

УДК 517.5

# ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

**В.В. ВОЛЧКОВ, ВИТ. В. ВОЛЧКОВ**

**Аннотация.** Изучение переопределенных граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных было инициировано Д. Серрином в 1971 г. В своей работе он установил свойство радиальной симметрии для решений некоторой переопределенной задачи Пуассона. Помимо значительного самостоятельного интереса, задачи такого типа имеют важные приложения в теории потенциала, интегральной геометрии, гидродинамике, электростатике и теории капиллярности. Как правило, их решение основано на принципе максимума, лемме Хопфа об угловой граничной точке и методе движения гиперплоскостей, введенным А.Д. Александровым для изучения некоторых геометрических проблем, связанных с характеристикой сфер. Среди других, более современных методов, не использующих принцип максимума в рассматриваемых задачах, отметим метод двойственности, метод объемной производной, а также интегральный метод.

В данной статье рассматривается переопределенная задача Неймана для уравнения Лапласа  $\Delta f = 0$  на плоских неограниченных областях. Показано, что при определенных условиях (см. теорему 2.1 в § 1) такая задача разрешима только для внешности круга. Отличительной особенностью теоремы 2.1 является то, что в ней впервые в подобных задачах получено точное условие на рост  $f$  на бесконечности. Кроме того, как видно из теоремы 2.2 в § 2, другие условия в теореме 2.1 также необходимы. В отличие от работ предшественников, доказательство теоремы 2.1 использует некоторые граничные свойства конформных отображений, теорему В.И. Смирнова о функциях класса  $H_p$  и теорему Фейера-Рисса о неотрицательных тригонометрических полиномах.

**Ключевые слова:** переопределенные задачи, задача Неймана, гармонические функции, граничное поведение.

**Mathematics Subject Classification:** 31A05

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В 1971 г. Д. Серрин инициировал [1] изучение переопределенных граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. Впоследствии выяснилось, что, помимо значительного самостоятельного интереса, такие задачи имеют важные приложения в теории потенциала [2], интегральной геометрии [3], [4], гидродинамике [5], электростатике [6], [7] и теории капиллярности [8], [9]. Например, известная проблема Помпейю, до сих пор не решенная в полном объеме, при достаточно общих условиях сводится к переопределенной граничной задаче для уравнения Гельмгольца [4], [10], [11]. Более того, именно изучение подобных задач позволило получить наиболее глубокие результаты о регулярности границы множеств, рассматриваемых в проблеме Помпейю [3], [12], [13]. По поводу результатов, связанных с примыкающей к данному кругу вопросов старой гипотезы Шиффера, см. [14], [15] и библиографию к этим работам.

---

V.V. VOLCHKOV, VIT.V. VOLCHKOV, OVERDETERMINED NEUMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM IN UNBOUNDED DOMAINS.

© Волчков В.В., Волчков Вит.В. 2020.

Поступила 30 октября 2019 г.

Классический результат Д. Серрина [1] устанавливает свойство радиальной симметрии для решений следующей переопределенной задачи Пуассона.

Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^2$ , для которой существует функция  $f \in C^2(\overline{\Omega})$ , удовлетворяющая уравнению Пуассона

$$\Delta f = -1 \quad \text{в } \Omega \tag{1.1}$$

и граничным условиям

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial n} = \text{const} \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{1.2}$$

Тогда, как показано в [1],  $\Omega$  – шар и  $f$  радиально симметрична. В [1] также отмечено, что подобное утверждение сохраняет силу и для некоторых других уравнений, обобщающих (1.1), если вместе с (1.2) выполняется условие

$$f > 0 \quad \text{в } \Omega. \tag{1.3}$$

Теорема Д. Серрина получила дальнейшее развитие и уточнение в разных направлениях (см. обзор [16] с обширной библиографией).

Во-первых, в ряде работ уточнялись условия теоремы Д. Серрина, связанные с гладкостью границы  $\Omega$  и решения  $f$ .

Во-вторых, рассматривались подобные задачи для других уравнений (в том числе и нелинейных) и других граничных условий.

В-третьих, изучались аналоги теоремы Д. Серрина для других типов областей (проколотых, кольцевых, неограниченных). При этом в случае неограниченной области к условиям (1.2), (1.3) добавлялось условие на поведение функции  $f$  на бесконечности. Например, в работе [17] требуется, чтобы  $f$  стремилась к нулю на бесконечности, а в [8], [18] дополнительно предполагается, что этому же условию удовлетворяют все частные производные от  $f$  первого порядка.

