\theta](\tau,.) - \omega[\theta](t,.)\big)\,d\theta\right\|_{L_2^3(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad \tau\to t, \quad \tau\in[0;T].$$

Для п.в. $x\in\Omega$ оценим

$$\left|\int\limits_0^1 \big(\omega[\theta](\tau,x) - \omega[\theta](t,x)\big)\,d\theta\right| \leqslant \int\limits_0^1 \big|\omega[\theta](\tau,x) - \omega[\theta](t,x)\big|\,d\theta.$$

Теперь, пользуясь неравенством (3.2), получаем:

$$\int\limits_\Omega dx \left|\int\limits_0^1 \big(\omega[\theta](\tau,x) - \omega[\theta](t,x)\big)\,d\theta\right|^2 \leqslant \int\limits_0^1 d\theta \int\limits_\Omega \big|\omega[\theta](\tau,x) - \omega[\theta](t,x)\big|^2\,dx.$$

Таким образом,

$$\Psi(\tau) \leqslant \left(\int\limits_0^1 \Phi_\tau(\theta)\,d\theta\right)^{\frac12},$$

где

$$\Phi_\tau(\theta) = \big\|\omega[\theta](\tau,.) - \omega[\theta](t,.)\big\|^2_{L_2^3(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad \tau\to t \quad \text{для всех} \quad \theta\in[0;1].$$

По определению класса $\mathbb{F}$, $\Phi_\tau(\theta) \leqslant 4\mathcal{N}^2(M)$, $M = \|\nabla\varphi\|_{\mathbf{C}\left([0;T];V\right)}$. Поэтому, пользуясь теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, заключаем, что

$$\Psi(\tau) \leqslant \left(\int\limits_0^1 \Phi_\tau(\theta)\,d\theta\right)^{\frac12} \to 0 \quad \text{при} \quad \tau\to t.$$

□

Из анализа доказательств лемм 3.12, 3.13 очевидно, что справедливо также следующее утверждение.

**Лемма 3.14.** *Пусть* $\sigma\in\Sigma(\sigma_*,\sigma^*)$, $\varphi\in\mathbf{C}\big([0;T];V(\Omega)\big)$, $\upsilon_1,\upsilon_1+h\in\mathcal{D}_1$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1 \sigma'_{\upsilon_1}(.,.;\upsilon_1+\theta h)\nabla\varphi\,d\theta \in \mathbf{C}\big([0;T];L_2^3(\Omega)\big).$$

## 4. Доказательство основного результата

Прежде всего, докажем две леммы об оценке разности решений.

**Лемма 4.1.** *Пусть* $\varphi_1 = \varphi[\upsilon_1, \upsilon_2]$, $\varphi_2 = \varphi[\upsilon_1 + h, \upsilon_2]$, $\zeta = \varphi_2 - \varphi_1$. *Тогда* $\zeta = yh + r[h]$, *где*

$$\sup_{t\in[0;T]} \|r[h](t,.)\|_{V(\Omega)} = o(h), \qquad \sup_{t\in[0;T]} \|r[h](t,.)\|_{L_2(\Omega)} = o(h), \tag{4.1}$$

$y = y[\upsilon] \in \mathbf{C}^1\big([0;T]; V(\Omega)\big)$ *— решение задачи* (2.12), *с начальным условием* $y(0,x) = 0$, $x \in \Omega$.

*Доказательство.* В утверждении леммы неявно предполагается, что управлению $\upsilon \in \mathcal{D}$ отвечает решение $\varphi = \varphi_1 \in \mathbf{C}^1\big([0;T]; V(\Omega)\big)$ задачи (2.8), (2.6). И согласно лемме 3.8, найдутся числа $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для всех $h \in (-\delta;\delta)$ задача (2.8), (2.6) имеет единственное решение $\varphi = \varphi_2 \in \mathbf{C}^1\big([0;T]; V(\Omega)\big)$, отвечающее управлению $(\upsilon_1 + h, \upsilon_2) \in \mathcal{D}$, и более того, справедлива оценка

$$\sup_{t\in[0;T]} \big\|\zeta(t,.)\big\|_{V(\Omega)} \leqslant \gamma\,|h|. \tag{4.2}$$

Далее, без ограничения общности рассуждений, будем считать, что $\delta < 1$. Из сказанного выше вытекают тождества

