ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 94-108.

УДК 519.2

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ДОЗ ПО ДАННЫМ БИНАРНЫХ ОТКЛИКОВ

М.С. ТИХОВ

Аннотация. Для модели бинарного отклика мы предлагаем новый прямой способ непараметрического оценивания эффективной дозы $ED_{100\lambda}$ ($0< \lambda < 1$). Этот метод приводит к простой и надежной монотонной оценке эффективной дозы зависимости $\lambda \to ED_{100\lambda}$ и удобен для пользователей традиционных методов сглаживания ядерных оценок. Кроме того, он эффективен в вычислительном отношении, потому что не требует численной инверсии оценки кривой квантильной функции. Мы доказываем асимптотическую нормальность этой новой оценки и сравниваем ее с DNP-оценкой.

Ключевые слова: модель бинарного отклика, эффективная доза, непараметрическая оценка.

Mathematics Subject Classification: 62G05, 62G08, 62G20, 62P10.

1. Введение

Рассмотрим следующую модель бинарных откликов, которая носит условное название *зависимость доза-эффект* [1] и которую можно описать следующим образом.

Пусть $\{(X_i, U_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ – потенциальная повторная выборка из неизвестного распределения $F(x)\, Q(y)$, $F(x) = \mathbf{P}(X_i < x)$, $Q(y) = \mathbf{P}(U_i < y)$, $x, y \in \mathbf{R}$, вместо которой наблюдается выборка $\mathcal{U}^{(n)} = \{(U_i, W_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$, где $W_i = \chi(X_i < U_i)$ есть индикатор события $(X_i < U_i)$. Здесь U_i рассматриваются как вводимые дозы, а W_i – как эффект от воздействия дозы U_i. Пусть $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$, причем $f(x) > 0$. Эту ситуацию будем называть *случайным* планом эксперимента.

Наряду со случайным планом рассматриваются *фиксированные* планы эксперимента. Именно, будем полагать вводимую дозу U неслучайной и положим $U_i = u_i$, $i = 0, 1, ..., n+1$, где $0 = u_0 < u_1 < ... < u_n < u_{n+1} = 1$.

Одной из основных задач зависимости доза-эффект является оценка *эффективных доз* $ED_{100\lambda} = F^{-1}(\lambda) = x_\lambda$, $0 < \lambda < 1$, по выборке $\mathcal{U}^{(n)}$. Для фиксированных планов эксперимента мы рассмотрим несколько непараметрических оценок и найдем их асимптотические (при $n \to \infty$) распределения.

Непараметрический подход к оцениванию предполагает наличие ядерных функций $K_r(x)$, $K_d(x)$, фактически четных и финитных плотностей распределения с носителем на $[-1, 1]$, и величин h_r, h_d – сглаживающих параметров, которые неслучайны, зависят от объема выборки n и которые сходятся к нулю, когда $n \to \infty$, но $nh_r \to \infty$, $nh_d \to \infty$ при $n \to \infty$. Положим также $H_d(u) = \int_{-\infty}^{u} K_d(x)\, dx$.

Для оценки функции $F(x)$ будем использовать статистику

$$F_{nh_r}(x) = \frac{1}{nh_r} \sum_{i=1}^{n} K_r\left(\frac{x - u_i}{h_r}\right) W_i.$$

M.S. Tikhov, Nonparametric estimates of the effective doses at quantal response.

© Тихов М.С. 2013.

Поступила 16 февраля 2012 г.

В данной работе для фиксированных планов эксперимента в зависимости доза-эффект мы доказываем асимптотическую нормальность оценки

$$\hat{x}_{1,\lambda} = \frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\lambda} K_d\left(\frac{F_{nh_r}(i/n)-u}{h_d}\right)du =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_d\left(\frac{\lambda - F_{nh_r}(i/n)}{h_d}\right) \tag{1}$$

эффективной дозы x_λ , которую мы называем DNP-*оценкой*.

Мы также изучим асимптотическое поведение оценки для x_λ вида

$$\hat{x}_{2,\lambda} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}\int_{-\infty}^{\lambda} K_d\left(\frac{F_{nh_r}(i/n)-u}{h_d}\right)du}{\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\lambda} K_d\left(\frac{u-F_{nh_r}(i/n)}{h_d}\right)du} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}H_d\left(\frac{\lambda - F_{nh_r}(i/n)}{h_d}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}H_d\left(\frac{\lambda - F_{nh_r}(i/n)}{h_d}\right)}, \tag{2}$$

которая была предложена в работе [2]. Мы показываем, что оценка $\hat{x}_{2,\lambda}$ имеет такое же предельное распределение, что и оценка $\hat{x}_{1,\lambda}$.

Рассматривается также асимптотическое поведение оценки

$$\hat{x}_{3,\lambda} = \sqrt{\hat{S}_{2,\lambda} - b(h_r, h_d)},$$

где

$$\hat{S}_{2,\lambda} = \frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}\int_{-\infty}^{\lambda} K_d\left(\frac{F_{nh_r}(i/n)-u}{h_d}\right)du = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}H_d\left(\frac{\lambda - F_{nh_r}(i/n)}{h_d}\right),$$

а $b(h_r, h_d)$ – некоторые константы, зависящие от h_r, h_d (см. теорему 4.1), и показываем, что оценка $\hat{x}_{3,\lambda}$ является состоятельной оценкой x_λ, а ее предельная дисперсия меньше, чем предельная дисперсия оценок $\hat{x}_{1,\lambda}, \hat{x}_{2,\lambda}$.

Отметим, что в работе [3] для регрессионной модели

$$Y_i = m(X_i) + \sigma(X_i)\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{3}$$

где $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^n$ есть двумерная выборка независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин (с.в.), причем с.в. X_i имеет плотность распределения $f(x) > 0$, а её значения расположены на отрезке $[0,1]$, с.в. ε_i также предполагаются н.о.р. с нулевым ожиданием и имеют четвертый момент (причем $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ независимы от $\{X_i\}_{i=1}^n$), а регрессионная функция $m(x)$ предполагается строго монотонной, была предложена оценка $m_I^{-1}(\lambda)$ для функции $m^{-1}(\lambda)$ вида (1). Там же было показано, что оценка $m_I^{-1}(\lambda)$ является асимптотически нормальной. В [3] для доказательства асимптотической нормальности оценки $m_I^{-1}(\lambda)$ существенно использовалась независимость величин $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$. В зависимости *доза-эффект* величины W_i являются бинарными величинами, поэтому мы не можем использовать представление (3). Здесь для доказательства асимптотической нормальности требуется несколько иной подход.

