

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЯЗЫКОВ АРНОЛЬДА ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М.Г. ЮМАГУЛОВ

Аннотация. Работа посвящена изложению метода локализации языков Арнольда конечномерных динамических систем с дискретным временем – множеств, соответствующих рационально синхронизированным соотношениям параметров системы. Такие множества отвечают областям значений параметров, при которых система имеет циклы определенных периодов. Метод позволяет получить приближенное представление языков Арнольда, изучить их свойства в основных и неосновных резонансах.

Ключевые слова: бифуркация, динамические системы, языки Арнольда, операторные уравнения, функционализация параметра.

Mathematics Subject Classification: 37G10, 37G15.

Pacs: 05.45.-a Nonlinear dynamics and chaos

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из интересных и важных с теоретической и практической точек зрения понятий теории динамических систем является понятие языков Арнольда [1]–[3] – множеств, соответствующих рационально синхронизированным соотношениям параметров системы. Такие множества отвечают областям значений параметров, при которых система имеет циклы определенных периодов. Различные вопросы, связанные со свойствами и приложениями языков Арнольда в нелинейной динамике, обсуждались в ряде работ (см., например, [1]–[8] и имеющуюся там библиографию).

Систему языков Арнольда можно наблюдать во многих задачах нелинейной динамики. Например, в задаче о потере устойчивости цикла периода T автономной системы при прохождении мультипликатора цикла через единичную окружность в качестве параметров системы можно рассматривать модуль и аргумент мультипликатора. В этом случае на плоскости параметров образуются узкие клювообразные множества (языки), выходящие своим острием на точки $e^{2\pi\theta i}$ единичной окружности, где $\theta = \frac{p}{q}$ – рационально; такие множества соответствуют областям существования qT -периодических решений системы, возникающих в окрестности исходного цикла периода T .

Другим примером, где естественным образом возникают языки Арнольда, является задача о синхронизации автоколебательной системы, имеющей собственную частоту ν_0 , внешним сигналом частоты ν . Здесь в качестве параметров можно использовать отношение частот $\varkappa = \frac{\nu}{\nu_0}$ и амплитуду a внешнего сигнала. На плоскости параметров (\varkappa, a)

M.G. YUMAGULOV, LOCALIZATION OF ARNOLD TONGUES OF DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS.

© ЮМАГУЛОВ М.Г. 2013.

Работа выполнена при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований: 10-01-93112-НЦНИЛ_а и 11-01-97009 -“Поволжье” и программы ГНТП РБ “Инновационные технологии Республики Башкортостан: физико-математические основы и технические решения” (2011-2012 гг.).

Поступила 26 февраля 2012 г.

образуется характерная структура областей режимов, которая представляет собой области синхронизации с разным соотношением частот ν и ν_0 . Эти области имеют вид языков, выходящих из каждого рационального числа на оси \varkappa ; соответствующим значениям параметров \varkappa и a , отвечают области периодических (как правило, длиннопериодических) режимов системы. Между языками существуют области квазипериодических режимов с иррациональным соотношением частот.

В настоящей статье приводятся основные положения нового операторного метода локализации языков Арнольда конечномерных динамических систем с дискретным временем. Метод позволяет получить приближенное представление этих множеств, изучить их свойства в основных и неосновных резонансах. При обосновании метода получены новые асимптотические формулы для решений задач о бифуркациях циклов динамических систем, позволяющие провести детальный анализ бифуркаций.

1.1. Бифуркация q -циклов. Рассматривается конечномерная динамическая система с дискретным временем

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x_k \in R^N, \quad (1)$$

зависящая от параметра $\mu \in R^m$. Предполагается, что функция $F(x, \mu)$ определена и непрерывно дифференцируема по совокупности переменных на множестве

$$\Omega = \{(x, \mu) : \|x\| \leq \delta_1, \|\mu - \mu_0\| \leq \delta_2\},$$

где δ_1 и δ_2 – некоторые положительные числа; здесь и ниже запись $\|\cdot\|$ используется для обозначения евклидовых норм в пространствах R^N и R^m .

Как обычно, m -циклом или m -периодическим решением системы (1) будем называть такой набор различных векторов $x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_{m-1}^*$, что:

$$x_1^* = F(x_0^*, \mu), \quad x_2^* = F(x_1^*, \mu), \quad \dots, \quad x_{m-1}^* = F(x_{m-2}^*, \mu), \quad x_0^* = F(x_{m-1}^*, \mu);$$

При $m = 1$ приведенное определение переходит в понятие точки равновесия (неподвижной точки) системы (1): вектор x_0^* является точкой равновесия, если $x_0^* = F(x_0^*, \mu)$.

Пусть система (1) при всех значениях μ имеет точку равновесия $x^* = 0$, т.е. $F(0, \mu) \equiv 0$. Обозначим через $A(\mu) = F'_x(0, \mu)$ матрицу Якоби функции $F(x, \mu)$, вычисленную в точке $x = 0$. Основным является предположение:

- S1) матрица $A(\mu_0)$ имеет пару простых собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, где $0 < \theta_0 \leq \frac{1}{2}$ и θ_0 рационально: $\theta_0 = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь.

При этом предполагается, что остальные собственные значения матрицы $A(\mu_0)$ не равны 1 по модулю.

В указанных предположениях точка равновесия $x^* = 0$ системы (1) при $\mu = \mu_0$ является (см., например, [4]) негиперболической, а значение $\mu = \mu_0$ является бифуркационным. Коразмерность соответствующей бифуркации равна двум. Поэтому здесь естественным будет предположение, что параметр μ является двумерным, т.е. $\mu = (\alpha, \beta)$, где α и β – скалярные параметры; положим также $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$.

Пусть P – это плоскость параметров $\mu = (\alpha, \beta)$ системы (1). Сценарии бифуркаций в окрестности точки равновесия $x^* = 0$ системы (1) определяются характером перехода параметра $\mu \in P$ через точку μ_0 . Этот переход может осуществляться по бесконечному числу различных направлений: по прямым или кривым, проходящим через точку μ_0 . Здесь могут возникать или исчезать периодические решения различных периодов.

Одним из основных сценариев (но не единственным) здесь является бифуркация q -циклов системы (1), когда при значениях параметров μ , близких к μ_0 , у системы (1) возникают циклы периода q , при этом амплитуды циклов стремятся к нулю при стремлении точки μ к μ_0 . Другими словами, значение μ_0 является *точкой бифуркации q -циклов*

системы (1), если существует последовательность $\mu_k \rightarrow \mu_0$ такая, что при $\mu = \mu_k$ система (1) имеет q -цикл $x_0^k, x_1^k, x_2^k, \dots, x_{q-1}^k$, причем $\max_{0 \leq j \leq q-1} \|x_j^k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

1.2. Языки Арнольда. С целью описания возможных сценариев бифуркаций системы (1) в окрестности точки равновесия $x^* = 0$ обозначим через \mathcal{K} множество тех точек плоскости P параметров (α, β) , при которых матрица $A(\alpha, \beta)$ имеет собственное значение λ , $|\lambda| = 1$. Множество \mathcal{K} обычно представляет собой некоторую гладкую кривую на плоскости P .

На плоскости P образуется характерная структура областей режимов нелинейной системы (1), которая представляет собой области синхронизации с разным соотношением параметров α и β . Эти области имеют клювообразную форму или языка $\Psi(\alpha^*, \beta^*)$, вершины которых лежат в тех точках (α^*, β^*) кривой \mathcal{K} , в которых матрица $A(\alpha^*, \beta^*)$ имеет собственные значения $e^{\pm 2\pi\theta^*i}$ с рациональным θ^* : $\theta^* = \frac{l}{m}$ (см. рис. 1).

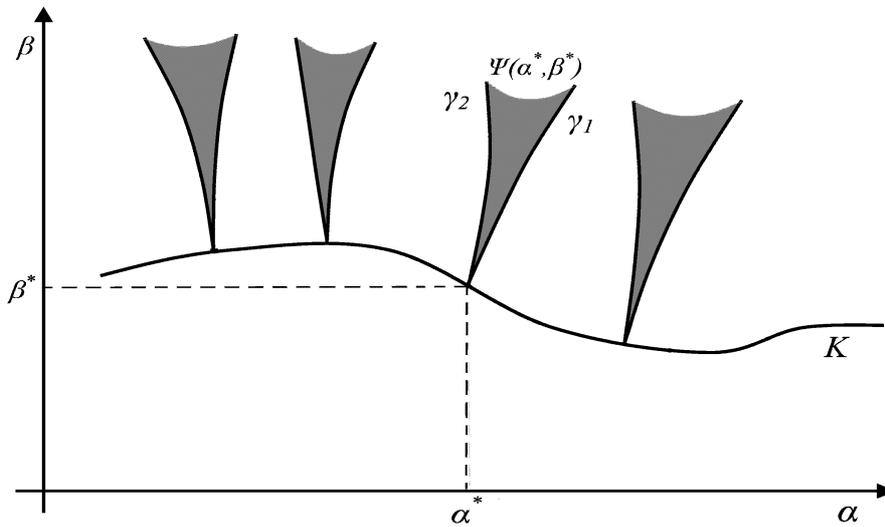


Рис. 1. Языки Арнольда на плоскости параметров

Такие языки соответствуют областям значений параметров (α, β) , при которых система (1) имеет периодические режимы периода m , амплитуды которых стремятся к нулю при стремлении точки (α, β) к (α^*, β^*) . Другими словами, множество $\Psi(\alpha^*, \beta^*)$ содержит те последовательности $(\alpha_k, \beta_k) \rightarrow (\alpha^*, \beta^*)$, при которых реализуется сценарий бифуркации m -циклов системы (1).

Например, в силу условия S1) верно включение $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{K}$, так как матрица $A(\alpha_0, \beta_0)$ имеет собственные значения $e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, где $\theta_0 = \frac{p}{q}$. Соответствующий язык $\Psi(\alpha_0, \beta_0)$ представляет множество тех значений параметров (α, β) , при которых система (1) имеет q -циклы, амплитуды которых стремятся к нулю при стремлении точки (α, β) к (α_0, β_0) .

Таким образом, указанные языки $\Psi(\alpha^*, \beta^*)$ соответствуют рационально синхронизированным (в естественном смысле) соотношениям параметров α и β . Между указанными языками существуют области квазипериодических режимов с иррациональным соотношением параметров. Основные черты этой картины были выявлены российским математиком В.И. Арнольдом [1], так что система языков синхронизации, соответствующих рационально синхронизированным соотношениям параметров, получила название языков Арнольда [2], [3].