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\big(\varphi_1(t,.),\psi\big)_{V(\Omega)} + \int\limits_\Omega \sigma(t,x;\upsilon_1)\big(\nabla\varphi_1(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx \\ &\qquad = \int\limits_\Omega \big(\vec{f}(t,x;\nabla\varphi_1;\upsilon_2)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx \quad \text{для} \quad t\in(0;T], \quad \psi\in V(\Omega), \end{aligned} \tag{4.3}$$

с начальным условием $\varphi_1(0,x) = \varphi_0(x)$, $x \in \Omega$, и

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\big(\varphi_2(t,.),\psi\big)_{V(\Omega)} + \int\limits_\Omega \sigma(t,x;\upsilon_1+h)\big(\nabla\varphi_2(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx \\ &\qquad = \int\limits_\Omega \big(\vec{f}(t,x;\nabla\varphi_2;\upsilon_2)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx \quad \text{для} \quad t\in(0;T], \quad \psi\in V(\Omega), \end{aligned} \tag{4.4}$$

с начальным условием $\varphi_2(0,x) = \varphi_0(x)$, $x \in \Omega$. Вычитая (4.3) из (4.4), получаем:

$$\frac{d}{dt}\big(\zeta(t,.),\psi\big)_V + \int\limits_\Omega \big(\sigma(t,x;\upsilon_1+h)\,\nabla\varphi_2(t,x) - \sigma(t,x;\upsilon_1)\,\nabla\varphi_1(t,x)\big)\cdot\nabla\psi\,dx = \int\limits_\Omega \omega(t,x)\,dx,$$

где

$$\omega(t,x) = \big(\vec{f}(t,x;\nabla\varphi_2;\upsilon_2) - \vec{f}(t,x;\nabla\varphi_1;\upsilon_2)\big)\cdot\nabla\psi,$$

для всех $t \in (0;T]$, $\psi \in V = V(\Omega)$, с начальным условием $\zeta(0,x) = 0$, $x \in \Omega$. Отсюда, прибавляя и вычитая во втором слагаемом выражение вида $\sigma(t,x;\upsilon_1+h)\,\nabla\varphi_1(t,x)$, получаем

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\big(\zeta(t,.),\psi\big)_V + \int\limits_\Omega \sigma(t,x;\upsilon_1+h)\big(\nabla\zeta(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx \\ &\qquad = -\int\limits_\Omega \big(\sigma(t,x;\upsilon_1+h) - \sigma(t,x;\upsilon_1)\big)\,\big(\nabla\varphi_1\cdot\nabla\psi\big)\,dx + \int\limits_\Omega \omega\,dx \end{aligned} \tag{4.5}$$

для $t \in (0;T]$, $\forall\psi \in V$.

Прибавляя и вычитая во втором слагаемом левой части (4.5) выражение $\sigma(t,.,\upsilon_1)\nabla\zeta(t,.)\cdot\nabla\psi$, будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\big(\zeta(t,.),\psi\big)_V+\int\limits_\Omega \sigma(t,x;\upsilon_1)\big(\nabla\zeta(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx$$

$$=\int\limits_\Omega \omega\,dx-\int\limits_\Omega\big(\sigma(t,x;\upsilon_1+h)-\sigma(t,x;\upsilon_1)\big)\Big(\big(\nabla\zeta(t,x)+\nabla\varphi_1(t,x)\big)\cdot\nabla\psi(x)\Big)\,dx,$$

для $t\in(0;T]$, $\psi\in V$. Пользуясь теоремой Лагранжа о конечных приращениях в интегральной форме, последнее тождество можем переписать в виде:

$$\frac{d}{dt}\big(\zeta(t,.),\psi\big)_V+\int\limits_\Omega \sigma(t,x;\upsilon_1)\big(\nabla\zeta(t,.)\cdot\nabla\psi\big)\,dx$$

$$=\int\limits_\Omega \omega_1\nabla\zeta\cdot\nabla\psi\,dx-h\int\limits_\Omega\int\limits_0^1\sigma'_{\upsilon_1}(t,.,\upsilon_1+\theta h)\,d\theta\nabla\big(\zeta+\varphi_1\big)\cdot\nabla\psi\,dx, \tag{4.6}$$

для $t\in(0;T]$, $\psi\in V$, где

$$\omega_1(t,x)=\int\limits_0^1\vec{f}'_\eta(.,.;\nabla\varphi_1+\theta\nabla\zeta;\upsilon_2)(t,x)\,d\theta.$$