2. Основные условия

Пусть $\{X_i, \ i = 1,\dots,n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных с X на отрезке $[0,1]$ случайных величин с функцией распределения $F(x)$; $P = \{u_0, u_1, \ \dots, \ u_n, u_{n+1}\}$ – упорядоченное разбиение отрезка $[0,1]$, $u_0 = 0 < u_1 < \ldots < u_n < 1 = u_{n+1}$.

Сформулируем условия на параметры h_r и h_d.

Условия (H).

($\mathbf{H}_1$) $h_r = h_r(n)$, $h_d = h_d(n)$, причем $h_r \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $h_d \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, но $nh_r \to \infty$, $nh_d \to \infty$ при $n \to \infty$.

($\mathbf{H}_2$) $h_d/h_r \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

($\mathbf{H}_3$) $nh_r^5 = O(1)$ при $n \to \infty$.

($\mathbf{H}_4$) $nh_r h_d^{8/3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

В качестве примера рассмотрим $h_r = n^{-1/5}$, $h_d = n^{-1/4}$. Очевидно, что для этих последовательностей условия $(\mathbf{H})$ будут выполнены.

Положим $\| K \|^2 = \int_{-1}^{1} K^2(x)\,dx$.

Условия на ядерные функции $K_r(x)$ и $K_d(x)$.

Условия (K).

($\mathbf{K}_1$) $K_{r(d)}(x) \geq 0$, причем $K_{r(d)}(x) = 0, x \notin [-1,1]$.

($\mathbf{K}_2$) $\int\limits_{-1}^{1} K_r(x)\,dx = 1, \quad \int\limits_{-1}^{1} K_d(x)\,dx = 1.$

($\mathbf{K}_3$) $K_{r(d)}(x) = K_{r(d)}(-x), x \in \mathbf{R}$.

($\mathbf{K}_4$) Существуют непрерывные ограниченные производные функций $K_r(x)$, $K_d(x)$ до третьего порядка включительно на отрезке $[-1,1]$.

($\mathbf{K}_5$) $\| K_j \|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} | K_j(x) | = k_j < \infty$ для $j = r, d$.

Замечание 2.1. При условиях $(\mathbf{K})$ существуют четверные моменты у распределений с плотностями $K_r(x)$, $K_d(x)$, причем

$$\nu_r^2 = \int x^2 K_r(x)\,dx, \qquad \nu_d^2 = \int x^2 K_d(x)\,dx,$$

$$\mu_r^4 = \int x^4 K_r(x)\,dx, \qquad \mu_d^4 = \int x^4 K_d(x)\,dx.$$

Определим вариацию функции K (см. [4], с. 234).

Пусть $K : [a,b] \to \mathbf{R}$. *Вариацией* функции $K = K(u)$ на отрезке $[a,b]$ называется следующая величина: $\bigvee(K) = \bigvee_a^b(K) = \sup\limits_P \sum\limits_{k=0}^{m} | K(u_{k+1}) - K(u_k) |$, т.е. точная верхняя грань по всем упорядоченным разбиениям P отрезка $[a,b]$. Всюду в работе мы рассматриваем вариации функций на отрезке $[0,1]$.

Замечание 2.2. Из условия ограниченности производных функций $K_r(x)$, $K_d(x)$ на отрезке $[-1,1]$ (условие $\mathbf{K}_4$) следует, что их вариации ограничены (см. [4], с. 235), т.е. $\bigvee(K_{d(r)}) < \infty$.

Условие (F).

($\mathbf{F}_1$) Существует третья непрерывная ограниченная производная плотности распределения $f(x) = F'(x)$, причем $f(x) \geq C_0 > 0$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$, т.е. плотность $f(x)$ на отрезке $[0,1]$ отделима от нуля.

Условие (P).

($\mathbf{P}_1$) При $n \to \infty$

$$\max_{k=0,1,\dots,n} \max\left\{\left|u_k - \frac{k}{n}\right|, \left|u_{k+1} - \frac{k}{n}\right|\right\} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из условия (**P**) следует, что $u_k = \dfrac{k}{n} + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, причем последовательность $n\left(u_k - \dfrac{k}{n}\right)$ равномерно по $0 \leqslant k \leqslant n$ ограничена константой C.

Всюду в работе будем предполагать, что выполнены (основные) условия (**H**), (**K**), (**F**), (**P**).

3. Вспомогательные результаты

В этом разделе представлены вспомогательные результаты, необходимые для изучения асимптотики введенных выше оценок $\hat{x}_{1,\lambda}$, $\hat{x}_{2,\lambda}$, $\hat{x}_{3,\lambda}$.

Приведем сначала неравенство Koksma-Hlawka (см. [5], с.18), которое позволяет оценить скорость сходимости интегральных сумм к соответствующему интегралу.

Пусть $\mathcal{B}$ – лебегова σ-алгебра на $I = [0,1]$ и ρ – лебегова мера на $\mathcal{B}$. Для $P = \{u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$ с $u_0 = 0 < u_1 < \ldots < u_n < 1 = u_{n+1}$ и $B \in \mathcal{B}$ определим

$$A(B;P) = \sum_{i=1}^{n} \chi_B(u_i), \quad D_n(\mathcal{B};P) = \sup_{B\in\mathcal{B}} \left|\frac{A(B;P)}{n} - \rho(B)\right|,$$

где $\chi_B(x)$ – индикатор множества B. Положим $D_n^*(P) = D_n(J_c^*, P)$, где J_c^* есть подмножества на I вида $[0, u_i]$.

Для любой ограниченной функции $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ положим $\|\,\psi\,\|_I = \sup_{x\in I} |\,\psi(x)\,|$.

Теорема 3.1 [5] (Неравенство Koksma-Hlawka). *Если функция $f(u)$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$ имеет ограниченную вариацию $\bigvee(f)$ на $[0,1]$, то для любых $0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n < 1$ мы имеем*

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i) - \int_0^1 f(u)\,du\right| \leqslant \bigvee(f) D_n^*(u_1, \ldots, u_n).$$

Приведем также еще две леммы из [5].