Указанная структура областей режимов имеет локальный характер. При удалении параметров α и β от точки (α^*, β^*) области периодических режимов вытесняют квазипериодические, и языки начинают перекрываться. Становится возможным хаос. Систему

языков Арнольда можно наблюдать в возбуждаемых периодическим сигналом автоколебательных системах, в задачах о взаимной синхронизации двух автоколебательных систем и др. (см., например, [5], [6]).

В литературе понятие языков Арнольда может вводиться и в других интерпретациях. Часто (см., например, [3], [7]) это понятие вводится в терминах спектральных характеристик матрицы $A(\alpha, \beta)$. Эта интерпретация также используется в настоящей работе; приведем ее.

Пусть \mathbb{C} – это комплексная плоскость, а $S = \{z : |z| = 1\}$ – единичная окружность на этой плоскости. Пусть значение $\mu = (\alpha^*, \beta^*)$ системы (1) является точкой бифуркации m -циклов. Для реализации у системы (1) такого сценария требуется, чтобы матрица $A(\mu)$ имела собственные значения из некоторого множества $U(m) \in \mathbb{C}$, представляющего собрание узких клювообразных множеств $\Psi(l, m)$, где $0 < \frac{l}{m} \leq \frac{1}{2}$ и число $\frac{l}{m}$ – несократимая дробь.

Множества $\Psi(l, m)$ и называют языками Арнольда на комплексной плоскости \mathbb{C} . Каждое множество $\Psi(l, m)$ своим клювом упирается в точку $e^{2\pi\theta^*i}$ окружности S , где $\theta^* = \frac{l}{m}$. Типичный язык Арнольда $\Psi(l, m)$ заключен между двумя гладкими кривыми γ_1 и γ_2 , как это изображено на рис. 2.

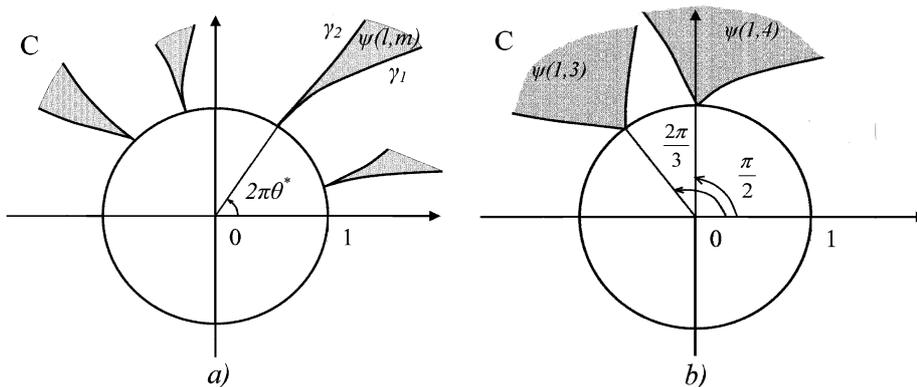


Рис. 2. Языки Арнольда на комплексной плоскости

При $m \geq 5$ эти кривые соприкасаются в точке $e^{2\pi\theta^*i}$; в этом случае язык Арнольда $\Psi(l, m)$ в малой окрестности точки $e^{2\pi\theta^*i}$ фактически вырождается в кривую (рис. 2 а)). При $m \leq 4$ язык Арнольда $\Psi(l, m)$ представляет собой существенно более широкое множество (рис. 2 б)).

Такое устройство языков Арнольда обуславливается структурой так называемых резонансных членов в тейлоровском разложении отображения $F(x, \mu)$ в нуле. За существование циклов малых периодов $m \leq 4$ отвечают главные резонансные члены. Соответственно, циклы малых периодов у системы (1) наблюдаются достаточно часто, а длиннопериодические циклы (при $m \geq 5$) являются нетипичными и наблюдаются редко.

На единичной окружности S комплексной плоскости \mathbb{C} имеется счетное множество точек вида $e^{2\pi\theta i}$ с рациональными θ , причем они плотно расположены на окружности. Каждой такой точке соответствует свой язык Арнольда. В частности, это означает, что в однопараметрическом случае (т.е. когда параметр μ является скалярным) при переходе μ через μ_0 в общей ситуации у системы (1) в окрестности точки $x = 0$ возникают и исчезают длиннопериодические циклы. Указанный эффект (субфуркация периодических колебаний) был впервые отмечен В.С. Козякиным [9].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе приводится схема, позволяющая локализовать языки Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (1). С этой целью укажем несколько упрощающих предположений.

Во-первых, для простоты изложения будем предполагать, что система (1) является двумерной, т.е. $N = 2$. Случай, когда $N \geq 3$, может быть сведен к двумерному, например, на основе теорем о центральном многообразии (см., например, [4]).

Во-вторых, нам удобно считать, что параметры α и β системы (1) связаны простыми соотношениями с собственными значениями матрицы $A(\mu)$. Воспользуемся тем фактом, что в силу теории возмущений линейных операторов [10] матрица $A(\mu)$ при каждом близком к μ_0 значении двумерного параметра μ имеет единственное близкое к $e^{2\pi\theta_0 i}$ собственное значение $\lambda = \rho(\mu)e^{2\pi\theta(\mu)i}$, при этом функции $\rho(\mu)$ и $\theta(\mu)$ являются гладкими и выполняются равенства $\rho(\mu_0) = 1$ и $\theta(\mu_0) = \theta_0$. Определим функции $\alpha = \alpha(\mu) \equiv \rho(\mu) - 1$ и $\beta = \beta(\mu) \equiv \theta(\mu) - \theta_0$.

Без ограничения общности будем предполагать, что параметрами системы (1) являются именно эти α и β . А именно, будем считать, что матрица $A(\alpha, \beta)$ имеет вид

$$A(\alpha, \beta) = (1 + \alpha)Q(\beta), \quad (2)$$

где

$$Q(\beta) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi(\theta_0 + \beta) & -\sin 2\pi(\theta_0 + \beta) \\ \sin 2\pi(\theta_0 + \beta) & \cos 2\pi(\theta_0 + \beta) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Матрица $A(\alpha, \beta)$ имеет пару простых собственных значений

$$\lambda(\alpha, \beta) = (1 + \alpha)e^{\pm 2\pi(\theta_0 + \beta)i}. \quad (4)$$

При этом матрица $A(\alpha, \beta)$ удовлетворяет условию S1) при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

Таким образом, рассматривается двумерная динамическая система с дискретным временем

$$x_{n+1} = A(\alpha, \beta)x_n + a(x_n, \alpha, \beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x_n \in R^2, \quad (5)$$

в которой $A(\alpha, \beta)$ – это матрица (2), нелинейность $a(x, \alpha, \beta)$ удовлетворяет соотношению $\|a(x, \alpha, \beta)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \rightarrow 0$ равномерно по α и β . Будем считать, что нелинейность $a(x, \alpha, \beta)$ представима в виде:

$$a(x, \alpha, \beta) = a_2(x, \alpha, \beta) + a_3(x, \alpha, \beta) + \tilde{a}_4(x, \alpha, \beta), \quad (6)$$

где $a_2(x, \alpha, \beta)$ и $a_3(x, \alpha, \beta)$ содержат, соответственно, квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{a}_4(x, \alpha, \beta)$ является гладкой по x , при этом $\tilde{a}_4(x, \alpha, \beta) = O(\|x\|^4)$, $x \rightarrow 0$, равномерно по α и β .

Основной задачей, рассматриваемой в данной работе, является локализация языков Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (5).

3. ПЕРЕХОД К ОПЕРАТОРНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Основой последующих построений является следующая

Теорема 1. *Значение $\mu_0 = (0, 0)$ является точкой бифуркации q -циклов системы (5).*

Доказательства этого и других основных утверждений работы приводятся в п. 7.

Для более детального изучения бифуркации q -циклов системы (5) нам понадобятся некоторые вспомогательные построения.

Периодические решения периода q системы (1) определяются решениями операторного уравнения

$$x = F^{(q)}(x, \mu), \quad (7)$$

где

$$F^{(q)}(x, \mu) = \underbrace{F(F(\dots(F(x, \mu), \mu)\dots))}_q.$$

А именно, верно следующее очевидное утверждение.

Лемма 1. Вектор x^* является решением уравнения (7) тогда и только тогда, когда x^* либо является неподвижной точкой системы (1), либо определяет цикл $x_0 = x^*$, $x_1 = F(x_0, \mu)$, $x_2 = F(x_1, \mu)$, ... , $x_{r-1} = F(x_{r-2}, \mu)$ периода r этой системы, где r – делитель числа q .

Например, если $q = 6$, то решения уравнения (7) могут быть либо неподвижными точками системы (1), либо определяют ее циклы периода 2, 3 или 6.

В частности, уравнение (7) для системы (5) принимает вид

$$x = B(\mu)x + b(x, \mu), \quad (8)$$

где $\mu = (\alpha, \beta)$, матрица $B(\mu)$ определяется равенством

$$B(\mu) = A^q(\mu), \quad (9)$$

а нелинейность $b(x, \mu)$ имеет аналогичное (6) представление вида

$$b(x, \mu) = b_2(x, \mu) + b_3(x, \mu) + \tilde{b}_4(x, \mu), \quad (10)$$

При этом верна

Лемма 2. Квадратичная нелинейность $b_2(x, \mu)$ в (10) представима в виде

$$b_2(x, \mu) = A^{q-1}a_2(x, \mu) + A^{q-2}a_2(Ax, \mu) + \dots + Aa_2(A^{q-2}x, \mu) + a_2(A^{q-1}x, \mu), \quad (11)$$

а кубическая нелинейность $b_3(x, \mu)$ – в виде

$$b_3(x, \mu) = A^{q-1}a_3(x, \mu) + A^{q-2}a_3(Ax, \mu) + \dots + Aa_3(A^{q-2}x, \mu) + a_3(A^{q-1}x, \mu) + g_3(x, \mu), \quad (12)$$

где

$$g_3(x, \mu) = A^{q-2}a'_{2x}(Ax, \mu)a_2(x, \mu) + A^{q-3}a'_{2x}(A^2x, \mu)[Aa_2(x, \mu) + a_2(Ax, \mu)] + \dots + a'_{2x}(A^{q-1}x, \mu)[A^{q-2}a_2(x, \mu) + A^{q-3}a_2(Ax, \mu) + \dots + a_2(A^{q-2}x, \mu)].$$

Здесь используются обозначения: $A = A(\mu)$, $a'_{2x}(x, \mu)$ – матрица Якоби вектор-функции $a_2(x, \mu)$.