Доказательство основных результатов в большинстве из цитированных выше работ основано на принципе максимума, лемме Хопфа об угловой граничной точке и методе движения гиперплоскостей, введенным А.Д. Александровым для решения некоторых геометрических проблем, связанных с характеристикой сфер (см. [16], [19], [20]). Среди других, более современных методов, не использующих принцип максимума в рассматриваемых задачах, отметим метод двойственности [21], метод объемной производной [22], а также интегральный метод [23].

В данной статье рассматривается переопределенная задача Неймана для уравнения Лапласа  $\Delta f = 0$  на плоских неограниченных областях. Показано, что при определенных условиях (см. теорему 2.1 в § 1) такая задача разрешима только для внешности круга. Отличительной особенностью теоремы 2.1 является то, что в ней впервые в подобных задачах получено точное условие на рост  $f$  на бесконечности. Кроме того, как видно из теоремы 2.2 в § 2, другие условия в теореме 2.1 также необходимы. В отличие от работ предшественников, доказательство теоремы 2.1 использует некоторые граничные свойства конформных отображений, теорему В.И. Смирнова о функциях класса  $H_p$  и теорему Фейера-Рисса о неотрицательных тригонометрических полиномах.

## 2. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть  $\Gamma$  – замкнутая гладкая жорданова кривая в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ ,  $G$  – ограниченная область в  $\mathbb{C}$  с границей  $\Gamma$ ,  $\overline{G} = G \cup \Gamma$ . Как обычно, символом  $\frac{\partial}{\partial n}$  будем обозначать оператор дифференцирования в направлении внешней (по отношению к  $G$ ) нормали к  $\Gamma$ .

Сформулируем основные результаты данной работы.

**Теорема 2.1.** *Предположим, что существует функция  $f$ , непрерывная в  $\mathbb{C} \setminus G$  и гармоническая в  $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ , удовлетворяющая следующим условиям:*

1.  $f = 0$  на  $\Gamma$ ;
2.  $\frac{\partial f}{\partial n} = 1$  на  $\Gamma$ ;
3.  $f(z) = o(|z|^2)$  при  $z \rightarrow \infty$ .

Тогда область  $G$  является кругом, и при этом

$$f(z) = R \ln \frac{|z - z_0|}{R},$$

где  $z_0, R$  – центр и радиус круга  $G$ .

Доказательство теоремы 2.1 приводится в §3. Оно основано на применении конформного отображения внешности единичного круга на область  $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ . Это отображение позволяет свести исходную задачу для области  $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$  к переопределенной краевой задаче для внешности круга, в которой основной трудностью является неоднородность граничного условия для нормальной производной. Для изучения этого условия потребовались некоторые тонкие результаты о граничных свойствах функции, осуществляющей указанное выше конформное отображение, а также некоторые свойства классов Харди  $H_p$  в единичном круге (см. [24, гл. 9, 10]). Соответствующие вспомогательные конструкции и утверждения содержатся в §2. Отметим, что отсутствие подобной теории конформных отображений в многомерном случае оставляет открытым вопрос о существовании аналога теоремы 2.1 в пространстве  $\mathbb{R}^n$  при  $n > 2$ .

Следующий результат показывает необходимость условий 1, 2 и точность условия 3 в теореме 2.1.

**Теорема 2.2.** *Существуют отличная от круга ограниченная область  $G \subset \mathbb{C}$  с жордановой границей  $\Gamma$  класса  $C^\infty$  и функции  $f_1, f_2, f_3$ , принадлежащие  $C^\infty(\mathbb{C} \setminus G)$  и гармонические в  $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ , такие что:*

1.  $f_1$  удовлетворяет условиям 1 и 3 теоремы 2.1;
2.  $f_2$  удовлетворяет условиям 2 и 3 теоремы 2.1;
3.  $f_3$  удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы 2.1, и при этом

$$f_3(z) = O(|z|^2) \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы 2.2 содержится в § 4.