Лемма 3.2. *Если $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in [0,1]$ удовлетворяют неравенствам $|\,x_i - y_i\,| \leqslant \varepsilon$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, то*

$$|\,D_n^*(x_1, \ldots, x_n) - D_n^*(y_1, \ldots, y_n)\,| \leqslant \varepsilon.$$

Замечание 3.1. Из леммы 3.2 следует, что $D_n^*(x_1, \ldots, x_n)$ есть непрерывная функция переменных $(x_1, \ldots, x_n)$.

Лемма 3.3. *Если $0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n < 1$, то*

$$D_n^*(u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{2n} + \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\,u_i - \frac{2i-1}{2n}\,\right|.$$

Замечание 3.2. Если $u_i = \dfrac{i}{n}$, то $\dfrac{i}{n} - \dfrac{2i-1}{2n} = \dfrac{1}{2n}$ и $D_n^*(u_1, \ldots, u_n) = \dfrac{1}{n}$.

Теорема 3.2 ([6], с.337; [7], с. 299). *Если* $\varphi(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *и*

$$\varphi(n)(T_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \tau^2)$$

то

$$\varphi(n)(g(T_n) - g(\theta)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \tau^2(g'(\theta))^2).$$

при условии, что существует непрерывная не равная нулю производная $g'(\theta)$ *функции* $g(\theta)$.

Для дальнейшего нам понадобится также следующий вспомогательный результат.
Рассмотрим функцию

$$\tilde{f} = \tilde{f}(u) = \frac{1}{h_d} K_d \left(\frac{F(u) - \lambda}{h_d} \right)$$

и оценим ее вариацию на отрезке $[0, 1]$.

Лемма 3.4. *Если выполнены основные условия, то*

$$\bigvee(\tilde{f}\,) = \sup \sum_{j=1}^{l} |\, \tilde{f}(u_j) - \tilde{f}(u_{j-1}) \,| = O\left(\frac{1}{h_d}\right),$$

где супремум берется по всем возможным упорядоченным разбиениям $0 < u_1 < u_2 < \ldots <$ $< u_l < 1$ *отрезка* $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть $0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_l < 1$ есть произвольное упорядоченное разбиение отрезка $[0, 1]$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{l} |\, \tilde{f}(u_j) - \tilde{f}(u_{j-1}) \,| = \frac{1}{h_d} \sum_{j=1}^{l} \left| K_d\left(\frac{F(u_j) - \lambda}{h_d}\right) - K_d\left(\frac{F(u_{j-1}) - \lambda}{h_d}\right) \right| =$$

$$= \frac{1}{h_d} \left\{ \sum_{j=1}^{l_1} + \sum_{j=l_2+2}^{l} + \sum_{j=l_1+2}^{l_2} \right\} \left| K_d\left(\frac{F(u_j) - \lambda}{h_d}\right) - K_d\left(\frac{F(u_{j-1}) - \lambda}{h_d}\right) \right| +$$

$$+ \frac{1}{h_d} \left| K_d\left(\frac{F(u_{l_1+1}) - \lambda}{h_d}\right) - K_d\left(\frac{F(u_{l_1}) - \lambda}{h_d}\right) \right| +$$

$$+ \frac{1}{h_d} \left| K_d\left(\frac{F(u_{l_2+1}) - \lambda}{h_d}\right) - K_d\left(\frac{F(u_{l_2+2}) - \lambda}{h_d}\right) \right|,$$

где l_1 и l_2 таковы, что

$$F(u_{l_1}) \leqslant \lambda - h_d, \qquad F(u_{l_1+1}) > \lambda - h_d,$$

$$F(u_{l_2+1}) < \lambda + h_d, \qquad F(u_{l_2+2}) \geq \lambda + h_d.$$

Поскольку $K_d(x) = 0$ для $|\,x\,| \geq 1$, то сумма $\sum_{j=1}^{l_1} + \sum_{j=l_2+2}^{l}$ будет равна нулю, а

$$K_d\left(\frac{F(u_{l_1+1}) - \lambda}{h_d}\right) = K_d(-1) + K_d'(\xi)\left(\frac{F(u_{l_1+1}) - \lambda}{h_d} + 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где $-1 \leqslant \xi \leqslant \dfrac{F(u_{l_1+1}) - \lambda}{h_d}$.

Аналогично можно показать, что $K_d\left(\dfrac{F(u_{l_2}) - \lambda}{h_d}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

В оставшейся сумме все точки $\dfrac{F(u_j)-\lambda}{h_d}$ принадлежат отрезку $[-1,1]$, и поэтому

$$\frac{1}{h_d}\sum_{j=l_1+2}^{l_2}\left|K_d\left(\frac{F(u_j)-\lambda}{h_d}\right)-K_d\left(\frac{F(u_{j-1})-\lambda}{h_d}\right)\right| =$$

$$=\frac{1}{h_d}\sum_{j=l_1+2}^{l_2}|K'_d(\xi_j)|\ \frac{F(u_j)-F(u_{j-1})}{h_d}\leqslant\frac{M}{h_d^2}(F(u_{l_2})-F(u_{l_1+2}))\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2Mh_d}{h_d^2}=\frac{2M}{h_d},$$

где $\xi_j\in[-1,1]$, $|K'_d(\xi_j)|\leqslant M$ и M не зависит от n. Отсюда следует результат леммы.

4. Основные результаты

4.1. Асимптотика оценки $\hat{x}_{1,\lambda}$. Представим статистику $\hat{x}_{1,\lambda}$ в следующем виде:

$$\hat{x}_{1,\lambda}=\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\lambda}K_d\left(\frac{F_{nh_r}(i/n)-u}{h_d}\right)du=x_{\lambda,n}+\Delta,$$

где

$$x_{\lambda,n}=\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\lambda}K_d\left(\frac{F(i/n)-u}{h_d}\right)du,$$

$$\Delta=\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\lambda}\left\{K_d\left(\frac{F_{nh_r}(i/n)-u}{h_d}\right)-K_d\left(\frac{F(i/n)-u}{h_d}\right)\right\}du=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(H_d\left(\frac{F_{nh_r}(i/n)-u}{h_d}\right)-H_d\left(\frac{F(i/n)-u}{h_d}\right)\right).$$

Асимптотическое поведение $x_{\lambda,n}$ представлено в следующей лемме.