В справедливости формул (9)–(12) несложно убедиться непосредственным подсчетом.

4. ПРАВИЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ

Одним из важных свойств бифуркации q -циклов системы (5) является свойство ее направленности; приведем соответствующее определение. Пусть $e \in R^2$ – некоторый ненулевой вектор. Значение $\mu_0 = (0, 0)$ параметра $\mu = (\alpha, \beta)$ назовем *правильной точкой бифуркации q -циклов системы (5) по направлению вектора e* , если существуют $\varepsilon_0 > 0$ и определенные при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ непрерывные функции $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$ и $x = x(\varepsilon)$ такие, что:

- 1) $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$, $x(0) = 0$;
- 2) $\|x(\varepsilon) - \varepsilon e\| = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- 3) для каждого $\varepsilon > 0$ вектор $x(\varepsilon)$ является точкой q -цикла системы (5) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$.

Векторы $x(\varepsilon)$ и функции $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$ назовем *бифурцирующими решениями* системы (5).

Правильные точки бифуркации соответствуют тому, что система (5) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$ имеет q -цикл, стартовый из точки $x(\varepsilon)$, при этом кривая $x = x(\varepsilon)$ в пространстве R^2 при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотически стремится к прямой $x = \varepsilon e$.

Теорема 2. *Значение $\mu_0 = (0, 0)$ параметра $\mu = (\alpha, \beta)$ является правильной точкой бифуркации q -циклов системы (5) по направлению любого ненулевого вектора e .*

Приведем формулы, позволяющие более детально изучить свойство правильности бифуркации q -циклов системы (5). С этой целью определим векторы

$$e = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -c_2 \\ c_1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

компоненты c_1 и c_2 которых таковы, что $c_1^2 + c_2^2 = 1$. Другими словами, e – произвольный единичный вектор: $\|e\| = 1$, а единичный вектор g ортогонален вектору e . Полагая в (11) и (12) $x = e$ и $\mu = \mu_0 = (0, 0)$, определим векторы

$$b_2 = b_2(e, \mu_0), \quad b_3 = b_3(e, \mu_0); \quad (14)$$

в частности, из (11) и (2) получим

$$b_2 = Q^{q-1}a_2(e, \mu_0) + Q^{q-2}a_2(Qe, \mu_0) + \dots + Qa_2(Q^{q-2}e, \mu_0) + a_2(Q^{q-1}e, \mu_0), \quad (15)$$

где $Q = Q(0)$, а $Q(\beta)$ – матрица (3). Из (2) и (12) может быть получена аналогичная формула для вектора b_3 .

Определим числа

$$\alpha_1 = -\frac{1}{q}(b_2, e), \quad \beta_1 = -\frac{1}{2\pi q}(b_2, g) \quad (16)$$

и векторы

$$e_1 = \alpha_1 e + \beta_1 g, \quad (17)$$

$$\chi = q \left[\frac{1}{2}\alpha_1^2(1+q) - 2\pi\beta_1^2(1+\pi q) \right] e + \quad (18)$$

$$+ \alpha_1\beta_1 q(1+2\pi+2\pi q)g + b'_{2x} \cdot (\alpha_1 e + \beta_1 g) + \alpha_1 b'_{2\alpha} + \beta_1 b'_{2\beta};$$

здесь $b'_{2x} = b'_{2x}(e, \mu_0)$ – матрица Якоби нелинейности (11), вычисленная в точке $x = e$ при $\mu = \mu_0 = (0, 0)$, $b'_{2\alpha}$ и $b'_{2\beta}$ – производные нелинейности (11) по параметрам α и β соответственно, вычисленные в точке $x = e$ при $\mu = \mu_0 = (0, 0)$.

Наконец, положим

$$\alpha_2 = -\frac{1}{q}(\chi + b_3, e), \quad \beta_2 = -\frac{1}{2\pi q}(\chi + b_3, g), \quad (19)$$

$$e_2 = \alpha_2 e + \beta_2 g. \quad (20)$$

4.1. Бифуркации в случае нечетного q . Свойства бифуркации q -циклов системы (5) во многом зависят от того, является ли q четным или нечетным. Рассмотрим сначала случай нечетного q .

Теорема 3. *Пусть число q является нечетным. Пусть e и g – единичные векторы (13). Тогда существующие в соответствии с теоремой 2 бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ системы (5) представимы в виде:*

$$\alpha(\varepsilon) = \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \alpha_3(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) = \varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 + \alpha_3(\varepsilon), \quad (21)$$

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + e_3(\varepsilon); \quad (22)$$

в этих формулах $\alpha_3(\varepsilon)$, $\beta_3(\varepsilon)$ и $e_3(\varepsilon)$ – это некоторые непрерывные функции, удовлетворяющие соотношениям:

$$\alpha_3(\varepsilon) = o(\varepsilon^2), \quad \beta_3(\varepsilon) = o(\varepsilon^2), \quad \|e_3(\varepsilon)\| = o(\varepsilon^3) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (23)$$

Функции (21) в плоскости P параметров (α, β) системы (5) задают непрерывную кривую $\omega(\varepsilon)$, начинающуюся (при $\varepsilon = 0$) в начале координат (рис. 3 а)).

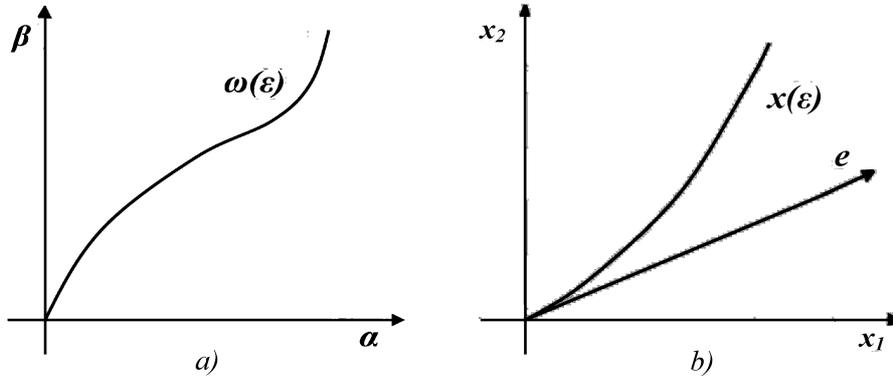


Рис. 3. Кривые бифурцирующих решений

Эти функции зависят от чисел p и q , а также вектора e ; поэтому кривая $\omega(\varepsilon)$ различна для разных p , q и e . Аналогично, функция (22) в фазовом пространстве R^2 системы (5) задает непрерывную кривую $x(\varepsilon)$, которая при $\varepsilon = 0$ соприкасается в начале координат с вектором e (рис. 3 б)).

Из теорем 1 и 3 следует, что в случае нечетного q для любого единичного вектора $e \in R^2$ семейство возникающих q -циклов системы (5) содержит непрерывные ветви циклов, которые стартуют из определенных равенством (22) точек кривой $x(\varepsilon)$ при значениях параметров, принадлежащих кривой $\omega(\varepsilon)$. Другими словами, значение $\mu = \mu_0 = (0, 0)$ является правильной точкой бифуркации q -циклов системы (5) по направлению вектора e . Формулы (21) и (22) будем называть *асимптотическими формулами* для возникающих бифурцирующих решений системы (5).

4.2. Бифуркации в случае четного q . Рассмотрим теперь случай четного q .

Лемма 3. Пусть q – четно. Тогда определенный равенством (15) вектор b_2 является нулевым: $b_2 = 0$.

Следствие 1. Пусть q – четно. Тогда числа (16) и векторы (17) и (18) являются нулевыми:

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad e_1 = 0, \quad \chi = 0, \quad (24)$$

а числа (19) и вектор (20) равны

$$\alpha_2 = -\frac{1}{q}(b_3, e), \quad \beta_2 = -\frac{1}{2\pi q}(b_3, g), \quad (25)$$

$$e_2 = \alpha_2 e + \beta_2 g. \quad (26)$$

Теорема 4. Пусть число q является четным. Пусть e и g – единичные векторы (13). Тогда существующие в соответствии с теоремой 2 бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ системы (5) представимы в виде:

$$\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^2 \alpha_2 + \alpha_3(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) = \varepsilon^2 \beta_2 + \beta_3(\varepsilon), \quad (27)$$

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^3 e_2 + e_3(\varepsilon); \quad (28)$$

в этих формулах числа α_2 и β_2 и вектор e_2 определяются равенствами (25) и (26), а $\alpha_3(\varepsilon)$, $\beta_3(\varepsilon)$ и $e_3(\varepsilon)$ – это некоторые непрерывные функции, удовлетворяющие соотношениям (23).

Таким образом, основное различие четного и нечетного q в сценарии бифуркации q -циклов системы (5) по направлению вектора e состоит в виде асимптотических формул для бифурцирующих решений. В частности, в случае четного q главные асимптотики формул (27) и (28) не зависят от квадратичных слагаемых. Справедливы также следствия.

Следствие 2. Пусть в условиях теоремы 3 числа (16) являются ненулевыми. Пусть для определенности $\alpha_1 > 0$ и $\beta_1 > 0$. Тогда значение $\mu = \mu_0 = (0, 0)$ является правильной точкой бифуркации q -циклов системы (5) по направлению векторов e и $-e$. Возникающие при этом две непрерывные ветви q -циклов таковы, что одна из них существует при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, другая – при $\alpha < 0$ и $\beta < 0$.

Следствие 3. Пусть в условиях теоремы 4 числа (25) являются ненулевыми. Пусть для определенности $\alpha_2 > 0$ и $\beta_2 > 0$. Тогда значение $\mu = \mu_0 = (0, 0)$ является правильной точкой бифуркации q -циклов системы (5) по направлению векторов e и $-e$. Возникающие при этом две непрерывные ветви q -циклов таковы, что обе они существуют при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Другими словами, в естественном смысле в случае нечетного q бифуркация q -циклов системы (5) является транскритической, а в случае четного q является бифуркацией типа “вилки” (см., например, [4]).

Теоремы 3 и 4 указывают асимптотические формулы, позволяющие получить приближенное представление возникающих в окрестности нулевого состояния равновесия q -циклов системы (5), а также соответствующих значений параметров α и β . Эти формулы используются ниже для локализации языков Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (5).