### 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Пусть  $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$  и функция  $u$  непрерывна в  $\overline{A} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ . При любом фиксированном  $\rho \geq 1$  функции  $u(\rho e^{i\varphi})$  соответствует ряд Фурье

$$u(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(\rho) e^{in\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (3.1)$$

где

$$u_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что

$$|u_n(\rho)| \leq \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |u(\rho e^{i\varphi})| \quad (3.3)$$

для любых  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\rho \geq 1$ . Пусть  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа. Если  $u \in C^2(A)$ , то простые вычисления с использованием (3.2) показывают, что при любых  $\rho > 1$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,

$n \in \mathbb{Z}$  выполнено равенство

$$\Delta(u_n(\rho)e^{in\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Delta u)(\rho e^{it}) e^{in(\varphi-t)} dt. \quad (3.4)$$

Кроме того,

$$\Delta(u_n(\rho)e^{in\varphi}) = \left( u_n''(\rho) + \frac{u_n'(\rho)}{\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} u_n(\rho) \right) e^{in\varphi}. \quad (3.5)$$

По теореме Римана о конформном отображении существует единственная голоморфная в области  $A$  функция  $w = \psi(z)$ , которая отображает  $A$  конформно на область  $\mathbb{C} \setminus G$  при условиях

$$\psi(\infty) = \infty, \quad \psi'(\infty) = a > 0. \quad (3.6)$$

Первое условие в (3.6) показывает, что функция  $w = \psi(z)$  точку  $z = \infty$  переводит в точку  $w = \infty$ , а второе условие означает, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi(z)}{z} = a > 0. \quad (3.7)$$

Из условий (3.6) и (3.7) следует, что функция  $\psi$ , являясь голоморфной в области  $A$ , имеет в точке  $z = \infty$  простой полюс, и поэтому ее лорановское разложение в  $A$  имеет вид

$$\psi(z) = az + \sum_0^{\infty} \psi_n z^{-n}, \quad a > 0. \quad (3.8)$$

Согласно принципу соответствия границ при конформных отображениях функция  $\psi$  может быть продолжена по непрерывности на множество  $\bar{A}$ . Для этого продолжения мы сохраним обозначение  $w = \psi(z)$ .

Пусть  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ,  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Как обычно, обозначим через  $H_p(\mathbb{D})$ ,  $p > 0$ , класс функций  $f$ , голоморфных в  $\mathbb{D}$  и таких, что для каждой из них интеграл

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \quad (3.9)$$

ограничен при  $0 \leq r < 1$ . При  $z \in \mathbb{D}$  положим

$$h(z) = a - \sum_0^{\infty} n\psi_n z^{-n-1} = \psi' \left( \frac{1}{z} \right). \quad (3.10)$$

Отметим, что в силу однолиственности  $\psi$  функция  $h$  не имеет нулей в  $\mathbb{D}$ . Далее нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения о свойствах функций  $h$  и  $\psi$ .

**Лемма 3.1.** *Функции  $h$  и  $1/h$  принадлежат классу  $H_p(\mathbb{D})$  при всех  $p > 0$ .*

*Доказательство.* Пусть  $b \in G$ . Обозначим через  $d(b)$  расстояние от точки  $b$  до  $\Gamma$ . Тогда при любом  $z \in \mathbb{D}$  имеем

$$\left| \psi \left( \frac{1}{z} \right) - b \right| \geq d(b) > 0.$$

Из этого неравенства и (3.8) следует, что существует постоянная  $c_1 > 0$ , такая что

$$\left| z \left( \psi \left( \frac{1}{z} \right) - b \right) \right| > c_1 \quad (3.11)$$

при всех  $z \in \mathbb{D}$ . Кроме того, из (3.8) и определения  $\psi$  получаем, что

$$\left| z \left( \psi \left( \frac{1}{z} \right) - b \right) \right| < c_2, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (3.12)$$

где  $c_2 > 0$  не зависит от  $z$ . Далее, при  $z \in \mathbb{D}$  из (3.10) находим

$$h(z) = -z^2 \left( \psi \left( \frac{1}{z} \right) - b \right)^2 \lambda'(z), \quad (3.13)$$