Лемма 4.1. *При $n\to\infty$*

$$x_{\lambda,n}=x_\lambda+a_{2,d}h_d^2+o(h_d^2),$$

где

$$x_\lambda=F^{-1}(\lambda),\quad a_{2,d}=\frac{1}{2}(F^{-1})''(\lambda)\nu_d^2=-\frac{\nu_d^2f'(x_\lambda)}{2f^3(x_\lambda)}.$$

Доказательство. Используя неравенство Koksma-Hlawka, лемму 3.4 и замечание 3.2, получаем:

$$x_{\lambda,n}=\frac{1}{h_d}\int_0^1\int_{-\infty}^{\lambda}K_d\left(\frac{F(x)-u}{h_d}\right)du\,dx+O\left(\frac{1}{nh_d}\right)=$$

$$=\int_0^1dx\int_{\frac{F(x)-\lambda}{h_d}}^{1}K_d(z)\,dz+O\left(\frac{1}{nh_d}\right).$$

Поскольку $\frac{F(x)-\lambda}{h_d} \leqslant -1$ при $x \leqslant F^{-1}(\lambda - h_d) \leqslant 1$, то

$$x_{\lambda,n} = \int\limits_0^{F^{-1}(\lambda-h_d)} dx \int\limits_{-1}^1 K_d(z)\,dz + \int\limits_{F^{-1}(\lambda-h_d)}^1 dx \int\limits_{\frac{F(x)-\lambda}{h_d}}^1 K_d(z)\,dz + O\left(\frac{1}{nh_d}\right).$$

Первый интеграл равен $F^{-1}(\lambda - h_d)$, а во втором сделаем замену $y = \frac{F(x)-\lambda}{h_d}$ и замечая, что $\lambda < F(1) = 1$, а $F \in C^2$, $f(x) \geq C_0 > 0$, получим

$$x_{\lambda,n} = F^{-1}(\lambda - h_d) + h_d \int\limits_{-1}^{\frac{F(1)-\lambda}{h_d}} dy \int\limits_y^1 K_d(z)(F^{-1})'(\lambda + h_d y)\,dz + O\left(\frac{1}{nh_d}\right) =$$

$$= F^{-1}(\lambda - h_d) + h_d \int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_y^1 K_d(z)\{(F^{-1})'(\lambda) + (F^{-1})''(\lambda) y h_d + O(h_d^2)\}\,dz + O\left(\frac{1}{nh_d}\right).$$

Так как

$$\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_y^1 K_d(z)\,dz = 1, \quad \int\limits_{-1}^1 y\,dy \int\limits_y^1 K_d(z)\,dz = \frac{1}{2}\nu_d^2 - \frac{1}{2},$$

$$\sup_{t,x\in[0,1]} |(F^{-1})'(t) - (F^{-1})'(x) - (t-x)(F^{-1})''(x)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{x\in[0,1]} |(F^{-1})'''(x)|,$$

а

$$(F^{-1})'''(x) = \frac{3(f'(F^{-1}(x)))^2}{(f(F^{-1}(x)))^5} - \frac{f''(F^{-1}(x))}{(f(F^{-1}(x)))^4},$$

то в силу отделимости плотности от нуля и ограниченности производных функции распределения получаем, что

$$\sup_{t,x\in[0,1]} |(F^{-1})'(t) - (F^{-1})'(x) - (t-x)(F^{-1})''(x)| \leqslant C.$$

Таким образом,

$$x_{\lambda,n} = F^{-1}(\lambda - h_d) +$$
$$+ h_d \left((F^{-1})'(\lambda) + (F^{-1})''(\lambda) h_d \int\limits_{-1}^1 y\,dy \int\limits_y^1 K_d(z)\,dz + O(h_d^2) \right) + O\left(\frac{1}{nh_d}\right) =$$
$$= F^{-1}(\lambda) + \frac{1}{2} h_d^2 (F^{-1})''(\lambda) \nu_d^2 + O\left(h_d^3 + \frac{1}{nh_d}\right),$$

что завершает доказательство леммы 4.1.

Рассмотрим величину Δ и представим ее в следующем виде:

$$\Delta = \Delta_1 + \frac{1}{2}\Delta_2 + \frac{1}{6}\Delta_3.$$

Здесь

$$\Delta_1 = -\frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{\lambda - F(i/n)}{h_d}\right)(F_{nh_r}(i/n) - F(i/n)),$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{nh_d^2} \sum_{i=1}^n K_d'\left(\frac{\lambda - F(i/n)}{h_d}\right)(F_{nh_r}(i/n) - F(i/n))^2,$$

$$\Delta_3 = -\frac{1}{nh_d^3}\sum_{i=1}^n K_d''\left(\frac{\lambda-\xi_i}{h_d}\right)(F_{nh_r}(i/n)-F(i/n))^3,$$

где $|\,\xi_i - F(i/n)\,| \leqslant |\,F(i/n)-F_{nh_r}(i/n)\,|$.

Лемма 4.2. *При* $n\to\infty$

$$\sqrt{nh_r}(\Delta_1 - a_{2,r}h_d^2) \xrightarrow{d} N(0,g_2^2),$$

где

$$a_{2,r} = -\frac{\nu_r^2}{2}F''(F^{-1}(\lambda))(F^{-1})'(\lambda) = -\frac{\nu_r^2 f'(x_\lambda)}{2f(x_\lambda)},$$

$$g_2^2 = \lambda(1-\lambda)\|\,K_r\,\|^2\left[(F^{-1})'(\lambda)\right]^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)}{f^2(x_\lambda)}\|\,K_r\,\|^2.$$

Доказательство. Определим величины

$$\Delta_{1,1} = -\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)(F_{nh_r}(i/n)-\mathbf{E}(F_{nh_r}(i/n))),$$

$$\Delta_{1,2} = -\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)(\mathbf{E}(F_{nh_r}(i/n))-F(i/n)).$$

Тогда $\Delta_1 = \Delta_{1,1}+\Delta_{1,2}$, причем величина $\Delta_{1,2}$ неслучайна.
Из [8], с. 68, следует, что

$$\sup_x|\,\mathbf{E}(F_{nh_r}(x)-F(x))\,| \leqslant \frac{1}{2}h_r^2\nu_r^2\sup_x|\,f'(x)\,| \leqslant \frac{M_1h_r^2\nu_r^2}{2}.$$