5. Локализация языков Арнольда

5.1. Вспомогательные построения. Пусть e и g – единичные векторы (13). Определим на комплексной плоскости \mathbb{C} кривую $\Upsilon(p, q, e)$, описываемую уравнением

$$z = \rho(\varepsilon)e^{\varphi(\varepsilon)i}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \tag{29}$$

где

$$\rho(\varepsilon) = 1 + \alpha(\varepsilon), \quad \varphi(\varepsilon) = 2\pi(\theta_0 + \beta(\varepsilon));$$

здесь $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ – это функции (21) или (27) (в зависимости от свойства четности числа q). При $\varepsilon = 0$ точка кривой $\Upsilon(p, q, e)$ совпадает с точкой $e^{2\pi\theta_0 i}$ (рис. 4).

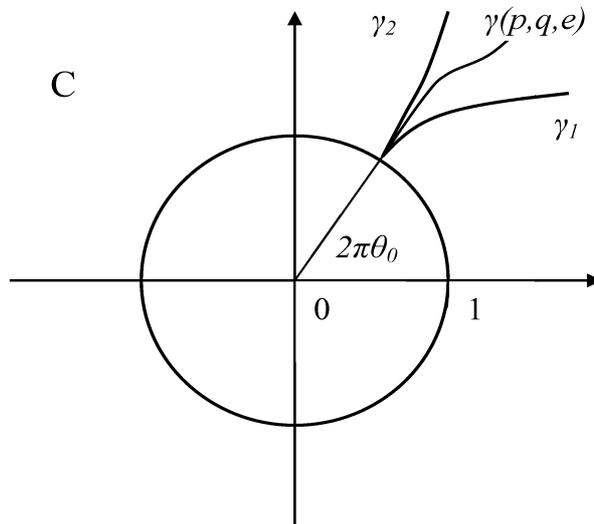


Рис. 4. Кривая синхронизации

Собственные значения определенной равенством (2) матрицы $A(\alpha, \beta)$ – это числа (4). С другой стороны, в силу теорем 3 и 4 у системы (5) реализуется сценарий бифуркации q -циклов по направлению вектора e , если собственные значения матрицы $A(\alpha, \beta)$ – это точки кривой $\Upsilon(p, q, e)$ (при малых $\varepsilon \geq 0$). Поэтому кривую $\Upsilon(p, q, e)$ можно рассматривать как одну из непрерывных ветвей собственных значений матрицы $A(\alpha, \beta)$, вдоль которой реализуется сценарий бифуркации q -циклов системы (5). Эту кривую будем называть *кривой синхронизации*, соответствующей бифуркации q -циклов по направлению вектора e . Кривая синхронизации при малых $\varepsilon \geq 0$ располагается в языке Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (5).

Кривая $\Upsilon(p, q, e)$ при фиксированных p и q зависит от вектора e : для разных e получим и различные кривые $\Upsilon(p, q, e)$, при этом кривая $\Upsilon(p, q, e)$ в естественном смысле (например, в метрике Хаусдорфа) непрерывно зависит от вектора e . Это позволяет определять язык Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (5) как совокупность (по различным векторам $e \in R^2$) всех кривых синхронизации.

А именно, язык Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (5) ниже будет определяться по следующей схеме. Определим континуальное семейство векторов ($0 \leq t \leq 2\pi$):

$$e(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad g(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Для любого t векторы $e(t)$ и $g(t)$ являются единичными векторами вида (13). Для каждого $t \in [0, 2\pi]$ определим кривую $\Upsilon(p, q, e(t))$ (точка каждой из этих кривых синхронизации при $\varepsilon = 0$ совпадает с точкой $e^{2\pi\theta_0 i}$).

Языком Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (5) будем называть множество

$$\Psi(p, q) = \bigcup_{t \in [0, 2\pi]} \Upsilon(p, q, e(t)). \quad (31)$$

В следующих пунктах решается основная задача о локализации множеств (31).

5.2. Семейства правильных бифуркаций. Для каждой фиксированной пары векторов $e(t)$ и $g(t)$ имеют место аналогии теорем 3 и 4. Для получения таких утверждений следует в (11) и (12) положить $x = e(t)$ и $\mu = \mu_0 = (0, 0)$ и определить зависящие от параметра $t \in [0, 2\pi]$ векторы

$$b_2(t) = b_2(e(t), \mu_0), \quad b_3(t) = b_3(e(t), \mu_0); \quad (32)$$

в частности, из (2) и (11) получим

$$b_2(t) = Q^{q-1}a_2(e(t), \mu_0) + Q^{q-2}a_2(Qe(t), \mu_0) + \dots + \\ + Qa_2(Q^{q-2}e(t), \mu_0) + a_2(Q^{q-1}e(t), \mu_0), \quad (33)$$

где $Q = Q(0)$. Аналогично, из (2) и (12) может быть получено представление вектора $b_3(t)$. Далее, определим функции

$$\alpha_1(t) = -\frac{1}{q}(b_2(t), e(t)), \quad \beta_1(t) = -\frac{1}{2\pi q}(b_2(t), g(t)) \quad (34)$$

и

$$\chi(t) = q \left[\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)(1+q) - 2\pi\beta_1^2(t)(1+\pi q) \right] e(t) + \\ + \alpha_1(t)\beta_1(t)q(1+2\pi+2\pi q)g(t) + \\ + b'_{2x}(t) \cdot (\alpha_1(t)e(t) + \beta_1(t)g(t)) + \alpha_1(t)b'_{2\alpha}(t) + \beta_1(t)b'_{2\beta}(t); \quad (35)$$

здесь $b'_{2x}(t) = b'_{2x}(e(t), \mu_0)$ – матрица Якоби нелинейности (11), вычисленная в точке $x = e(t)$ при $\mu_0 = (0, 0)$, $b'_{2\alpha}(t)$ и $b'_{2\beta}(t)$ – производные нелинейности (11) по параметрам α и β соответственно, вычисленные в точке $x = e(t)$ при $\mu = \mu_0 = (0, 0)$.

Наконец, положим

$$\alpha_2(t) = -\frac{1}{q}(\chi(t) + b_3(t), e(t)), \quad \beta_2(t) = -\frac{1}{2\pi q}(\chi(t) + b_3(t), g(t)). \quad (36)$$

При каждом фиксированном t приведенные формулы приводят к аналогам теорем 3 и 4. А именно, верны следующие утверждения.

Теорема 5. Пусть число q является нечетным. Пусть $e = e(t)$ и $g = g(t)$ – векторы (30) при фиксированном $t \in [0, 2\pi]$. Тогда существующие в соответствии с теоремой 2 бифурцирующие решения $x(\varepsilon, t)$, $\alpha(\varepsilon, t)$ и $\beta(\varepsilon, t)$ системы (5) представимы в виде:

$$x(\varepsilon, t) = \varepsilon e(t) + e_1(\varepsilon, t), \quad (37)$$

$$\alpha(\varepsilon, t) = \varepsilon \alpha_1(t) + \varepsilon^2 \alpha_2(t) + \alpha_3(\varepsilon, t), \quad \beta(\varepsilon, t) = \varepsilon \beta_1(t) + \varepsilon^2 \beta_2(t) + \beta_3(\varepsilon, t), \quad (38)$$

где $e_1(\varepsilon, t)$, $\alpha_3(\varepsilon, t)$ и $\beta_3(\varepsilon, t)$ – это некоторые непрерывные по совокупности переменных и 2π -периодические по t функции, удовлетворяющие соотношениям

$$e_1(\varepsilon, t) = o(\varepsilon), \quad \alpha_3(\varepsilon, t) = o(\varepsilon^2), \quad \beta_3(\varepsilon, t) = o(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (39)$$

равномерно по $t \in [0, 2\pi]$.

Теорема 6. Пусть число q является четным. Пусть $e = e(t)$ и $g = g(t)$ – векторы (30) при фиксированном $t \in [0, 2\pi]$. Тогда существующие в соответствии с теоремой 2 бифурцирующие решения $x(\varepsilon, t)$, $\alpha(\varepsilon, t)$ и $\beta(\varepsilon, t)$ системы (5) представимы в виде:

$$x(\varepsilon, t) = \varepsilon e(t) + e_1(\varepsilon, t), \quad (40)$$

$$\alpha(\varepsilon, t) = \varepsilon^2 \alpha_2(t) + \alpha_3(\varepsilon, t), \quad \beta(\varepsilon, t) = \varepsilon^2 \beta_2(t) + \beta_3(\varepsilon, t), \quad (41)$$

где

$$\alpha_2(t) = -\frac{1}{q}(b_3(t), e(t)), \quad \beta_2(t) = -\frac{1}{2\pi q}(b_3(t), g(t)), \quad (42)$$

$e_1(\varepsilon, t)$, $\alpha_3(\varepsilon, t)$ и $\beta_3(\varepsilon, t)$ – это некоторые непрерывные по совокупности переменных и 2π -периодические по t функции, удовлетворяющие соотношениям (39).

Формулы (37) и (40) могут быть уточнены аналогами приведенных в теоремах 3 и 4 асимптотических формул (22) и (28). Однако, ниже нас будут интересовать только асимптотические формулы (38) и (41).

5.3. Основные утверждения: слаборезонансный случай. Приведем теперь основные утверждения работы, позволяющие локализовать определенные равенством (31) языки Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (5). Здесь принципиально различными являются случаи $q \geq 5$ и $q \leq 4$. Первый из этих случаев называют слаборезонансным, а второй – сильнорезонансным. Рассмотрим сначала слаборезонансный случай.

Лемма 4. Пусть $q \geq 5$. Тогда определенные равенством (34) функции для любого t равны нулю: $\alpha_1(t) \equiv 0$, $\beta_1(t) \equiv 0$.

Следствие 4. Пусть $q \geq 5$. Тогда определенная равенством (35) функция $\chi(t)$ является нулевой: $\chi(t) \equiv 0$, а функции (36) совпадают с функциями (42).

Лемма 5. Пусть $q \geq 5$. Тогда функции (36) и (42) являются константами, равными соответствующим числам (25).