где

$$\lambda(z) = \left( \psi \left( \frac{1}{z} \right) - b \right)^{-1}.$$

Учитывая оценки (3.11) и (3.12), при любых  $p > 0$ ,  $r \in [0, 1)$  из (3.13) получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (|h(re^{i\varphi})|^p + |h(re^{i\varphi})|^{-p}) d\varphi < \\ & < c_2^{2p} \int_0^{2\pi} |\lambda'(re^{i\varphi})|^p d\varphi + c_1^{-2p} \int_0^{2\pi} |\lambda'(re^{i\varphi})|^{-p} d\varphi. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Функция  $\lambda$  отображает круг  $\mathbb{D}$  конформно и однолистно на некоторую ограниченную область с гладкой жордановой границей. По теореме Линделёфа (см. [24, гл. 10, § 1, теорема 4]), при надлежащем выборе ветви аргумента функции  $\arg \lambda'(z)$  и  $\arg 1/\lambda'(z)$  могут быть продолжены до непрерывных функций на  $\overline{\mathbb{D}}$ . Отсюда следует (см. [24, гл. 10, § 1, теорема 5]), что функции  $\lambda$  и  $1/\lambda$  принадлежат классу  $H_p(\mathbb{D})$  при любом  $p > 0$ . Таким образом, интегралы в правой части неравенства (3.14) ограничены по  $r$ . Отсюда и из (3.14) получаем утверждение леммы 3.1.  $\square$

**Следствие 3.1.** *Функция  $h$  имеет почти всюду на  $\mathbb{T}$  конечные предельные значения по некасательным путям, образующие граничную функцию  $h(e^{i\varphi})$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . При этом  $h(e^{i\varphi}) \in L^p(0, 2\pi)$  для любого  $p > 0$  и*

$$h(e^{i\varphi}) \neq 0 \quad \text{для почти всех } \varphi \in (0, 2\pi). \quad (3.15)$$

*Доказательство.* Утверждение о существовании указанной предельной функции  $h(e^{i\varphi})$  и ее принадлежности классу  $L^p(0, 2\pi)$  следует из леммы 3.1 и хорошо известного аналогичного свойства для любой функции класса  $H_p(\mathbb{D})$  (см., например, [24, гл. 9, § 4]). Применяя данное свойство к функции  $1/h$  и используя лемму 3.1, получим (3.15).  $\square$

**Следствие 3.2.** *Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  и  $|\alpha| \geq |\beta| > 0$ . Тогда функция*

$$h_1(z) = \frac{h(z)}{(\alpha + \beta z)^2}$$

*принадлежит классу  $H_p(\mathbb{D})$  при всех  $0 < p < \frac{1}{4}$ .*

*Доказательство.* Сначала предположим, что  $|\beta| = |\alpha|$ . В этом случае  $\alpha + \beta z = \beta(z - e^{i\gamma})$  при некотором  $\gamma \in [0, 2\pi]$ . Пусть  $0 < p < \frac{1}{4}$ . Выберем  $q > 1$  так, чтобы  $qp < \frac{1}{4}$ . Используя неравенство Гельдера и лемму 3.1, для любого  $r \in [0, 1)$  имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} |h_1(re^{i\varphi})|^p d\varphi = \int_0^{2\pi} |h(re^{i\varphi})|^p |\beta(re^{i\varphi} - e^{i\gamma})|^{-2p} d\varphi \leq \\ & \leq \left( \int_0^{2\pi} |h(re^{i\varphi})|^{\frac{pq}{q-1}} d\varphi \right)^{\frac{q-1}{q}} \left( \int_0^{2\pi} |\beta(re^{i\varphi} - e^{i\gamma})|^{-2pq} d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ & \leq c \left( \int_0^{2\pi} |1 - re^{i(\varphi-\gamma)}|^{-2pq} d\varphi \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где постоянная  $c > 0$  не зависит от  $r$ . Поскольку

$$|1 - re^{i(\varphi-\gamma)}| \geq 1 - \cos(\varphi - \gamma)$$

и  $pq < \frac{1}{4}$ , из (3.16) получаем требуемое утверждение. В случае  $|\alpha| > |\beta| > 0$  утверждение очевидно в силу леммы 3.1 и неравенства

$$|\alpha + \beta z| \geq |\alpha| - |\beta|, \quad z \in \mathbb{D}.$$

□

**Лемма 3.2.** Для почти всех (по мере Лебега)  $\varphi \in [0, 2\pi]$  имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \psi'((1 + \varepsilon)e^{i\varphi}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\psi((1 + \varepsilon)e^{i\varphi}) - \psi(e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}}, \quad (3.17)$$

где оба предела существуют и конечны.