Используя это замечание, получаем, что

$$\mathbf{E}(\Delta_1) = \mathbf{E}(\Delta_{1,2}) = -\frac{\nu_r^2h_r^2}{2nh_d}\sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)F''(i/n)(1+o(1)) =$$

$$= -\frac{\nu_r^2h_r^2}{2h_d}\int_0^1 K_d\left(\frac{F(x)-\lambda}{h_d}\right)F''(x)\,dx(1+o(1)) + O\left(\frac{h_r^2}{nh_d}\right) =$$

$$= -\frac{\nu_r^2h_r^2}{2}\int_{-1}^1 K_d(z)(F^{-1})'(\lambda+zh_d)F''(F^{-1}(\lambda+zh_d))\,dz\,(1+o(1)) + O\left(\frac{h_r^2}{nh_d}\right) =$$

$$= -\frac{\nu_r^2}{2}h_r^2(F^{-1})'(\lambda)F''(F^{-1}(\lambda)) + o(h_r^2).$$

Далее, подсчитаем дисперсию величины Δ_1. Имеем:

$$\mathbf{D}(\Delta_1) = \mathbf{D}(\Delta_{1,1}) =$$

$$= \frac{1}{n^4h_d^2h_r^2}\sum_{j=1}^n F(u_j)(1-F(u_j))\left\{\sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)K_r\left(\frac{i/n-u_j}{h_r}\right)\right\}^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2h_d^2h_r^2}\sum_{j=1}^n F(u_j)(1-F(u_j))\left\{\int_0^1 K_d\left(\frac{F(x)-\lambda}{h_d}\right)K_r\left(\frac{x-u_j}{h_r}\right)dx + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^2.$$

Сделаем замену $z = \dfrac{F(x)-\lambda}{h_d}$ и применим неравенство Koksma-Hlavka. Тогда

$$\mathbf{D}(\Delta_1) = \frac{1}{nh_d^2h_r^2}\int\limits_0^1 F(y)(1-F(y))\times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^1 K_d\left(\frac{F(x)-\lambda}{h_d}\right)K_r\left(\frac{x-y}{h_r}\right)\,dx + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^2 dy + O\left(\frac{1}{n^2h_r^2}\right).$$

Кроме того, при $n\to\infty$

$$K_r\left(\frac{F^{-1}(\lambda+h_dz)-y}{h_r}\right) = K_r\left(\frac{F^{-1}(\lambda)-y}{h_r}\right)+o(1).$$

Учитывая последнее и делая замену $t = \dfrac{F^{-1}(\lambda)-y}{h_r}$, получаем окончательно

$$\mathbf{D}(\Delta_1) = \frac{\lambda(1-\lambda)\|\,K_r\,\|^2}{f^2(x_\lambda)nh_r} + o\left(\frac{1}{nh_r}\right).$$

Теперь, чтобы доказать асимптотическую нормальность величины Δ_1, достаточно доказать асимптотическую нормальность $\Delta_{1,1}$. Для этого представим $\Delta_{1,1}$ в виде суммы $\Delta_{1,1} = \sum_{i=1}^n \xi_j$, где

$$\xi_j = -\frac{1}{n^2h_dh_r}\left(\chi(X_j<u_j)-F(u_j)\right)\sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)K_r\left(\frac{i/n-u_j}{h_r}\right).$$

Пусть $G(u) = F(u)-4F^2(u)+6F^3(u)-3F^4(u)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\xi_j-\mathbf{E}(\xi_j))^4 = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\xi_j)^4 = \frac{1}{n^8h_d^4h_r^4}\sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\chi(X_j<u_j)-F(u_j))^4\times$$

$$\times\left\{\sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)K_r\left(\frac{i/n-u_j}{h_r}\right)\right\}^4 =$$

$$= \frac{1}{n^8h_d^4h_r^4}\sum_{j=1}^n G(u_j)\left\{\int\limits_0^1 K_d\left(\frac{F(x)-\lambda}{h_d}\right)K_r\left(\frac{x-u_j}{h_r}\right)\,dx + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^4 =$$

$$= \frac{1}{n^4h_r^4}\sum_{j=1}^n G(u_j)\left\{\int\limits_0^1 K_d(y)K_r\left(\frac{x-u_j}{h_r}\right)x'_y\,dy + O\left(\frac{1}{nh_d}\right)\right\}^4 =$$

$$= \frac{1}{n^3h_r^3}\int\limits_{-1}^1 G(x-zh_r)\left\{\int\limits_{-1}^1 K_d(y)K_r(z)(F^{-1})'(\lambda+h_dy)\,dy\right\}^4 dz + O\left(\frac{1}{n^4h_d^4}\right) = O\left(\frac{1}{n^3h_d^3}\right).$$

Поскольку

$$\frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\xi_j-\mathbf{E}(\xi_j))^4}{\left(\mathbf{D}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right)\right)^2} = \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\xi_j-\mathbf{E}(\xi_j))^4}{(\mathbf{D}(\Delta_1))^2} = O\left(\frac{1}{nh_r}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то для последовательности $\sum_{j=1}^n \xi_j$ выполнены условия центральной предельной теоремы Ляпунова. Отсюда получаем утверждение леммы 4.2.

Лемма 4.3. *При* $n \to \infty$

$$\Delta_2 + \Delta_3 = o\left(\frac{1}{\sqrt{nh_r}}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала Δ_2. Имеем:

$$|\,\mathbf{E}(\Delta_2)\,| \leqslant \frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\left|\,\frac{1}{h_d}K_d'\left(\frac{\lambda - F(i/n)}{h_d}\right)\right|\mathbf{E}(F_{nh_r}(i/n) - F(i/n))^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1 h_r^4}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\left|\,\frac{1}{h_d}K_d'\left(\frac{\lambda - F(i/n)}{h_d}\right)\right| =$$

$$= \frac{C_1 h_r^4}{h_d}\int\limits_{-1}^{1}|\,K_d'(t)\,|\,dt + O\left(\frac{h_r^4}{nh_d^2}\right) =$$

$$= O\left(\frac{h_r^4}{h_d}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{nh_r}}\right).$$

Далее,

$$-\mathbf{E}(\Delta_3) = \frac{1}{nh_d^3}\sum_{i=1}^{n}K_d''\left(\frac{\lambda - \xi_i}{h_d}\right)\mathbf{E}((F_{nh_r}(i/n) - F(i/n))^3).$$