Пусть $\widetilde{y}(h)\in\mathbf{C}^1\big([0;T],V(\Omega)\big)$ — решение задачи (2.12) при замене

$$\mathcal{S}(t,x)=\widetilde{\mathcal{S}}(t,x)=\sigma(t,x)E-\omega_1(t,x).$$

(напомним, что $\varphi[\upsilon]=\varphi_1$) с нулевым начальным условием. Из леммы 3.12 очевидным образом следует, что $\widetilde{\mathcal{S}}\in\Sigma^3(\gamma_1,\gamma_2)$ при $\gamma_1=\sigma_*-\overline{\sigma}_*$, $\gamma_2=\sigma^*+\overline{\sigma}^*$ (см. определение класса $\mathbb{F}$). Обозначим $\widetilde{y}_h=h\widetilde{y}(h)$. Домножая тождество (2.12), взятое при $\mathcal{S}=\widetilde{\mathcal{S}}$, на $h$, получим:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega\big(\nabla\widetilde{y}_h(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx+\int\limits_\Omega\widetilde{\mathcal{S}}(t,x)\nabla\widetilde{y}_h(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx$$

$$=-h\int\limits_\Omega\big(\sigma'_{\upsilon_1}(t,x;\upsilon_1)\nabla\varphi_1\cdot\nabla\psi\big)\,dx,\quad t\in(0;T],\quad \psi\in V(\Omega). \tag{4.7}$$

Обозначим $\widetilde{r}_h=\zeta-\widetilde{y}_h$. Вычитая (4.7) из (4.6), получаем:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega\big(\nabla\widetilde{r}_h(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx+\int\limits_\Omega\widetilde{\mathcal{S}}(t,x)\nabla\widetilde{r}_h(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx$$

$$=-h\int\limits_\Omega\big(\vec{R}_1(t,x)+\vec{R}_2(t,x)\big)\cdot\nabla\psi(x)\,dx,\quad t\in(0;T],\quad \psi\in V(\Omega),$$

где

$$\vec{R}_1(t,x)=\int\limits_0^1\sigma'_{\upsilon_1}(t,x,\upsilon_1+\theta h)\,d\theta\,\nabla\zeta(t,x),$$

$$\vec{R}_2(t,x)=\int\limits_0^1\big(\sigma'_{\upsilon_1}(t,x,\upsilon_1+\theta h)-\sigma'_{\upsilon_1}(t,x,\upsilon_1)\big)\,d\theta\,\nabla\varphi_1(t,x).$$

Применяя леммы 3.7, 3.14, получаем оценку

$$\sup_{t\in[0;T]} \|\widetilde{r}_h(t,.)\|_V \leqslant 2|h| \int\limits_0^T \Big(\|\vec{R}_1(t,.)\|_{L_2^3(\Omega)} + \|\vec{R}_2(t,.)\|_{L_2^3(\Omega)}\Big)\, dt.$$

Повторяя, с учетом леммы 3.14, практически дословно рассуждения из доказательства [14, лемма 2.8], получаем оценку:

$$\sup_{t\in[0;T]} \|\widetilde{r}_h(t,.)\|_V \leqslant 2|h| \int\limits_0^T dt\Big(\big\|\vec{R}_1(t,.)\big\|_{L_2^3(\Omega)} + \big\|\vec{R}_2(t,.)\big\|_{L_2^3(\Omega)}\Big) = o(h).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \zeta =& h\widetilde{y}(h) + \widetilde{r}_h = h\widetilde{y}(0) + h\big(\widetilde{y}(h) - \widetilde{y}(0)\big) + \widetilde{r}_h = hy + h\widehat{r}_h + \widetilde{r}_h, \\ y =& \widetilde{y}(0), \qquad \widetilde{y} = \widetilde{y}(h), \qquad \widehat{r}_h = \widetilde{y} - y. \end{aligned}$$

Заметим, что $y$ — это и есть решение тождества (2.12) из формулировки теоремы 2.1, то есть при $\mathcal{S}(t,x) = \sigma(t,x;\upsilon_1)E - \vec{f}_\eta{}'(t,x;\nabla\varphi_1;\upsilon_2)$. Вычитая его из аналогичного тождества при замене $\mathcal{S} = \widetilde{\mathcal{S}}$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \big(\nabla\widehat{r}_h(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\, dx + \int\limits_\Omega \widetilde{\mathcal{S}}(t,x)\nabla\widehat{r}_h(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\, dx \\ = \int\limits_\Omega R(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\, dx, \quad t\in(0;T],\ \forall\psi\in V(\Omega), \end{aligned}$$