*Доказательство.* Из соотношения (3.10) имеем

$$\psi'((1 + \varepsilon)e^{i\varphi}) = h((1 + \varepsilon)^{-1}e^{-i\varphi})$$

для любых  $\varepsilon > 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Отсюда и из следствия 3.1 вытекает существование конечного предела в левой части равенства (3.17) для почти всех  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . По теореме о среднем для таких  $\varphi$  выполнено равенство

$$\int_1^{1+\varepsilon} \psi'(\rho e^{i\varphi}) d\rho = \varepsilon \psi'(\xi e^{i\varphi})$$

для любого  $\varepsilon > 0$  и некоторого  $\xi \in (1, 1 + \varepsilon)$ , зависящего от  $\varepsilon$ . Следовательно, существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{1+\varepsilon} \psi'(\rho e^{i\varphi}) d\rho,$$

который равен пределу в левой части равенства (3.17). Поскольку

$$\int_1^{1+\varepsilon} \psi'(\rho e^{i\varphi}) d\rho = \frac{\psi((1 + \varepsilon)e^{i\varphi}) - \psi(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}},$$

отсюда получаем утверждение леммы 3.2. □

**Лемма 3.3.** Для почти всех  $\varphi \in (0, 2\pi)$  существует  $\delta = \delta(\varphi) > 0$ , такое что при любом  $\varepsilon \in (0, \delta(\varphi))$  круг

$$K_{\varepsilon, \varphi} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \psi(e^{i\varphi}) - \varepsilon e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi})| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\psi'(e^{i\varphi})| \right\} \quad (3.18)$$

не пересекается с  $\Gamma$ .

*Доказательство.* Предположим, что для некоторого  $\varphi \in (0, 2\pi)$  существует последовательность  $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$  положительных чисел такая, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$  и при любом  $j$  круг  $K_{\varepsilon_j, \varphi}$  пересекается с  $\Gamma$ . Обозначим через  $\varphi_j$  одну из точек полуинтервала  $[0, 2\pi)$ , для которой  $\psi(e^{i\varphi_j}) \in K_{\varepsilon_j, \varphi} \cap \Gamma$ . Тогда имеем

$$|\psi(e^{i\varphi_j}) - \psi(e^{i\varphi}) - \varepsilon_j e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi})| \leq \frac{\varepsilon_j}{2} |\psi'(e^{i\varphi})|. \quad (3.19)$$

Из этого неравенства и однолиственности  $\psi$  заключаем, что  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  при  $j \rightarrow \infty$ .

Далее, функция  $\psi(e^{it})$  абсолютно непрерывна на  $[0, 2\pi]$  и для почти всех  $t \in [0, 2\pi]$  выполнено равенство

$$\frac{d}{dt} \psi(e^{it}) = i e^{it} \psi'(e^{it}) \quad (3.20)$$

(см. [24, гл. 10, § 1, теорема 1]).

Предположим теперь, что  $\psi'(e^{i\varphi}) \neq 0$  и

$$\psi(e^{i\varphi}) - \psi(e^{i\varphi_j}) = i \psi'(e^{i\varphi}) e^{i\varphi} (\varphi - \varphi_j) + o(\varphi - \varphi_j) \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Из следствия 3.1 и равенства (3.20) следует, что эти требования выполняются для почти всех  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Сопоставляя (3.21) и (3.19) и учитывая, что  $\psi'(e^{i\varphi}) \neq 0$ , приходим к неравенству

$$|\varepsilon_j + i(\varphi - \varphi_j) + o(\varphi - \varphi_j)| \leq \frac{\varepsilon_j}{2} \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

При достаточно больших  $j$  последнее неравенство противоречиво, откуда следует утверждение леммы 3.3.  $\square$

**Лемма 3.4.** Пусть функция  $f$  гармонична в круге  $K = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \zeta_0| < r\}$  и

$$M = \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)| < +\infty. \quad (3.22)$$

Тогда при любом  $\zeta \in K$  имеет место оценка

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leq \frac{2M|\zeta - \zeta_0|}{r - |\zeta - \zeta_0|}. \quad (3.23)$$