Теорема 7. Пусть $q \geq 5$. Тогда язык Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (5) определяется равенством (31), в котором $\Upsilon(p, q, e(t))$ – это (при фиксированном t) кривая, описываемая уравнением

$$z = (1 + \alpha(\varepsilon, t))e^{2\pi(\theta_0 + \beta(\varepsilon, t))i}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (43)$$

Здесь

$$\alpha(\varepsilon, t) = \alpha_2 \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \alpha_3(\varepsilon, t), \quad (44)$$

$$\beta(\varepsilon, t) = \beta_2 \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \beta_3(\varepsilon, t); \quad (45)$$

α_2 и β_2 – числа (25), а функции $\alpha_3(\varepsilon, t)$ и $\beta_3(\varepsilon, t)$ непрерывны и являются 2π -периодическими по t .

Из равенств (44) и (45) следует, что для $q \geq 5$ при малых $\varepsilon \geq 0$ языки Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (5) чрезвычайно узкие. А именно, если числа (25) являются ненулевыми, то множество $\Psi(p, q)$ локально можно отождествить с кривой $\tilde{\Psi}(p, q)$, описываемой уравнением

$$z = (1 + \alpha_2 \xi) e^{2\pi(\theta_0 + \beta_2 \xi)i}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (46)$$

начинающейся (при $\xi = 0$) из точки $e^{\varphi_0 i}$ на единичной окружности $S \in \mathbb{C}$; здесь $\varphi_0 = 2\pi p/q$.

Из равенств (44) и (45) вытекает также следующий факт. Пусть числа (25) являются ненулевыми, причем пусть для определенности $\alpha_2 > 0$ и $\beta_2 > 0$. Тогда язык Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (5) соответствует тем значениям параметров α и β , для которых выполнены неравенства $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

5.4. Основные утверждения: сильнорезонансный случай. Рассмотрим теперь сильнорезонансный случай, т.е. пусть $2 \leq q \leq 4$. В этом случае языки Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (5) в естественном смысле существенно шире, чем при $q \geq 5$. Пусть сначала q – четно.

Теорема 8. Пусть $q = 2$ или $q = 4$. Тогда язык Арнольда $\Psi(1, q)$ системы (5) определяется равенством (31) (где $p = 1$, а $q = 2$ или $q = 4$), в котором $\Upsilon(p, q, e(t))$ – это (при фиксированном t) кривая, описываемая уравнением (43) при

$$\alpha(\varepsilon, t) = \alpha_2(t) \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \alpha_3(\varepsilon, t), \quad (47)$$

$$\beta(\varepsilon, t) = \beta_2(t) \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \beta_3(\varepsilon, t); \quad (48)$$

здесь $\alpha_2(t)$ и $\beta_2(t)$ – функции (42) (при $q = 2$ или $q = 4$), а функции $\alpha_3(\varepsilon, t)$ и $\beta_3(\varepsilon, t)$ непрерывны и являются 2π -периодическими по t .

Из равенств (47) и (48) следует, что для $q = 2$ или $q = 4$ языки Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (5) локально можно отождествить с совокупностью (по $t \in [0, 2\pi]$) кривых, описываемых уравнениями

$$z = (1 + \alpha_2(t) \xi) e^{2\pi(\theta_0 + \beta_2(t) \xi)i}, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (49)$$

Пусть теперь q – нечетно, т.е. пусть $q = 3$.

Теорема 9. Язык Арнольда $\Psi(1, 3)$ системы (5) определяется равенством (31) (при $p = 1$ и $q = 3$), в котором $\Upsilon(p, q, e(t))$ – это (при фиксированном t) кривая, описываемая уравнением (43) при

$$\alpha(\varepsilon, t) = \alpha_1(t) \varepsilon + \alpha_2(t) \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \alpha_3(\varepsilon, t), \quad (50)$$

$$\beta(\varepsilon, t) = \beta_1(t) \varepsilon + \beta_2(t) \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \beta_3(\varepsilon, t); \quad (51)$$

здесь $\alpha_1(t)$ и $\beta_1(t)$ – функции (34) (при $q = 3$), $\alpha_2(t)$ и $\beta_2(t)$ – функции (36) (при $q = 3$), а функции $\alpha_3(\varepsilon, t)$ и $\beta_3(\varepsilon, t)$ непрерывны и являются 2π -периодическими по t .

Из равенств (50) и (51) следует, что язык Арнольда $\Psi(1, 3)$ системы (5) локально можно отождествить с совокупностью (по $t \in [0, 2\pi]$) кривых, описываемых уравнениями

$$z = (1 + \alpha_1(t) \xi) e^{2\pi(\theta_0 + \beta_1(t) \xi)i}, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (52)$$

Кривые γ_1 и γ_2 , являющиеся в естественном смысле крайними в совокупности кривых (49) или (52), можно рассматривать как кривые, локально ограничивающие язык Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (5).

6. ПРИМЕРЫ

6.1. Пример 1. Рассмотрим дискретную систему

$$x_{n+1} = A(\alpha, \beta)x_n + a_3(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x_n \in R^2, \quad (53)$$

в которой $A(\alpha, \beta) = (1 + \alpha)Q(\beta)$, где

$$Q(\beta) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi(0, 25 + \beta) & -\sin 2\pi(0, 25 + \beta) \\ \sin 2\pi(0, 25 + \beta) & \cos 2\pi(0, 25 + \beta) \end{bmatrix},$$

а нелинейность $a_3(x)$ имеет вид

$$a_3(x) = \begin{bmatrix} x_1^3 + 2x_2^3 \\ 2x_1x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$Q(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

то в этом примере условие S1) выполнено при $\theta_0 = 1/4$. Для локализации языка Арнольда $\Psi(1, 4)$ системы (53) воспользуемся теоремой 8. Из этой теоремы следует, что множество $\Psi(1, 4)$ локально можно отождествить с совокупностью кривых (49), в которых $\alpha_2(t)$ и $\beta_2(t)$ – функции (42) (при $q = 4$).

Вычислим функции $\alpha_2(t)$ и $\beta_2(t)$. Так как рассматриваемая система (53) содержит только кубическую нелинейность $a_3(x)$, то формулы (30), (32), (11) и (12) приводят к равенствам $b_2(t) \equiv 0$ и

$$b_3(t) = Q^3 a_3(e(t)) + Q^2 a_3(Qe(t)) + Q a_3(Q^2 e(t)) + a_3(Q^3 e(t)),$$

где $Q = Q(0)$. Несложные вычисления приводят к равенству

$$b_3(t) = 2 \begin{bmatrix} 2 \sin^2 t \cos t + \sin^3 t - 2 \cos^3 t \\ 2 \sin t \cos^2 t - 2 \sin^3 t - \cos^3 t \end{bmatrix}.$$

Тогда из (42) получим

$$\alpha_2(t) = -\frac{1}{4}(b_3(t), e(t)) = \frac{1}{4} \cos 2t(4 \cos 2t + \sin 2t),$$

$$\beta_2(t) = -\frac{1}{8\pi}(b_3(t), g(t)) = \frac{1}{8\pi}(1 + \cos^2 2t - 2 \sin 4t).$$

Подставляя эти формулы в (49) и проведя анализ полученного равенства получим, что локально язык Арнольда $\Psi(1, 4)$ системы (53) заключен между двумя кривыми γ_1 и γ_2 , которые описываются, соответственно, уравнениями

$$z = (1 + \alpha_1 \xi) e^{2\pi(0, 25 + \beta_1 \xi)i}, \quad z = (1 + \alpha_2 \xi) e^{2\pi(0, 25 + \beta_2 \xi)i} \quad (0 \leq \xi \leq 1);$$

здесь

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{16\pi}, \quad \alpha_2 = \frac{4 - \sqrt{17}}{8}, \quad \beta_2 = \frac{3}{16\pi}.$$

Полученный результат подтверждается и прямым численным вычислением кривых синхронизации, локализирующих язык Арнольда $\Psi(1, 4)$ системы (53), в соответствии с формулами теоремы 8 (рис. 5).

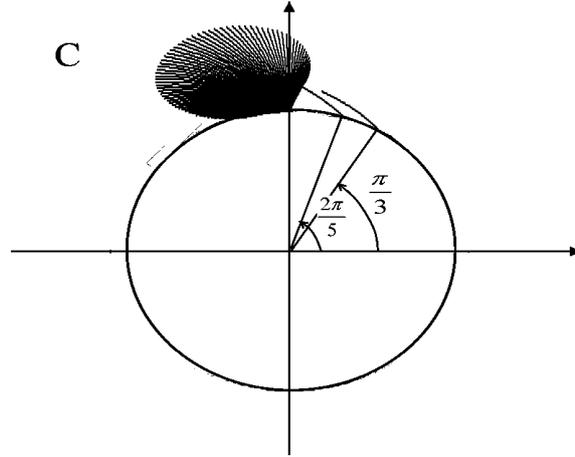


Рис. 5. Языки Арнольда системы (53)

На рис. 5 изображены также кривые синхронизации, локализирующие языки Арнольда $\Psi(1, 5)$ и $\Psi(1, 6)$ системы (53), вычисленные в соответствии с формулами теоремы 7. Вычисления подтверждают, что совокупность этих кривых (как для языков $\Psi(1, 5)$, так и для языков $\Psi(1, 6)$) по сути образует одну кривую. Другими словами, языки $\Psi(1, 5)$ и $\Psi(1, 6)$ локально представляют собой чрезвычайно узкие множества, фактически совпадающие с кривыми синхронизации, начинающимися из соответствующей рациональной точки единичной окружности.

6.2. Пример 2. Рассмотрим теперь зависящую от вещественных параметров α и β неавтономную динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$x' = A(\alpha, \beta)x + a(x, t, \alpha, \beta), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (54)$$

в котором

$$A(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

а нелинейность $a(x, t, \alpha, \beta)$ является гладкой по совокупности переменных, 2π -периодической по t и представимой в виде

$$a(x, t, \alpha, \beta) = a_2(x, t, \alpha, \beta) + a_3(x, t, \alpha, \beta) + \tilde{a}_4(x, t, \alpha, \beta),$$

где $a_2(x, t, \alpha, \beta)$ и $a_3(x, t, \alpha, \beta)$ содержат, соответственно, квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{a}_4(x, t, \alpha, \beta)$ удовлетворяет соотношению $\tilde{a}_4(x, t, \alpha, \beta) = O(\|x\|^4)$, $x \rightarrow 0$, равномерно по t , α и β . Система (54) при всех значениях параметров α и β имеет состояние равновесия $x = 0$.