Пусть $A(x) = \mathbf{E}((F_{nh_r}(x) - F(x))^3)$. Тогда

$$A(x) = \mathbf{E}((F_{nh_r}(x) - \mathbf{E}(F_{nh_r}(x)) + \mathbf{E}(F_{nh_r}(x)) - F(x))^3) =$$

$$= \mathbf{E}((F_{nh_r}(x) - \mathbf{E}(F_{nh_r}(x)))^3) + (\mathbf{E}(F_{nh_r}(x)) - F(x))^3 + 3\mathbf{D}(F_{nh_r})\cdot(\mathbf{E}(F_{nh_r}(x)) - F(x))) =$$

$$= \mathbf{E}((F_{nh_r}(x) - \mathbf{E}(F_{nh_r}(x)))^3) + O\left(h_r^6 + \frac{h_r}{n}\right),$$

причем оценки равномерны по x и, значит,

$$|\,\mathbf{E}(\Delta_3\,| \;\leqslant \frac{M_2}{h_d^3}\int_{-1}^{1}A(x)\,dx.$$

Рассмотрим теперь

$$\mathbf{E}((F_{nh_r}(x) - \mathbf{E}(F_{nh_r}(x)))^3) = \mathbf{E}((n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\eta_j(x))^3),$$

где

$$\eta_j(x) = \frac{1}{h_r}(\chi(X_j < x) - F(x))K_r\left(\frac{x-u}{h_r}\right).$$

Тогда (см. [9], с. 379)

$$\mathbf{E}((n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\eta_j(x))^3) = n^{-2}\mathbf{E}(\eta_1^3(x)) = \frac{F(x) - 3F^2(x) + 2F^3(x)}{n^2h_r^3}K_r^3\left(\frac{x-u}{h_r}\right).$$

Воспользовавшись ограниченностью $K_d''(t)$ и тем, что

$$\frac{1}{h_r}\int_{-1}^{1}K_r^3\left(\frac{x-u}{h_r}\right)\,dx \leqslant M_3 < \infty,$$

получим

$$|\,\mathbf{E}(\Delta_3)\,| = O\left(\frac{1}{n^2h_d^3h_r^2}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{nh_r}}\right).$$

Аналогично можно показать, что $\mathbf{E}(\Delta_2^2)$, $\mathbf{E}(\Delta_3^2)$ сходятся к нулю при $n \to \infty$. Значит, из неравенства Чебышева получаем результат леммы 4.3

Из лемм 4.1 – 4.3 имеем следующую теорему.

Теорема 4.1. *При* $n \to \infty$

$$\sqrt{nh_r}(\hat{x}_{1,\lambda} - x_\lambda - b_2(h_r, h_d)) \xrightarrow{d} N(0, g_2^2),$$

где

$$b_2(h_r, h_d) = a_{2,d}h_d^2 + a_{2,r}h_r^2, \quad a_{2,r} = -\frac{\nu_r^2 f'(x_\lambda)}{2f(x_\lambda)}, \quad a_{2,d} = -\frac{\nu_d^2 f'(x_\lambda)}{2f^3(x_\lambda)},$$

$$g_2^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)\| K_r \|^2}{f^2(x_\lambda)}.$$

4.2. Асимптотика оценок $\hat{x}_{2,\lambda}$ **и** $\hat{x}_{3,\lambda}$**.** Для изучения асимптотики оценки $\hat{x}_{2,\lambda}$ представим ее в следующем виде:

$$\hat{x}_{2,\lambda} = \frac{\hat{S}_{2,\lambda}}{\hat{x}_{1,\lambda}},$$

где

$$\hat{S}_{2,\lambda} = x_{2,\lambda} + 2\Lambda, \quad x_{2,\lambda} = \frac{2}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\int_{-\infty}^{\lambda} K_d\left(\frac{F(i/n) - u}{h_d}\right) du,$$

$$\Lambda = \frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\int_{-\infty}^{\lambda}\left\{K_d\left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - u}{h_d}\right) - K_d\left(\frac{F(i/n) - u}{h_d}\right)\right\} du.$$

Лемма 4.4. *При* $n \to \infty$

$$x_{2,\lambda} = x_\lambda^2 + h_d^2\nu_d^2 x_\lambda\left(-\frac{f'(x_\lambda)}{f^3(x_\lambda)} + \frac{1}{f^2(x_\lambda)}\right) + o(h_d^2).$$

Доказательство. Применяя неравенство Koksma-Hlawka, получаем

$$x_{2,\lambda} = \frac{2}{h_d}\int_0^1\int_{-\infty}^{\lambda} xK_d\left(\frac{F(x) - u}{h_d}\right) du dx + O\left(\frac{1}{nh_d}\right) =$$

$$= 2\int_0^1 x\,dx \int_{(F(x)-\lambda)/h_d}^{1} K_d(y)\,dy + O\left(\frac{1}{nh_d}\right) =$$

$$= 2\int_0^{F^{-1}(\lambda-h_d)} x\,dx\int_{-1}^{1} K_d(y)\,dy + 2\int_{F^{-1}(\lambda-h_d)}^{1} x\,dx \int_{(F(x)-\lambda)/h_d}^{1} K_d(y)\,dy + O\left(\frac{1}{nh_d}\right).$$

Первый интеграл вычисляется непосредственно, а во втором сделаем замену $t = \dfrac{F(x)-\lambda}{h_d}$. Тогда получаем

$$x_{2,\lambda} = (F^{-1}(\lambda - h_d))^2 +$$

$$+2h_d\int_{-1}^{(F(1)-\lambda)/h_d} (F^{-1})'(\lambda + th_d)F^{-1}(\lambda + th_d)\,dt\int_t^1 K_d(y)\,dy + O\left(\frac{1}{nh_d}\right) =$$

$$= \left\{F^{-1}(\lambda) - (F^{-1})'(\lambda)h_d + (F^{-1})''(\lambda)\frac{h_d^2}{2} + o(h_d^2)\right\}^2 +$$

$$+2h_d(F^{-1})'(\lambda)F^{-1}(\lambda)\int\limits_{-1}^{1}dt\int\limits_{t}^{1}K_d(y)\,dy+$$

$$+2h_d^2\int\limits_{-1}^{1}t\,dt\int\limits_{t}^{1}K_d(y)\,dy\left\{(F^{-1})''(\lambda)F^{-1}(\lambda)+\left[(F^{-1})'(\lambda)\right]^2\right\}+o(h_d^2).$$

Так как

$$\int\limits_{-1}^{1}dt\int\limits_{t}^{1}K_d(y)\,dy=1,\quad 2\int\limits_{-1}^{1}dt\int\limits_{t}^{1}K_d(y)t\,dy=\nu_d^2-1,$$

то

$$x_{2,\lambda}=\left\{(F^{-1}(\lambda))^2+((F^{-1})'(\lambda))^2h_d^2-2F^{-1}(\lambda)(F^{-1})'(\lambda)h_d+\right.$$

$$\left.+F^{-1}(\lambda)(F^{-1})''(\lambda)h_d^2\right\}+2(F^{-1})'(\lambda)F^{-1}(\lambda)h_d+$$

$$+h_d^2(\nu_d^2-1)F^{-1}(\lambda)\left\{(F^{-1})''(\lambda)+((F^{-1})'(\lambda))^2\right\}+o(h_d^2).$$

Последнее завершает доказательство леммы 4.4.