*Доказательство.* Из условия леммы получаем, что функция  $w(z) = f(rz + \zeta_0)$  гармонична в  $\mathbb{D}$  и  $|w(z)| \leq M$  для любого  $z \in \mathbb{D}$ . Отсюда следует (см., например, [24, гл. 9, § 2, следствие 2]), что почти всюду на  $\mathbb{T}$  функция  $w$  имеет некасательные конечные предельные значения. Как обычно, сохраним обозначение  $w(e^{it})$  для соответствующей предельной функции, определенной почти всюду на  $\mathbb{T}$ . Тогда из (3.22) имеем  $|w(e^{it})| \leq M$ . Кроме того, для любого  $z = \rho e^{i\varphi}$ ,  $0 \leq \rho < 1$  выполнена формула Пуассона

$$w(z) - w(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} w(e^{it}) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos(n(\varphi - t)) dt \quad (3.24)$$

(см. [24, гл. 9, § 2, теорема 3]). Интеграл справа не превосходит выражения

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |w(e^{it})| \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n dt \leq \frac{2M\rho}{1 - \rho},$$

поэтому оценка (3.23) следует из (3.24).  $\square$

**Лемма 3.5.** Для почти всех  $\varphi \in (0, 2\pi)$  выполнено следующее утверждение: если  $f$  гармонична в  $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ , непрерывна в  $\mathbb{C} \setminus G$ , и существует производная  $\frac{\partial f}{\partial n}(\psi(e^{i\varphi}))$ , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{f(\psi((1 + \varepsilon)e^{i\varphi})) - f(\psi(e^{i\varphi}))}{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial n}(\psi(e^{i\varphi})) |\psi'(e^{i\varphi})|.$$

*Доказательство.* Из следствия 3.1 и леммы 3.2 вытекает, что для почти всех  $\varphi \in (0, 2\pi)$  существует отличный от нуля конечный предел в левой части равенства (3.17) и

$$\psi((1 + \varepsilon)e^{i\varphi}) = \psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi}) + o(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (3.25)$$

Следовательно, для таких  $\varphi$  точка  $\psi((1 + \varepsilon)e^{i\varphi})$  содержится в круге  $K_{\varepsilon, \varphi}$  (см. (3.18)) при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$ . Применим теперь лемму 3.4, полагая

$$\zeta_0 = \psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi}), \quad r = \frac{\varepsilon}{2} |\psi'(e^{i\varphi})|,$$

$$\zeta = \psi((1 + \varepsilon)e^{i\varphi}),$$

где  $\varepsilon \in (0, \delta(\varphi))$  – достаточно мало. Поскольку круг  $K_{\varepsilon, \varphi}$  содержится в круге

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq |\psi(e^{i\varphi})| + \frac{3}{2} \delta(\varphi) |\psi'(e^{i\varphi})| \right\},$$

существует константа  $M_\varphi$ , не зависящая от  $\varepsilon$ , такая что

$$\sup_{K_{\varepsilon, \varphi}} |f| \leq M_\varphi \quad \text{для всех } \varepsilon \in (0, \delta(\varphi)).$$

Тогда из (3.25) и леммы 3.4 получаем

$$f(\psi((1+\varepsilon)e^{i\varphi})) - f(\psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi}\psi'(e^{i\varphi})) = o(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (3.26)$$

Далее, из определения нормальной производной имеем

$$\frac{\partial f}{\partial n}(\psi(e^{i\varphi})) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{f(\psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi}\psi'(e^{i\varphi})) - f(\psi(e^{i\varphi}))}{\varepsilon |\psi'(e^{i\varphi})|}.$$

Из этого равенства и соотношения (3.26) следует утверждение леммы 3.5.  $\square$

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть функция  $f$  удовлетворяет условиям теоремы 1. Докажем, что  $G$  – круг и

$$f(z) = R \ln \frac{|z - z_0|}{R},$$

где  $z_0, R$  – центр и радиус круга  $G$ .

Рассмотрим функцию  $u(z) = f(\psi(z))$ , где  $\psi$  – функция, определенная в § 2. Из условия теоремы 1 получаем, что  $u$  гармонична в области  $A$  и непрерывна в  $\bar{A}$ , при этом

$$u(e^{i\varphi}) = 0 \quad \text{для любого } \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (4.1)$$