где

$$R(t,x) = \int\limits_0^1 \big(\vec{f}_\eta'(.,.;\nabla\varphi_1 + \theta\nabla\zeta;\upsilon_2)(t,x) - \vec{f}_\eta'(.,.;\nabla\varphi_1;\upsilon_2)(t,x)\big)\, d\theta\, \nabla y(t,x).$$

Применяя леммы 3.7, 3.12, получаем оценку:

$$\sup_{t\in[0;T]} \|\widehat{r}_h(t,.)\|_V \leqslant 2 \int\limits_0^T dt\big\|\vec{R}(t,.)\big\|_{L_2^3(\Omega)}.$$

Применяя леммы 3.9, 3.12, с учетом оценок (3.2) и (4.2), для всех $t\in[0;T]$ получаем:

$$\big\|\vec{R}(t,.)\big\|_{L_2^3(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

При этом, по определению класса $\mathbb{F}$, $\big\|\vec{R}(t,.)\big\|_{L_2^3(\Omega)} \leqslant 2\overline{\sigma}^*\|y\|_{\mathbf{C}\left([0;T];V\right)}$. Тогда, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла,

$$\sup_{t\in[0;T]} \|\widehat{r}_h(t,.)\|_V \to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

Для получения первой оценки из утверждения леммы остается обозначить $r_h = \widetilde{r}_h + h\widehat{r}_h$. Вторая получается из нее с помощью леммы 3.1. □

**Лемма 4.2.** *Пусть $\varphi_1 = \varphi[\upsilon_1,\upsilon_2]$, $\varphi_2 = \varphi[\upsilon_1,\upsilon_2 + h]$, $\zeta = \varphi_2 - \varphi_1$. Тогда $\zeta = zh + r[h]$, где функция $r[h](t,x)$ удовлетворяет оценкам (4.1); $z = z[\upsilon] \in \mathbf{C}^1\big([0;T];V(\Omega)\big)$ — решение задачи (2.13), с начальным условием $z(0,x) = 0$, $x\in\Omega$.*

*Доказательство.* В утверждении леммы неявно предполагается, что управлению $\upsilon \in \mathcal{D}$ отвечает решение $\varphi = \varphi_1 \in \mathbf{C}^1\big([0;T];V(\Omega)\big)$ задачи (2.8), (2.6). И согласно лемме 3.8, найдутся числа $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для всех $h \in (-\delta;\delta)$ задача (2.8), (2.6) имеет единственное решение $\varphi = \varphi_2 \in \mathbf{C}^1\big([0;T];V(\Omega)\big)$, отвечающее управлению $(\upsilon_1, \upsilon_2 + h) \in \mathcal{D}$, и более того, справедлива оценка (4.2). Далее, без ограничения общности рассуждений, будем считать, что $\delta < 1$. Из сказанного выше вытекают тождества

$$\frac{d}{dt}\big(\varphi_1(t,.),\psi\big)_{V(\Omega)} + \int\limits_\Omega \sigma(t,x;\upsilon_1)\big(\nabla\varphi_1(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx \\ = \int\limits_\Omega \big(\vec{f}(t,x;\nabla\varphi_1;\upsilon_2)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx \quad \text{для} \quad t \in (0;T], \quad \psi \in V(\Omega), \tag{4.8}$$

с начальным условием $\varphi_1(0,x) = \varphi_0(x)$, $x \in \Omega$, и

$$\frac{d}{dt}\big(\varphi_2(t,.),\psi\big)_{V(\Omega)} + \int\limits_\Omega \sigma(t,x;\upsilon_1)\big(\nabla\varphi_2(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx \\ = \int\limits_\Omega \vec{f}(t,x;\nabla\varphi_2;\upsilon_2 + h)\cdot\nabla\psi\,dx \quad \text{для} \quad t \in (0;T], \quad \psi \in V(\Omega), \tag{4.9}$$