Положим $\mu = (\alpha, \beta)$ и $\mu_0 = (0, \beta_0)$, где β_0 – некоторое положительное число. Состояние равновесия $x = 0$ системы (54) при $\mu = \mu_0$ является негиперболическим; при переходе параметра μ через значение μ_0 возможны различные сценарии бифуркаций. В частном случае, когда нелинейность $a(x, t, \alpha, \beta)$ от t не зависит, основным сценарием является бифуркация Андронова-Хопфа: при переходе μ через μ_0 в окрестности состояния равновесия $x = 0$ системы (54) возникают нестационарные периодические решения малой амплитуды с периодом, близким к числу $T_0 = \frac{2\pi}{\beta_0}$.

Наличие нестационарной периодической нелинейности $a(x, t, \alpha, \beta)$ влечет изменение указанного сценария бифуркации. А именно, становятся возможными различные сценарии возникновения у системы (54) в окрестности состояния равновесия $x = 0$ субгармонических (т.е. периодических решений с периодом кратным 2π) и квазипериодических решений.

Для изучения таких сценариев и, в частности, локализации языков Арнольда системы (54) можно использовать предложенную в настоящей работе схему исследования. На первом этапе такого исследования от системы (54) перейдем к дискретной динамической системе, описываемой уравнением:

$$x_{n+1} = V(\mu)x_n + v(x_n, \mu), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (55)$$

где $x_n \in R^2$, $V(\mu) = e^{2\pi A(\mu)}$, а нелинейный оператор $v(\cdot, \mu) : R^2 \rightarrow R^2$ представим в виде

$$v(x, \mu) = \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-\tau)A(\mu)} a(x(\tau), \tau, \mu) d\tau,$$

где $x(t)$ – решение системы (54), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x$. Неподвижные точки системы (55) определяют начальные значения 2π -периодических решений системы (54), а циклы периода q определяют начальные значения $2\pi q$ -периодических решений этой системы.

Несложно показать, что матрица $V(\mu)$ равна

$$V(\mu) = e^{2\pi\alpha} \begin{bmatrix} \cos 2\pi\beta & -\sin 2\pi\beta \\ \sin 2\pi\beta & \cos 2\pi\beta \end{bmatrix}.$$

Перейдем от α и β к новым параметрам, определяемым равенствами

$$\alpha^* = e^{2\pi\alpha} - 1, \quad \beta^* = \beta - \beta_0,$$

и представим систему (55) в виде

$$x_{n+1} = A(\alpha^*, \beta^*)x_n + b(x_n, \alpha^*, \beta^*), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (56)$$

в которой

$$b(x, \alpha^*, \beta^*) = v(x, \ln(1 + \alpha^*)/(2\pi), \beta^* + \beta_0),$$

$$A(\alpha^*, \beta^*) = (1 + \alpha^*)Q(\beta^*);$$

здесь

$$Q(\beta^*) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi(\beta_0 + \beta^*) & -\sin 2\pi(\beta_0 + \beta^*) \\ \sin 2\pi(\beta_0 + \beta^*) & \cos 2\pi(\beta_0 + \beta^*) \end{bmatrix}.$$

Задача о локальных бифуркациях системы (54) в естественном смысле равносильна аналогичной задаче для системы (56). Так как эта система подобна системе (5), то на следующем этапе можно воспользоваться приведенной в предыдущих параграфах схемой. В частности, в соответствии с этой схемой получим, что если число β_0 является рациональным: $\beta_0 = \frac{p}{q}$, то при переходе двумерного параметра $\mu = (\alpha, \beta)$ через точку $\mu_0 = (0, \beta_0)$ становится возможным сценарий возникновения у системы (54) в окрестности состояния равновесия $x = 0$ субгармонических решений периода $2\pi q$.

При этом на плоскости (α, β) параметров образуется система языков Арнольда, вершины которых лежат в точках $(0, \beta_0)$ с рациональными β_0 . Такие языки соответствуют областям значений параметров (α, β) , при которых система (54) имеет периодические режимы периода кратными 2π , амплитуды которых стремятся к нулю при стремлении точки (α, β) к $(0, \beta_0)$. Указанные языки могут быть локализованы в соответствии со схемой, изложенной в предыдущих параграфах.

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

7.1. Операторный метод. Доказательства основных утверждений настоящей работы основываются на операторном методе исследования задач о многопараметрических локальных бифуркациях, разработанном в [11] и [12]. Приведем в краткой форме основные положения этого метода. Здесь достаточно ограничиться рассмотрением двухпараметрических задач для операторных уравнений на плоскости.

Рассмотрим зависящее от двумерного параметра $\mu = (\alpha, \beta) \in R^2$ операторное уравнение

$$x = B(\mu)x + b(x, \mu), \quad x \in R^2, \quad (57)$$

в котором квадратная матрица $B(\mu)$ второго порядка непрерывно дифференцируемо зависит от μ , а нелинейность $b(x, \mu)$ также гладко зависит от μ и представима в виде

$$b(x, \mu) = b_2(x, \mu) + b_3(x, \mu) + \tilde{b}_4(x, \mu),$$

где $b_2(x, \mu)$ и $b_3(x, \mu)$ содержат, соответственно, квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{b}_4(x, \mu)$ является гладкой по x , при этом $\tilde{b}_4(x, \mu) = O(\|x\|^4)$, $x \rightarrow 0$, равномерно по μ .

Уравнение (57) при всех значениях μ имеет нулевое решение $x = 0$. Говорят, что значение μ_0 является *точкой бифуркации ненулевых решений уравнения (57)*, если существует последовательность $\mu_k \rightarrow \mu_0$ такая, что при $\mu = \mu_k$ уравнение (57) имеет ненулевое решение $x = x_k$, причем $\|x_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Как правило, бифуркации ненулевых решений уравнения (57) имеют направленный характер; приведем соответствующее определение. Пусть $e \in R^2$ – некоторый ненулевой вектор. Значение μ_0 параметра μ назовем *правильной точкой бифуркации уравнения (57) по направлению вектора e* , если существуют $\varepsilon_0 > 0$ и определенные при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ непрерывные функции $\mu = \mu(\varepsilon)$ и $x = x(\varepsilon)$ такие, что:

- 1) $\mu(0) = \mu_0$, $x(0) = 0$;
- 2) $\|x(\varepsilon) - \varepsilon e\| = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- 3) для каждого $\varepsilon \geq 0$ вектор $x(\varepsilon)$ является решением уравнения (57) при $\mu = \mu(\varepsilon)$.

Векторы $x(\varepsilon)$ и значения $\mu(\varepsilon)$ назовем *бифурцирующими решениями уравнения (57)*.

Лемма 6. Пусть значение μ_0 параметра μ является *правильной точкой бифуркации уравнения (57) по направлению вектора e* . Тогда вектор e будет собственным для матрицы $B(\mu_0)$, отвечающим собственному значению 1.

Ниже будем предполагать, что матрица $B(\mu_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2; другими словами, пусть $B(\mu_0) = I$, где I – единичная матрица второго порядка. Обозначим $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ и $B_0 = B(\mu_0)$.

Пусть e, g и e^*, g^* – две пары линейно независимых векторов, выбранные исходя из соотношений:

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 1, \quad (e, g^*) = (g, e^*) = 0. \quad (58)$$

Положим

$$S = \begin{bmatrix} (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) \\ (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Здесь B'_α и B'_β – матрицы, полученные дифференцированием матрицы $B(\alpha, \beta)$ по α и β соответственно.

Теорема 10. Пусть

$$\det S \neq 0. \quad (60)$$

Тогда μ_0 является *правильной точкой бифуркации уравнения (57) по направлению вектора e* .

Ниже используются обозначения

$$b_2 = b_2(e, \alpha_0, \beta_0), \quad b_3 = b_3(e, \alpha_0, \beta_0), \quad (61)$$

$$b'_{2x} = b'_{2x}(e, \alpha_0, \beta_0), \quad b'_{2\alpha} = b'_{2\alpha}(e, \alpha_0, \beta_0), \quad b'_{2\beta} = b'_{2\beta}(e, \alpha_0, \beta_0). \quad (62)$$

Положим

$$Fh = - [(h, e^*)B'_\alpha e + (h, g^*)B'_\beta e], \quad h \in R^2, \quad (63)$$

где обозначено $B'_\alpha = B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)$ и $B'_\beta = B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)$. В силу условия (60) линейный оператор $F : R^2 \rightarrow R^2$ обратим. Положим

$$\Gamma_0 = F^{-1} : R^2 \rightarrow R^2. \quad (64)$$

Лемма 7. *Оператор $\Gamma_0 = F^{-1}$ вычисляется по формуле*

$$\Gamma_0 y = J_\alpha(y)e + J_\beta(y)g.$$

Здесь функционалы $J_\alpha(y)$ и $J_\beta(y)$ – это компоненты вектора

$$J(y) = \begin{bmatrix} J_\alpha(y) \\ J_\beta(y) \end{bmatrix},$$

который вычисляется по формуле $J(y) = -S^{-1}\gamma(y)$, где S – матрица (59) и

$$\gamma(y) = \begin{bmatrix} (y, e^*) \\ (y, g^*) \end{bmatrix}.$$

Положим далее

$$e_1 = \Gamma_0 b_2, \quad \alpha_1 = J_\alpha(b_2), \quad \beta_1 = J_\beta(b_2), \quad (65)$$

$$e_2 = \Gamma_0(\varphi + b_3), \quad \alpha_2 = J_\alpha(\varphi + b_3), \quad \beta_2 = J_\beta(\varphi + b_3); \quad (66)$$

здесь

$$\begin{aligned} \varphi = & \alpha_1 B'_\alpha \Gamma_0 b_2 + \beta_1 B'_\beta \Gamma_0 b_2 + \frac{\alpha_1^2}{2} B''_{\alpha\alpha} e + \alpha_1 \beta_1 B''_{\alpha\beta} e + \\ & + \frac{\beta_1^2}{2} B''_{\beta\beta} e + b'_{2x} \Gamma_0 b_2 + \alpha_1 b'_{2\alpha} + \beta_1 b'_{2\beta}. \end{aligned} \quad (67)$$

Здесь Γ_0 – оператор (64), B'_α , B'_β , $B''_{\alpha\alpha}$, $B''_{\alpha\beta}$, $B''_{\beta\beta}$ – матрицы, полученные дифференцированием матрицы $B(\alpha, \beta)$ по α и (или) β нужное число раз в точке (α_0, β_0) ; используются также обозначения (61) и (62).