Кроме того, из условия 3 теоремы 1 и равенства (3.8) следует, что

$$u(z) = o(|z|^2) \quad \text{при } z \rightarrow +\infty. \quad (4.2)$$

При любом фиксированном  $\rho \geq 1$  функции  $u(\rho e^{i\varphi})$  соответствует ряд Фурье (3.1), в котором функции  $u_n(\rho)$  являются непрерывными на  $[1, +\infty)$  (см. (3.2)). Из гармоничности  $u$  и соотношения (3.4) получаем, что функции  $u_n(\rho)e^{in\varphi}$  являются гармоническими в  $A$  при всех  $n$ . В силу (3.5), это означает, что

$$u_0(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho, \quad u_n(\rho) = a_n \rho^n + b_n \rho^{-n} \quad \text{при } n \neq 0,$$

где  $\rho \geq 1$  и  $a_n, b_n$  – комплексные постоянные. Из равенств (4.1) и (3.2) следует, что  $u_n(1) = 0$ , откуда

$$a_0 = 0 \quad \text{и} \quad a_n + b_n = 0 \quad \text{при } n \neq 0. \quad (4.3)$$

Далее, из (3.3) и (4.2) получаем

$$u_n(\rho) = o(\rho^2) \quad \text{при } \rho \rightarrow +\infty.$$

Последнее равенство означает, что  $a_n = 0$  и  $b_{-n} = 0$  при  $n \geq 2$ . Сопоставляя это с (4.3), приходим к выводу, что при  $|z| \geq 1$

$$u(z) = b_0 \ln |z| + a_1 \left( z - \frac{1}{\bar{z}} \right) + a_{-1} \left( \frac{1}{z} - \bar{z} \right), \quad (4.4)$$

где черта означает знак комплексного сопряжения. Из этого равенства находим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{u((1+\varepsilon)e^{i\varphi}) - u(e^{i\varphi})}{\varepsilon} = b_0 + 2a_1 e^{i\varphi} - 2a_{-1} e^{-i\varphi}$$

для любого  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Отсюда и из леммы 3.5 заключаем, что

$$b_0 + 2a_1 e^{-i\varphi} - 2a_{-1} e^{i\varphi} = |h(e^{i\varphi})| \quad (4.5)$$

для почти всех  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

По теореме Фейера-Рисса (см. [25, приложение 5]) неотрицательный тригонометрический полином в левой части равенства (4.5) можно представить в виде

$$b_0 + 2a_1 e^{-i\varphi} - 2a_{-1} e^{i\varphi} = |\alpha + \beta e^{i\varphi}|^2, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (4.6)$$

где комплексные постоянные  $\alpha, \beta$  таковы, что

$$\alpha + \beta z \neq 0 \quad \text{при } z \in \mathbb{D}. \quad (4.7)$$

Докажем, что  $\beta = 0$ . Предположим противное, тогда из (4.7) имеем  $|\alpha| \geq |\beta| > 0$ . Применяя лемму 3.1 и следствие 3.2, отсюда заключаем, что функции

$$h_1(z) = \frac{h(z)}{(\alpha + \beta z)^2}, \quad h_2(z) = \frac{1}{h_1(z)}$$

принадлежат классу  $H_p(\mathbb{D})$  при  $p \in (0, 1/4)$ . Кроме того, из (4.5) и (4.7) следует, что

$$|h_1(e^{i\varphi})| = |h_2(e^{i\varphi})| = 1$$

для почти всех  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . В силу теоремы В.И. Смирнова (см. [24, гл. 9, § 4, теорема 4]), это означает, что  $|h_1(z)| = 1$  при всех  $z \in \mathbb{D}$ . Следовательно,  $h(z) = \gamma(\alpha^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 z^2)$ , где  $\gamma \in \mathbb{C}$ ,  $|\gamma| = 1$ . Учитывая (3.10), отсюда получаем  $\beta = 0$ , что противоречит нашему предположению. Данное рассуждение и формулы (4.5) и (4.6) показывают, что  $\beta = a_1 = a_{-1} = 0$  и  $|h(e^{i\varphi})| = b_0$  для почти всех  $\varphi \in (0, 2\pi)$ . Как и выше, отсюда и из теоремы В.И. Смирнова заключаем, что  $h$  – тождественная константа. Учитывая (3.10) и (3.8), имеем  $h(z) = a$  в  $\mathbb{D}$  и  $\psi(z) = az + \psi_0$  в  $A$ . Таким образом, полагая  $R = a$  и  $z_0 = \psi_0$ , приходим к утверждению теоремы 2.1.