Представим теперь величину Λ в виде суммы $\Lambda=\Lambda_1+\frac{1}{2}\Lambda_2+\frac{1}{6}\Lambda_3$, где

$$\Lambda_1=-\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{\lambda-F(i/n)}{h_d}\right)\frac{i}{n}(F_{nh_r}(i/n)-F(i/n)),$$

$$\Lambda_2=\frac{1}{nh_d^2}\sum_{i=1}^{n}K_d'\left(\frac{F(i/n)-u}{h_d}\right)\frac{i}{n}(F_{nh_r}(i/n)-F(i/n))^2,$$

$$\Lambda_3=-\frac{1}{nh_d^3}\sum_{i=1}^{n}K_d''\left(\frac{\xi_i-u}{h_d}\right)\frac{i}{n}(F_{nh_r}(i/n)-F(i/n))^3,$$

$$|\,\xi_i-F(i/n)\,|\leqslant|\,F(i/n)-F_{nh_r}(i/n)\,|.$$

Лемма 4.5 *При* $n\to\infty$

$$\sqrt{nh_r}(\Lambda_1-a_{1,r}h_r^2)\xrightarrow{d}N(0,g_1^2),$$

где

$$a_{1,r}=-\frac{\nu_r^2x_\lambda f'(x_\lambda)}{f^4(x_\lambda)},\quad g_1^2=\frac{4\lambda(1-\lambda)x_\lambda^2}{f^2(x_\lambda)}\|\,K_r\,\|^2.$$

Доказательство. Пусть

$$\Lambda_{1,1}=-\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)\frac{i}{n}(F_{nh_r}(i/n)-\mathbf{E}(F_{nh_r}(i/n))),$$

$$\Lambda_{1,2}=-\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)\frac{i}{n}(\mathbf{E}(F_{nh_r}(i/n))-F(i/n)).$$

Тогда $\Lambda_1=\Lambda_{1,1}+\Lambda_{1,2}$.

Учитывая, что $\mathbf{E}(F_{nh_r}(x)-F(x))=\dfrac{\nu_r^2h_r^2}{2}f'(x)+o(h_r^2)$, получим

$$\mathbf{E}(\Lambda_1)=\mathbf{E}(\Lambda_{1,2})=-\frac{\nu_r^2h_r^2}{2nh_d}\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)\frac{i}{n}F''(i/n)(1+o(1))=$$

$$= -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2h_d} \int\limits_0^1 K_d\left(\frac{F(x)-\lambda}{h_d}\right) xF''(x)\,dx(1+o(1)) + O\left(\frac{h_r^2}{nh_d}\right) =$$

$$= -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2} \int\limits_{-1}^1 K_d(z)F^{-1}(\lambda+zh_d)(F^{-1})'(\lambda+zh_d)F''(F^{-1}(\lambda+zh_d))\,dz(1+o(1)) + O\left(\frac{h_r^2}{nh_d}\right) =$$

$$= -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2} F^{-1}(\lambda)(F^{-1})'(\lambda)F''(F^{-1}(\lambda)) + o(h_d^2).$$

Вычислим теперь дисперсию величины Λ_1. Имеем:

$$\mathbf{D}(\Lambda_1) = \mathbf{D}(\Lambda_{1,1}) =$$

$$= \frac{1}{n^4 h_d^2 h_r^2} \sum_{j=1}^n F(u_j)(1-F(u_j)) \left\{ \sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right) K_r\left(\frac{i/n-u_j}{h_r}\right)\frac{i}{n} \right\}^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2 h_d^2 h_r^2} \sum_{j=1}^n F(u_j)(1-F(u_j)) \left\{ \int\limits_0^1 K_d\left(\frac{F(x)-\lambda}{h_d}\right) K_r\left(\frac{x-u_j}{h_r}\right) x\,dx + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}^2.$$

Делая замену $z = \dfrac{F(x)-\lambda}{h_d}$ и снова применяя неравенство Koksma-Hlawka, получим

$$\mathbf{D}(\Lambda_1) = \frac{1}{nh_d^2 h_r^2} \int\limits_0^1 F(u)(1-F(u))\,du \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_0^1 K_d(z)K_r\left(\frac{F^{-1}(\lambda+zh_d)-u}{h_r}\right) F^{-1}(\lambda+zh_d)(F^{-1})'(\lambda+zh_d)\,dx + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}^2 + O\left(\frac{1}{n^2h_r^2}\right).$$

Используя то, что при $n\to\infty$

$$K_r\left(\frac{F^{-1}(\lambda+h_dz)-y}{h_r}\right) = K_r\left(\frac{F^{-1}(\lambda)-y}{h_r}\right) + o(1),$$

и делая замену $\dfrac{F^{-1}(\lambda)-u}{h_r}$, получим окончательно

$$\mathbf{D}(\Lambda_1) = \frac{1}{nh_r}\lambda(1-\lambda)(F^{-1}(\lambda)(F^{-1})'(\lambda))^2\|\,K_r\,\|^2 + o\left(\frac{1}{nh_r}\right) = \frac{\lambda(1-\lambda)x_\lambda^2\|\,K_r\,\|^2}{nh_r f^2(x_\lambda)} + o\left(\frac{1}{nh_r}\right).$$

Учитывая множитель 2 в определении статистики $\hat{S}_{2,\lambda}$, получим результат леммы 4.5.

Лемма 4.6. *При* $n\to\infty$

$$\Lambda_2+\Lambda_3 = o\left(\frac{1}{\sqrt{nh_r}}\right).$$

Доказательство. Замечая, что $0 \leqslant i/n \leqslant 1$, и повторяя доказательство леммы 4.3, получим результат леммы 4.6.