с начальным условием $\varphi_2(0,x) = \varphi_0(x)$, $x \in \Omega$. Вычитая (4.8) из (4.9), получаем:

$$\frac{d}{dt}\big(\zeta(t,.),\psi\big)_{V(\Omega)} + \int\limits_\Omega \sigma(t,x;\upsilon_1)\big(\nabla\zeta(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx \\ = \int\limits_\Omega \big(\vec{f}(t,x;\nabla\varphi_2;\upsilon_2 + h) - \vec{f}(t,x;\nabla\varphi_1;\upsilon_2)\big)\cdot\nabla\psi(x)\,dx \quad \text{для } t \in (0;T],$$

$\forall\psi \in V = V(\Omega)$, с начальным условием $\zeta(0,x) = 0$, $x \in \Omega$. Добавляя и вычитая в правой части слагаемое $\vec{f}(t,x;\nabla\varphi_1;\upsilon_2 + h)$ и используя затем теорему Лагранжа о конечных приращениях в интегральной форме, то же самое тождество можем переписать в виде:

$$\frac{d}{dt}\big(\zeta(t,.),\psi\big)_{V} + \int\limits_\Omega \sigma(t,x;\upsilon_1)\big(\nabla\zeta(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx \\ = \int\limits_\Omega \omega\nabla\zeta\cdot\nabla\psi\,dx + h\int\limits_\Omega\int\limits_0^1 \vec{f}'_{\upsilon_2}(t,x;\nabla\varphi_1;\upsilon_2 + \theta h)\,d\theta\cdot\nabla\psi(x)\,dx \quad \text{для} \quad t \in (0;T], \tag{4.10}$$

для всех $\psi \in V = V(\Omega)$, где

$$\omega(t,x) = \int\limits_0^1 \vec{f}'_\eta(.,.;\nabla\varphi_1 + \theta\nabla\zeta;\upsilon_2 + h)(t,x)\,d\theta.$$

Пусть $\widetilde{z} = \widetilde{z}(h) \in \mathbf{C}^1\big([0;T];V(\Omega)\big)$ — решение задачи (2.13) при замене

$$\mathcal{S}(t,x) = \widetilde{\mathcal{S}}(t,x) = \sigma(t,x;\upsilon_1)E - \omega(t,x),$$

с нулевым начальным условием: $\widetilde{z}(0,x) = 0$, $x \in \Omega$. Из леммы 3.12 вытекает, что $\widetilde{\mathcal{S}} \in \Sigma^3(\gamma_1,\gamma_2)$ при $\gamma_1 = \sigma_* - \overline{\sigma}_*$, $\gamma_2 = \sigma^* + \overline{\sigma}^*$. Обозначим $\widetilde{z}_h = h\widetilde{z}(h)$, $\widetilde{r}_h = \zeta - \widetilde{z}_h$.

Домножая (2.13), взятое при $\mathcal{S}=\widetilde{\mathcal{S}}$, на $h$, получаем:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(\widetilde{z}_h(t,.),\psi\big)_V+\int\limits_\Omega\widetilde{\mathcal{S}}(t,x)\nabla\widetilde{z}_h(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx&\\ =h\int\limits_\Omega\vec{f}'_{\upsilon_2}(t,x;\nabla\varphi_1;\upsilon_2)\cdot\nabla\psi(x)\,dx\quad\text{для}\quad t\in(0;T],\quad\psi\in V,&\end{aligned}\tag{4.11}$$

с начальным условием $\widetilde{z}_h(0,x)=0$, $x\in\Omega$. Вычитая (4.11) из (4.10), имеем:

$$\frac{d}{dt}\big(\widetilde{r}_h(t,.),\psi\big)_V+\int\limits_\Omega\widetilde{\mathcal{S}}(t,x)\nabla\widetilde{r}_h(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx=h\int\limits_\Omega\vec{R}_1(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx,$$

для $t\in(0;T]$, $\forall\psi\in V=V(\Omega)$, с начальным условием $\widetilde{r}_h(0,x)=0$, $x\in\Omega$, где

$$\vec{R}_1(t,x)=\int\limits_0^1\big(\vec{f}'_{\upsilon_2}(.,.;\nabla\varphi_1;\upsilon_2+\theta h)(t,x)-\vec{f}'_{\upsilon_2}(.,.;\nabla\varphi_1;\upsilon_2)(t,x)\big)\,d\theta.$$

С учетом леммы 3.13, а также оценки (4.2), аналогично тому, как это было сделано при доказательстве [14, лемма 2.9], получаем, что

$$\int\limits_0^T dt\,\big\|\vec{R}_1(t,.)\big\|_{L_2^3(\Omega)}\to 0\quad\text{при}\quad h\to 0.$$