Теорема 11. *Существующие в условиях теоремы 10 бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ уравнения (57) представимы в виде*

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + o(\varepsilon^3), \quad (68)$$

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + o(\varepsilon^2), \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon \beta_1 + \varepsilon^2 \beta_2 + o(\varepsilon^2). \quad (69)$$

7.2. Вспомогательные утверждения. Для доказательства основных утверждений работы понадобятся вспомогательные утверждения.

Лемма 8. *Для того чтобы значение μ_0 было точкой бифуркации q -циклов системы (5), необходимо и достаточно, чтобы μ_0 было точкой бифуркации ненулевых решений уравнения (8).*

Необходимость. Пусть $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации q -циклов системы (5), т.е. существует последовательность $\mu_k \rightarrow \mu_0$ такая, что при $\mu = \mu_k$ система (5) имеет q -цикл $x_0^k, x_1^k, x_2^k, \dots, x_{q-1}^k$, причем $\max_{0 \leq j \leq q-1} \|x_j^k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. При этом $x_j^k \neq 0$ (это следует из определения q -цикла). Из леммы 1 получим, что любой из ненулевых векторов x_j^k при $\mu = \mu_k$ является решением уравнения (8). Следовательно, значение μ_0 является точкой бифуркации ненулевых решений уравнения (8).

Достаточность. Пусть $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации ненулевых решений уравнения (8), т.е. существует последовательность $\mu_k \rightarrow \mu_0$ такая, что при $\mu = \mu_k$ уравнение (8) имеет ненулевое решение $x = x_k$, причем $\|x_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Покажем, что тогда система (5) при $\mu = \mu_k$ имеет q -цикл, одной из точек которого является вектор x_k ; это и будет означать, что $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации q -циклов системы (5).

Действительно, из леммы 1 следует, что либо $x = x_k$ является неподвижной точкой системы (5) при $\mu = \mu_k$, либо является одной из точек цикла некоторого периода r этой системы при $\mu = \mu_k$, где r – делитель числа q . Вектор x_k не может быть ни неподвижной точкой системы (5), ни точкой r -цикла этой системы, если $r \neq q$. Ограничимся доказательством первого факта. В предположении противного получим равенства

$$x_k = A(\mu_k)x_k + a(x_k, \mu_k).$$

Разделив обе части этого равенства на ненулевое число $\|x_k\|$ и положив $y_k = x_k/\|x_k\|$, получим

$$y_k = A(\mu_k)y_k + \frac{a(x_k, \mu_k)}{\|x_k\|}. \quad (70)$$

Так как $\|y_k\| = 1$, то можно считать, что последовательность y_k сходится: $y_k \rightarrow y^*$, где $\|y^*\| = 1$. Переходя теперь в (70) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим равенство $y^* = A(\mu_0)y^*$, т.е. матрица $A(\mu_0)$ имеет собственное значение 1. Этот факт находится в противоречии с формулами (2) и (3), определяющими матрицу $A(\mu_0) = A(0, 0)$. Лемма доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 9. *Для того чтобы значение μ_0 было правильной точкой бифуркации q -циклов системы (5) по направлению вектора e , необходимо и достаточно, чтобы μ_0 было правильной точкой бифуркации уравнения (8) по направлению вектора e .*

7.3. Доказательство теоремы 1. Уравнение (8) является уравнением вида (57). Поэтому если установить, что для уравнения (8) при некотором выборе векторов e , e^* , g и g^* (удовлетворяющих условиям (58)) будет выполнено соотношение (60), то в силу теоремы 10 это будет означать, что μ_0 будет точкой бифуркации ненулевых решений уравнения (8). Тогда из леммы 10 будет следовать, что μ_0 является точкой бифуркации q -циклов системы (5), т.е. справедливость теоремы 1.

Матрица $B(\alpha, \beta)$ в уравнении (8) определяется равенством (9):

$$B(\alpha, \beta) = (1 + \alpha)^q Q^q(\beta); \quad (71)$$

здесь $Q(\beta)$ – матрица (3). Имеем

$$Q^q(\beta) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi q(\theta_0 + \beta) & -\sin 2\pi q(\theta_0 + \beta) \\ \sin 2\pi q(\theta_0 + \beta) & \cos 2\pi q(\theta_0 + \beta) \end{bmatrix}. \quad (72)$$

Так как $\theta_0 = \frac{p}{q}$, то $B(0, 0) = I$; поэтому матрица $B(0, 0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2.

Положим

$$e(t) = e^*(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad g(t) = g^*(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}. \quad (73)$$

При любом $t \in [0, 2\pi]$ эти векторы удовлетворяют условиям (58). Зафиксируем $t \in [0, 2\pi]$ и вычислим определенную равенством (59) матрицу S . Из (71) и (72) получим

$$B'_\alpha(0, 0) = qI, \quad B'_\beta(0, 0) = 2\pi q \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Отсюда, из (59) и (73) после несложных вычислений получим равенство

$$S = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 2\pi q \end{bmatrix}. \quad (75)$$

Следовательно, $\det S = 2\pi q^2 \neq 0$, т.е. соотношение (60) выполнено. Теорема доказана.

Замечание 1. При доказательстве теоремы 1 было показано, что определенная равенством (75) матрица S не зависит от t , т.е. является одной и той же для любого набора векторов (73).

7.4. Доказательство теоремы 2. В силу леммы 9 теорема 2 будет доказана, если показать, значение $\mu_0 = (0, 0)$ параметра $\mu = (\alpha, \beta)$ является правильной точкой бифуркации уравнения (8) по направлению любого ненулевого вектора e . Это фактически было установлено выше при доказательстве теоремы 1. Действительно, в качестве произвольного ненулевого вектора e можно выбрать вектор $e(t)$, определенный первым из равенств (73). Для любого такого вектора выполнено условие (60) теоремы 10, так как соответствующая матрица (75) является невырожденной.

7.5. Доказательство теоремы 3. Из леммы 9 и теоремы 2 следует, что для уравнения (8) справедливо (с естественными модификациями) утверждение теоремы 11. Поэтому теоремы 3 и 4 будут доказаны, если показать, что формулы (68) и (69), вычисленные применительно к уравнению (8), приводят к формулам, указанным в этих теоремах. Для этого, в свою очередь, требуется показать, что определенные равенствами (65)–(66) числа и векторы приводят к соответствующим числам и векторам из (16)–(20).

Рассмотрим сначала числа α_1 и β_1 , определенные равенствами (65). Имеем

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_\alpha(b_2) \\ J_\beta(b_2) \end{bmatrix} = J(b_2) = -S^{-1}\gamma(b_2) = -S^{-1} \begin{bmatrix} (b_2, e^*) \\ (b_2, g^*) \end{bmatrix}.$$

Преобразуем эти равенства применительно к уравнению (8). Для этого в качестве e , e^* , g и g^* будем рассматривать векторы (73) при фиксированном $t \in [0, 2\pi]$ (они при любом t являются векторами вида (13)), в качестве b_2 – вектор (15), а в качестве S – матрицу (75). Так как

$$S^{-1} = \frac{1}{2\pi q} \begin{bmatrix} 2\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2\pi q} \begin{bmatrix} 2\pi(b_2, e) \\ (b_2, g) \end{bmatrix};$$

здесь учтено, что в нашем случае выполнены равенства $e = e^*$ и $g = g^*$. Таким образом, определенные равенствами (65) числа α_1 и β_1 , вычисленные применительно к уравнению (8), приводят к соответствующим числам (16).

Рассмотрим теперь вектор e_1 , определенный первым из равенств (65). В силу леммы 7 имеем

$$e_1 = \Gamma_0 b_2 = J_\alpha(b_2)e + J_\beta(b_2)g = \alpha_1 e + \beta_1 g,$$

т.е. получили формулу (17).

Для завершения доказательства теоремы 3 остается провести аналогичные рассуждения, показывающие, что определенные равенствами (66) числа α_2 и β_2 и вектор e_2 , вычисленные применительно к уравнению (8), приводят к соответствующим числам (19) и вектору (20). Эти рассуждения проводятся по той же схеме, что и доказательство формул (16) и (17).

При этом дополнительно следует показать, что вектор (67), вычисленный применительно к уравнению (8), приводит к вектору (18). Другими словами, следует также показать,

что применительно к уравнению (8) выполнено равенство $\varphi = \chi$, где φ и χ – это соответственно векторы (67) и (18). Для доказательства этого факта наряду с формулами (74) используются также равенства:

$$B''_{\alpha\alpha}(0,0) = q(q-1)I, \quad B''_{\beta\beta}(0,0) = -(2\pi q)^2 I, \quad B''_{\alpha\beta}(0,0) = 2\pi q^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_0 b_2 = \alpha_1 e + \beta_1 g.$$

Подстановка этих формул в (67) и приводит к нужному равенству $\varphi = \chi$.

Замечание 2. При доказательстве теоремы 3 свойство нечетности q не использовалось. Другими словами, эта теорема верна для любого q . Однако, для четных q формулы (21) из теоремы 3 обладают специфическими свойствами, что приводит к качественному различию свойств бифуркации q -циклов системы (5) для четных и нечетных q .

7.6. Доказательство леммы 3. Из (3) имеем

$$Q = Q(0) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi\theta_0 & -\sin 2\pi\theta_0 \\ \sin 2\pi\theta_0 & \cos 2\pi\theta_0 \end{bmatrix}, \quad (76)$$

где $\theta_0 = p/q$ – несократимая дробь. Пусть q – четно. Тогда p – нечетно и, следовательно, $Q^{q/2} = -I$; поэтому верны равенства

$$Q^j = -Q^{j+q/2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (77)$$

Определенный равенством (15) вектор b_2 в случае четного q содержит четное число слагаемых, при этом для них в силу (77) верны равенства

$$Q^j a_2(Q^{q-1-j} e, \mu_0) = -Q^{j+q/2} a_2(Q^{q/2-1-j} e, \mu_0);$$

здесь учтено, что нелинейность $a_2(x, \mu)$ содержит только квадратичные по x слагаемые. Поэтому $b_2 = 0$. Лемма доказана.

7.7. Доказательство теоремы 4. Доказательство теоремы 4 сводится к подстановке равенств (24) в формулы (21) и (22).

7.8. Доказательство леммы 4. Отметим, что утверждение этой леммы для любых четных q может быть доказано по той же схеме, что и лемма 3. Для доказательства леммы при произвольном $q \geq 5$ понадобятся вспомогательные построения.