Лемма 4.7. *При* $n\to\infty$

$$\sqrt{nh_r}(\hat{S}_{2,\lambda} - x_\lambda^2 - a_1(h_r,h_d)h_d^2) \xrightarrow{d} N(0, g_1^2),$$

где

$$g_1^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)x_\lambda^2}{f^2(x_\lambda)}\|\,K_r\,\|^2,$$

$$a_{1,d} = \nu_d^2 \left(-\frac{x_\lambda f'(x_\lambda)}{f^3(x_\lambda)} + \frac{1}{f^2(x_\lambda)} \right).$$

Доказательство этой леммы в основных чертах повторяет доказательство леммы 4.4, поэтому опущено.

Представим оценку $\hat{x}_{2,\lambda}$ в виде отношения $\dfrac{\beta}{\alpha}$, где

$$\beta = x_{2,\lambda} + \Lambda_1, \quad \alpha = \frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\lambda} K_d \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - u}{h_d} \right) du.$$

Положим

$$\mu_1 = x_\lambda^2 \quad \mu_2 = x_\lambda.$$

Из представления

$$\hat{x}_{2,\lambda} - \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\beta - \mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\mu_2^2}(\alpha - \mu_2) + \\ + O_p((\beta - \mu_1)(\alpha - \mu_2)) + O_p((\alpha - \mu_2))$$

(см. [10], p.327) и учитывая, что при $n \to \infty$

$$\tilde{g}^2 = \frac{g_1^2}{\mu_2^2} + \frac{g_2^2 \mu_1^2}{\mu_2^4} - 2\mathbf{cov} \left(\frac{\beta}{\mu_2}, \frac{\alpha \mu_1}{\mu_2^2} \right) \sim g^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)}{f^2(x_\lambda)} \| K_r \|^2,$$

получаем следующую теорему.

Теорема 4.2. *При* $n \to \infty$

$$\sqrt{nh_r}(\hat{x}_{2,\lambda} - x_\lambda - b(h_r, h_d)) \xrightarrow{d} N(0, g^2),$$

где

$$b_1(h_r, h_d) = a_{1,d} h_d^2 + a_{1,r} h_r^2,$$

$$a_{1,r} = -\frac{\nu_r^2 x_\lambda f'(x_\lambda)}{f^4(x_\lambda)}, \quad a_{1,d} = \nu_d^2 \left(-\frac{x_\lambda f'(x_\lambda)}{f^3(x_\lambda)} + \frac{1}{f^2(x_\lambda)} \right).$$

В лемме 4.7 и в теореме 4.2 присутствуют величины $a_{1,r}$ и $a_{1,d}$, в которые входят производные от обратной функции $F^{-1}(\lambda)$, а именно, $(F^{-1})'(\lambda)$, $(F^{-1})''(\lambda)$, и которые неизвестны. Для их оценки мы предлагаем следующие статистики:

$$\hat{c}_1 = \frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^{n} K_d \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - \lambda}{h_d} \right) \quad \text{и} \quad \hat{c}_2 = -\frac{1}{nh_d^2} \sum_{i=1}^{n} K_d' \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - \lambda}{h_d} \right).$$

Рассуждая аналогично предыдущему можно показать, что при $n \to \infty$ они сходятся по вероятности к $(F^{-1})'(\lambda)$ и $(F^{-1})''(\lambda)$ соответственно. Тогда состоятельной оценкой для $\hat{b}_1(h_r, h_d)$ будет $\nu_r^2 h_r^2 \hat{c}_1 \hat{c}_2 + \nu_d^2 h_d^2 (\hat{c}_2 + \hat{c}_1^2)$.

Из теоремы 4.2 следует, что дисперсия предельного распределения оценки $\hat{x}_{2,\lambda}$ такая же, как и у оценки $\hat{x}_{1,\lambda}$, поэтому рассмотрим оценку

$$\hat{x}_{3,\lambda} = \sqrt{\hat{S}_{2,\lambda} - \hat{b}_1(h_r, h_d)}.$$

Воспользовавшись теоремой 3.1, нетрудно получить следующий результат.

Теорема 4.3. *При* $n \to \infty$

$$\sqrt{nh_r}(\hat{x}_{3,\lambda} - x_\lambda) \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0, g_3^2),$$

где

$$g_3^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)x_\lambda}{f^2(x_\lambda)} \| K_r \|^2.$$

Так как $0 < x_\lambda < 1$, то из теоремы 4.3 заключаем, что предельная дисперсия оценки $\hat{x}_{3,\lambda}$ меньше, чем предельная дисперсия оценок $\hat{x}_{1,\lambda}$ и $\hat{x}_{2,\lambda}$.

Построенная оценка $\hat{x}_{3,\lambda}$ использовалась для нахождения эффективных доз для примеров, взятых из книги [1], а также для примера Finney (см. [11], с.98).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Криштопенко С.В., Тихов М.С., Попова Е.Б. *Доза-эффект* М.: Медицина. 2008. 288 с.
2. Кочеганов В.М., Тихов М.С. *Оценивание эффективных доз в зависимости доза-эффект* // Обозрение Прикладной и Промышленной Математики. Т. 18, В. 1. 2011. С. 85–86.
3. H. Dette, N. Neumeyer, K.F. Pilz *A note on nonparametric estimation of the effective dose in quantal bioassay* // Journal of the American Statistical Association. V. 100. 2005. P. 503–510.
4. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной* Лань. М. 2008. 560 с.
5. H. Niederreiter *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods* Society for industrial and applied mathematics. Philadelphia. Pensilvania. 1992. 241 p.
6. E.L. Lehmann *Theory of Point Estimation.* John Wiley & Sons. NY. 1983. 506 p.
7. Леман Э. *Теория точечного оценивания.* М.: Наука. 1991. 448 с.
8. Тихов М.С., Криштопенко Д.С., Ярощук М.В. *Оценивание распределений в зависимости доза-эффект при фиксированном плане эксперимента* // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. науч. тр. Перм. ун-т. Пермь. 2006. С. 66–77.
9. Крамер Г. *Математические методы статистики.* М.: Мир. 1976. 648 с.
10. M.S. Tikhov *Statistical Estimation on the Basis of Interval-Censored Data* // Journal Math. Sciences. V. 119, No. 3. 1974. P. 321–335.
11. D.J. Finney *Probit Analysis.* Cambridge University Press, NY. 1971. 333 p.

Михаил Семенович Тихов,
Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,
пр. Гагарина, 23,
603950, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: `tikhovm@mail.ru`