Используя леммы 3.7, 3.13, получаем:

$$\sup_{t\in[0;T]}\|\widetilde{r}_h(t,.)\|_V\leqslant 2|h|\int\limits_0^T dt\,\big\|\vec{R}_1(t,.)\big\|_{L_2^3(\Omega)}=o(h).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\zeta=&h\widetilde{z}(h)+\widetilde{r}_h=h\widetilde{z}(0)+h\big(\widetilde{z}(h)-\widetilde{z}(0)\big)+\widetilde{r}_h=hz+h\widehat{r}_h+\widetilde{r}_h,\\ z=&\widetilde{z}(0),\quad\widetilde{z}=\widetilde{z}(h),\quad\widehat{r}_h=\widetilde{z}-z.\end{aligned}$$

Заметим, что $z$ — это и есть решение тождества (2.13) из формулировки теоремы 2.1, то есть при $\mathcal{S}(t,x)=\sigma(t,x;\upsilon_1)E-\vec{f}'_\eta(t,x;\nabla\varphi_1;\upsilon_2)$. Вычитая его из аналогичного тождества при замене $\mathcal{S}=\widetilde{\mathcal{S}}$, получаем:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega\big(\nabla\widehat{r}_h(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\big)\,dx+\int\limits_\Omega\widetilde{\mathcal{S}}(t,x)\nabla\widehat{r}_h(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx&\\ =\int\limits_\Omega R(t,x)\cdot\nabla\psi(x)\,dx,\quad t\in(0;T],\quad\forall\psi\in V(\Omega),&\end{aligned}$$

где

$$R(t,x)=\int\limits_0^1\big(\vec{f}'_\eta(.,.;\nabla\varphi_1+\theta\nabla\zeta;\upsilon_2+h)-\vec{f}'_\eta(.,.;\nabla\varphi_1;\upsilon_2)\big)(t,x)\,d\theta\,\nabla z(t,x).$$

Применяя леммы 3.7, 3.12, получаем оценку:

$$\sup_{t\in[0;T]}\|\widehat{r}_h(t,.)\|_V\leqslant 2\int\limits_0^T dt\big\|\vec{R}(t,.)\big\|_{L_2^3(\Omega)}.$$

Применяя леммы 3.10, 3.12, с учетом оценок (3.2) и (4.2), для всех $t \in [0;T]$ получаем:

$$\left\|\vec{R}(t,.)\right\|_{L_2^3(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

При этом, по определению класса $\mathbb{F}$, $\left\|\vec{R}(t,.)\right\|_{L_2^3(\Omega)} \leqslant 2\overline{\sigma}^* \|z\|_{\mathbf{C}\left([0;T];V\right)}$. Тогда, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла,

$$\sup_{t\in[0;T]} \|\widehat{r}_h(t,.)\|_V \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Для получения первой оценки из утверждения леммы остается обозначить $r_h = \widetilde{r}_h + h\widehat{r}_h$. Вторая получается из нее с помощью леммы 3.1. □

*Доказательство теоремы 2.1.* 1. *Вычисление* $\dfrac{\partial J}{\partial \upsilon_1}$.

Согласно лемме 3.8, найдутся числа $\gamma > 0$ и $\delta \in (0;1)$ такие, что для всех $h \in (-\delta;\delta)$ задача (2.8), (2.6) имеет единственное решение, отвечающее управлению $(\upsilon_1 + h, \upsilon_2) \in \mathcal{D}$, и более того, справедлива оценка вида (4.2). Предполагая, что $|h| < \delta$, обозначим $\varphi_1 = \varphi[\upsilon_1, \upsilon_2]$, $\varphi_2 = \varphi[\upsilon_1 + h, \upsilon_2]$, $\zeta = \varphi_2 - \varphi_1$. Рассмотрим приращение $\Delta_h J = J[\upsilon_1 + h, \upsilon_2] - J[\upsilon_1, \upsilon_2]$. Имеем:

$$\Delta_h J = \iint\limits_{\Pi} \Big(F(t,x,\varphi_2;\upsilon_1 + h, \upsilon_2) - F(t,x,\varphi_1;\upsilon_1,\upsilon_2)\Big)\,dt\,dx.$$