7.8.1. Вспомогательные построения. Пусть $f(t)$ – непрерывная 2π -периодическая функция. Для натурального числа n положим $h = \frac{2\pi}{n}$ и определим функцию

$$G_f^{(n)}(t) = [f(t) + f(t+h) + f(t+2h) + \dots + f(t+(n-1)h)]h. \quad (78)$$

Эта функция является 2π -периодической и при фиксированном t представляет собой приближенную формулу прямоугольников для вычисления интеграла от функции $f(s)$, а именно, для каждого фиксированного t имеет место приближенное равенство

$$\int_0^{2\pi} f(s) ds \approx G_f^{(n)}(t); \quad (79)$$

в этой приближенной формуле значение t определяет выбор n точек $t, t+h, t+2h, \dots, t+(n-1)h$ на отрезке длины 2π , в которых вычисляются значения функции $f(s)$.

Обозначим через P_n множество непрерывных 2π -периодических функций $f(s)$ таких, что выполнено тождество:

$$\int_0^{2\pi} f(s) ds \equiv G_f^{(n)}(t). \quad (80)$$

Другими словами, множество P_n состоит из тех функций, для которых приближенная формула (79) является точной при любом t .

Лемма 10. Пусть натуральные числа n и m таковы, что

$$\frac{2m}{n} \neq k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (81)$$

Тогда $\sin mt \in P_n$ и $\cos mt \in P_n$.

Другими словами, при выполнении условия (81) для функций $f(t) = \sin mt$ и $f(t) = \cos mt$ выполнено тождество $G_f^{(n)}(t) \equiv 0$.

Докажем эту лемму. Ограничимся рассмотрением функции $f(t) = \cos mt$. По (78) определим вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} F(t) &= f(t) + f(t+h) + f(t+2h) + \dots + f(t+(n-1)h) = \\ &= \cos mt + \cos m(t+h) + \cos m(t+2h) + \dots + \cos m(t+(n-1)h) = \\ &= \cos \tau + \cos(\tau + \nu) + \cos(\tau + 2\nu) + \dots + \cos(\tau + (n-1)\nu), \end{aligned} \quad (82)$$

где обозначено $\tau = mt$ и $\nu = mh$. Лемма 10 будет доказана, если установить тождество $F(t) \equiv 0$.

В силу (81) имеем

$$\nu = mh = m \frac{2\pi}{n} \neq \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, $\sin \nu \neq 0$. Поэтому функция (82) может быть представлена в виде

$$F(t) = \cos \tau + \frac{\cos(\tau + \nu) + \cos(\tau + 2\nu) + \dots + \cos(\tau + (n-1)\nu)}{\sin \nu} \cdot \sin \nu.$$

Отсюда, используя формулу $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$, после несложных преобразований придем к тождеству $F(t) \equiv 0$. Лемма 10 доказана.

Ниже утверждение леммы 10 нас будет интересовать только для чисел $m = 1, 2, 3, 4$. Для этих чисел лемма 10 может быть усилена.

Пусть, например, $m = 1$; из леммы 10 следует, что если $n \neq 1$ и $n \neq 2$, то $\sin mt \in P_n$ и $\cos mt \in P_n$. Непосредственная проверка показывает, что в действительности эти включения будут выполнены и при $n = 2$, а при $n = 1$ они не выполняются. Аналогичные рассуждения для чисел $m = 2$, $m = 3$ и $m = 4$ приводят к следующему вспомогательному утверждению.

Лемма 11. Пусть $f(t) = \sin mt$ или $f(t) = \cos mt$. Тогда:

- если $m = 1$, то $f(t) \in P_n \iff n \neq 1$;
- если $m = 2$, то $f(t) \in P_n \iff n \neq 1$ и $n \neq 2$;
- если $m = 3$, то $f(t) \in P_n \iff n \neq 1$ и $n \neq 3$;
- если $m = 4$, то $f(t) \in P_n \iff n \neq 1, n \neq 2$ и $n \neq 4$.

Определим теперь функции

$$f_2(t) = (a_2(e(t), \mu_0), Qe(t)), \quad g_2(t) = (a_2(e(t), \mu_0), Qg(t)), \quad (83)$$

и покажем, что справедлива

Лемма 12. *Функции (34) и (83) связаны равенствами:*

$$G_{f_2}^{(q)}(t) = -2\pi\alpha_1(t), \quad G_{g_2}^{(q)}(t) = -\beta_1(t). \quad (84)$$

При доказательстве этой леммы для упрощения нелинейность $a_2(x, \mu_0)$ будет обозначаться как $a_2(x)$, т.е. обозначение μ_0 будет опускаться. Из (78) имеем

$$\begin{aligned} G_{f_2}^{(q)}(t) &= [f_2(t) + f_2(t+h) + \dots + f_2(t+(q-1)h)]h = \\ &= [(a_2(e(t)), Qe(t)) + (a_2(e(t+h)), Qe(t+h)) + \\ &+ \dots + (a_2(e(t+(q-1)h)), Qe(t+(q-1)h))]h; \end{aligned} \quad (85)$$

здесь $h = 2\pi/q$. С другой стороны, из (33) и (34) получим

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= -\frac{1}{q}(b_2(t), e(t)) = -\frac{1}{q} (Q^{q-1}a_2(e(t)) + Q^{q-2}a_2(Qe(t)) + \dots + \\ &+ a_2(Q^{q-1}e(t)), e(t)) = -\frac{1}{q} [(a_2(e(t)), (Q^*)^{q-1}e(t)) + \\ &+ (a_2(Qe(t)), (Q^*)^{q-2}e(t)) + \dots + (a_2(Q^{q-1}e(t)), e(t))] , \end{aligned}$$

где Q^* – транспонированная матрица. Матрица (76) удовлетворяет равенствам

$$(Q^*)^k = Q^{q-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= -\frac{1}{q} [(a_2(e(t)), Qe(t)) + (a_2(Qe(t)), Q^2e(t)) + \\ &+ \dots + (a_2(Q^{q-1}e(t)), e(t))] , \end{aligned} \quad (86)$$

Сравним равенства (85) и (86). Пусть сначала $p = 1$, т.е. пусть $\theta_0 = 1/q$. В этом случае верны равенства

$$e(t+h) = Qe(t), \quad e(t+2h) = Q^2e(t), \quad \dots,$$

из которых следует, что соответствующие слагаемые в скобках правых частей формул (85) и (86) совпадают. В случае же, когда $p > 1$, слагаемые в скобках правых частей формул (85) и (86) также совпадают, но после соответствующих перестановок. Это и означает справедливость первого из равенств (84). Второе из этих равенств доказывается аналогично.

Лемма 12 доказана.

7.8.2. Завершение доказательства леммы 4. Заметим сначала, что так как нелинейность $a_2(x, \mu)$ является квадратичной, то разложения определенных равенствами (83) 2π -периодических функций $f_2(t)$ и $g_2(t)$ в тригонометрический ряд Фурье содержат только функции $\sin mt$ и $\cos mt$ при $m = 1$ и $m = 3$. Так как $q \geq 5$, то из леммы 11 получим, что $f_2(t) \in P_q$ и $g_2(t) \in P_q$. Другими словами, для функций $f_2(t)$ и $g_2(t)$ имеют место тождества

$$\int_0^{2\pi} f_2(s) ds \equiv G_{f_2}^{(q)}(t), \quad \int_0^{2\pi} g_2(s) ds \equiv G_{g_2}^{(q)}(t).$$

В силу вышеуказанного свойства разложения функций $f_2(t)$ и $g_2(t)$ в ряд Фурье, интегралы в полученных тождествах равны нулю. Отсюда и из леммы 12 получим тождества $\alpha_1(t) \equiv 0$ и $\beta_1(t) \equiv 0$. Лемма 4 доказана.

7.9. Доказательство леммы 5. В силу отмеченного в п. 5.3 следствия 4 функции (36) и (42) совпадают, а именно, они имеют вид:

$$\alpha_2(t) = -\frac{1}{q}(b_3(t), e(t)), \quad \beta_2(t) = -\frac{1}{2\pi q}(b_3(t), g(t)).$$

Дальнейшее доказательство леммы 5 проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 4. На первом этапе определяются аналоги функций (83):

$$f_3(t) = (a_3(e(t), \mu_0), Qe(t)), \quad g_3(t) = (a_3(e(t), \mu_0), Qg(t)). \quad (87)$$

и показывается, что справедливы аналоги равенств (84):

$$G_{f_3}^{(q)}(t) = -2\pi\alpha_2(t), \quad G_{g_3}^{(q)}(t) = -\beta_2(t).$$

На втором этапе отмечается, что так как нелинейность $a_3(x, \mu)$ является кубической, то разложения определенных равенствами (87) 2π -периодических функций $f_3(t)$ и $g_3(t)$ в тригонометрический ряд Фурье содержат только функции $\sin mt$ и $\cos mt$ при $m = 0$, $m = 2$ и $m = 4$. Отсюда и из леммы 12 следует утверждение леммы 5.

7.10. Доказательство теорем 7-9. Справедливость теоремы 7 следует из теорем 5 и 6, а также леммы 5. Справедливость теоремы 8 следует из теоремы 6, а теоремы 9 – из теоремы 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
2. Каток А.Б., Хасселблат Б. *Введение в теорию динамических систем*. М.: МЦНМО, 2005.
3. Kuznetsov Yu.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. N.Y.: Springer, 1998.
4. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей*. Москва-Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002.
5. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. *Структуры и хаос в нелинейных средах*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
6. Кузнецов С.П. *Динамический хаос*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
7. Козякин В.С., Красносельский А.М., Рачинский Д.И. *О языках Арнольда в задаче о периодических траекториях больших амплитуд* // Доклады АН. 2006. Т. 411, № 3. С. 1-7.
8. Noris J. *The closing of Arnold tongues for periodically forced limit cycle* // Nonlinearity, 1993. Vol. 6. P. 1093.
9. Козякин В.С. *Суббифуркация периодических колебаний* // ДАН СССР. 1977. Т. 232, № 1. С. 25-27.
10. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов*. М.: Мир, 1975.
11. Юмагулов М.Г. *Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах* // Доклады АН. 2009. Т. 424, № 2. С. 177-180.
12. Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г. *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах* // Уфимский математический журнал, 2010. Т.2. № 4. С. 3-26.

Марат Гаязович Юмагулов,
 Башкирский государственный университет,
 ул. З. Валиди, 32,
 450074, г. Уфа, Россия
 E-mail: yum_mg@mail.ru