Прибавляя и вычитая $F(t,x,\varphi_1;\upsilon_1+h,\upsilon_2)$ в фигурных скобках, а также используя теорему Лагранжа о конечных приращениях в интегральной форме, получаем:

$$\Delta_h J = \iint\limits_{\Pi} \int\limits_0^1 F'_\xi(.,.,\varphi_1 + \theta\zeta;\upsilon_1 + h,\upsilon_2)\,d\theta\,\zeta\,dt\,dx + h\iint\limits_{\Pi}\int\limits_0^1 F'_{\upsilon_1}(.,.,\varphi_1;\upsilon_1 + \theta h,\upsilon_2)\,d\theta\,dt\,dx,$$

или

$$\Delta_h J = \iint\limits_{\Pi} F'_\xi(t,x,\varphi_1,\upsilon)\zeta(t,x)\,dt\,dx + h\iint\limits_{\Pi} F'_{\upsilon_1}(t,x,\varphi_1,\upsilon)\,dt\,dx + P_h + R_h,$$

где

$$P_h = \iint\limits_{\Pi}\int\limits_0^1 \big(F'_\xi(.,.,\varphi_1 + \theta\zeta;\upsilon_1 + h,\upsilon_2) - F'_\xi(.,.,\varphi_1;\upsilon_1,\upsilon_2)\big)\,d\theta\,\zeta\,dt\,dx,$$

$$R_h = h\iint\limits_{\Pi}\int\limits_0^1 \big(F'_{\upsilon_1}(.,.,\varphi_1;\upsilon_1 + \theta h,\upsilon_2) - F'_{\upsilon_1}(.,.,\varphi_1;\upsilon_1,\upsilon_2)\big)\,d\theta\,dt\,dx,$$

и согласно лемме 3.10, $R_h = o(h)$. Применяя лемму 4.1, а также неравенство Гельдера, полученное соотношение можно переписать в виде

$$\Delta_h J = h\iint\limits_{\Pi} F'_\xi(t,x,\varphi_1,\upsilon)y(t,x)\,dt\,dx + h\iint\limits_{\Pi} F'_{\upsilon_1}(t,x,\varphi_1,\upsilon)\,dt\,dx + P_h + o(h). \tag{4.12}$$

Еще раз применяя лемму 4.1 и неравенство Гельдера, с учетом уже установленного ограниченного вложения $V(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, вытекающего из леммы 3.1 и теоремы вложения Соболева для пространства $H^1(\Omega)$, заключаем, что существует константа $\gamma_0 > 0$ такая, что

$$|P_h| \leqslant \gamma_0\,|h| \left\|\int\limits_0^1 \big(F'_\xi(.,.,\varphi_1 + \theta\zeta;\upsilon_1 + h,\upsilon_2) - F'_\xi(.,.,\varphi_1;\upsilon_1,\upsilon_2)\big)\,d\theta\right\|_{L_{q'}}.$$

Пользуясь опять леммой 3.10 и оценкой (4.2), получаем: $P_h = o(h)$. Таким образом, соотношение (4.12) можно переписать в виде:

$$\Delta_h J = h \left( \iint\limits_{\Pi} \big( F'_\xi(t,x,\varphi_1,\upsilon) y(t,x) + F'_{\upsilon_1}(t,x,\varphi_1,\upsilon) \big)\, dt\, dx \right) + o(h).$$

Отсюда сразу же получаем (2.9). В свою очередь, при дополнительном условии (2.10) соотношение (2.9) по лемме 3.11, примененной с параметрами $\vec{Q}(t,x) = -\sigma'_{\upsilon_1}(t,x,\upsilon_1)\nabla\varphi_1(t,x)$, $W = F'_\xi(t,x,\varphi_1,\upsilon)$, равносильно соотношению (2.11).

2. *Вычисление* $\dfrac{\partial J}{\partial \upsilon_2}$ – проводится совершенно аналогично пункту 1, только вместо леммы 4.1 используется лемма 4.2.

□

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов. *Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных.* М.: Научный мир. 2008.
2. А.А. Жидков, А.В. Калинин. *Некоторые вопросы математического и численного моделирования глобальной электрической цепи в атмосфере* // Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. 6(1), 150–158 (2009).
3. A.V. Kalinin, N.N. Slyunyaev. *Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit* // J. Math. Anal. Appl. **450**:1, 112–136 (2017).
4. E.A. Mareev, S.V. Anisimov. *Geophysical studies of the global electric circuit* // Izv. Phys. Solid Earth. **44**:10, 760–769 (2008).
5. Е.А. Мареев. *Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи* // Усп. физ. наук. **180**:5, 527–534 (2010).
6. J. Jansky, V.P. Pasko. *Effects of conductivity perturbations in time-dependent global electric circuit model* // J. Geophys. Res.: Space Phys. **120**:12, 10654–10668 (2015).
7. V.V. Denisenko, M.J. Rycroft, R.G. Harrison. *Mathematical simulation of the ionospheric electric field as a part of the global electric circuit* // Surv. Geophys. **40**:1, 1–35 (2019).
8. В.Н. Морозов. *Математическое моделирование атмосферно-электрических процессов с учетом влияния аэрозольных частиц и радиоактивных веществ.* СПб.: Российский государственный гидрометеорологический университет. 2011.
9. A.J.G. Baumgaertner, J.P. Thayer, R.R. Neely, G. Lucas. *Toward a comprehensive global electric circuit model: Atmospheric conductivity and its variability in CESM1(WACCM) model simulations* // J. Geophys. Res.: Atmospheres. **118**:16, 9221–9232 (2013).
10. S.S. Davydenko, E.A. Mareev, T.C. Marshall, M. Stolzenburg. *On the calculation of electric fields and currents of mesoscale convective systems* // J. Geophys. Res. **109**:D11, 1–10 (2004).
11. G.M. Lucas, A.J.G. Baumgaertner, J.P. Thayer. *A global electric circuit model within a community climate model* // J. Geophys. Res.: Atmospheres. **120**:23, 12054–12066 (2015).
12. V. Bayona, N. Flyer, G.M. Lucas, A.J.G. Baumgaertner. *A 3-D RBF-FD solver for modeling the atmospheric global electric circuit with topography (GEC-RBFFD v1.0)* // Geoscientific Model Development. **8**:10, 3007–3020 (2015).
13. N.A. Denisova, A.V. Kalinin. *Influence of the choice of boundary conditions on the distribution of the electric field in models of the global electric circuit* // Radiophys. Quant. Electronics. **61**:10, 741–751 (2019).
14. А.В. Чернов. *О дифференцировании функционала в задаче параметрической оптимизации коэффициента уравнения глобальной электрической цепи* // Журн. вычисл. матем. матем. физ. **56**:9, 1586–1601 (2016).
15. А.В. Чернов. *О дифференцировании функционала в задаче параметрической оптимизации старшего коэффициента эллиптического уравнения* // Дифф. уравн. **51**:4, 538–547 (2015).

16. А.В. Чернов. *О дифференцировании функционала в задаче параметрической оптимизации коэффициента полулинейного эллиптического уравнения* // Дифф. уравн. **53**:4, 559–569 (2017).
17. А.В. Чернов. *О единственности решения обратной задачи определения параметров в старшем коэффициенте и правой части эллиптического уравнения* // Дальневосточный мат. журн. **16**:1, 96–110 (2016).
18. А.В. Чернов. *О единственности решения обратной задачи атмосферного электричества* // Вестник российских университетов. Математика. **25**:129, 85–99 (2020).
19. А.В. Чернов. *О сохранении разрешимости полулинейного уравнения глобальной электрической цепи* // Журн. вычисл. матем. матем. физ. **58**:12, 2095–2111 (2018).
20. А.В. Чернов. *О тотальном сохранении разрешимости полулинейного уравнения глобальной электрической цепи* // Дифф. уравн. **54**:8, 1090–1099 (2018).
21. Ф.В. Лубышев, А.Р. Манапова. *Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных* // Журн. вычисл. матем. матем. физ. **53**:1, 20–46 (2013).
22. О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука. 1973.
23. Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир. 1978.
24. Д. Гилбарг, Н. Трудингер. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука. 1989.
25. К. Иосида. *Функциональный анализ.* М.: ЛКИ. 2007.
26. А.В. Чернов. *О тотальном сохранении глобальной разрешимости дифференциально-операторного уравнения* // Прикл. мат. вопр. управл. 2, 94–111 (2017).
27. А.В. Чернов. *О локальных условиях выпуклости трубок достижимости управляемых распределенных систем* // Изв. вузов. Матем. 11, 72–86 (2014).
28. М.А. Красносельский. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.* М.: ГИТТЛ. 1956.

Андрей Владимирович Чернов,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр-т Гагарина, 23,
603950, г. Нижний Новгород, Россия
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,
ул. Минина, 24,
603950, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: chavnn@mail.ru