## 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Очевидно, при любом достаточно малом  $\varepsilon \in (0, 1)$  выполнено неравенство

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{9(1-\varepsilon)^2} < (1-\varepsilon)^2. \quad (5.1)$$

Для таких  $\varepsilon$  обозначим

$$A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1 - \varepsilon\}.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = z - \frac{2}{3z} - \frac{1}{27z^3}, \quad z \in A_\varepsilon. \quad (5.2)$$

Для любых  $z_1, z_2 \in A_\varepsilon$  имеем оценки

$$|z_1 z_2| > (1-\varepsilon)^2, \quad |z_1^{-2} + (z_1 z_2)^{-1} + z_2^{-2}| < \frac{3}{(1-\varepsilon)^2}. \quad (5.3)$$

Кроме того, из (5.2) находим

$$\Phi(z_1) - \Phi(z_2) = (z_1 - z_2) \left( 1 + \frac{1}{z_1 z_2} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{27} (z_1^{-2} + (z_1 z_2)^{-1} + z_2^{-2}) \right) \right).$$

Учитывая неравенства (5.1) и (5.3), из последнего соотношения заключаем, что  $\Phi(z_1) \neq \Phi(z_2)$  при  $z_1 \neq z_2$ . Таким образом,  $\Phi$  однолистка в области  $A_\varepsilon$ . Положим

$$\Phi(A_\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : z = \Phi(\zeta), \zeta \in A_\varepsilon\},$$

и обозначим через  $g$  обратную к  $\Phi$  функцию, действующую из  $\Phi(A_\varepsilon)$  на  $A_\varepsilon$ . Из формулы (5.2) следует, что при любом  $z \in A_\varepsilon$  выполнены неравенства

$$|z| - \frac{2}{3(1-\varepsilon)} - \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3} < |\Phi(z)| < |z| + \frac{2}{3(1-\varepsilon)} + \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3}.$$

Отсюда и из определения  $g$  получаем, что

$$|z| - \frac{2}{3(1-\varepsilon)} - \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3} < |g(z)| < |z| + \frac{2}{3(1-\varepsilon)} + \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3} \quad (5.4)$$

при всех  $z \in \Phi(A_\varepsilon)$ .

Положим теперь

$$G = \mathbb{C} \setminus \overline{\Phi(A)}, \quad \text{где} \quad \Phi(A) = \{z \in \mathbb{C} : z = \Phi(\zeta), \zeta \in A\}.$$

В силу однолиственности  $\Phi$  множество  $G$  является ограниченной областью с гладкой жордановой границей  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = \Phi(\zeta), \zeta \in \mathbb{T}\}$ . Кроме того, поскольку

$$\Phi(1) = -\Phi(-1) = \frac{8}{27} \quad \text{и} \quad \Phi(i) = -\Phi(-i) = \frac{44}{27}i,$$

область  $G$  не является кругом.

Рассмотрим функции

$$f_1 = \ln |g|, \quad f_2 = \frac{10}{9} \ln |g| - \frac{1}{3} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{g^2} \right),$$

$$f_3 = \frac{10}{9} \ln |g| + \frac{1}{6} \operatorname{Re} \left( g^2 - \frac{1}{g^2} \right).$$

Из определения  $g$  следует, что  $g$  голоморфна в  $\Phi(A_\varepsilon)$  и не обращается в нуль. Отсюда получаем, что функции  $f_1, f_2, f_3$  являются гармоническими в  $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$  и принадлежат классу  $C^\infty(\mathbb{C} \setminus G)$ . Используя также (5.4), приходим к выводу, что функции  $f_1, f_2, f_3$  удовлетворяют всем требованиям теоремы 2.2.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Serrin *A symmetry problem in potential theory* // Arch. Rational Anal. Mech. **43**:1, 304–318 (1971).
2. L.E. Payne, G.A. Philippin *On two free boundary problems in potential theory* // J. Math. Anal. Appl. **161**:2, 332–342 (1991).
3. C.A. Berenstein, M. Shahshahani *Harmonic analysis and the Pompeiu problem* // Amer. J. Math. **105**:5, 1217–1229 (1983).
4. V.V. Volchkov *Integral Geometry and Convolution Equations*, Kluwer, Dordrecht (2003).
5. R.L. Fosdick, J. Serrin *Rectilinear steady flow of simple fluids* // Proc. R. Soc. Lond. A. **332**:1590, 311–333 (1973).
6. G.A. Philippin *On a free boundary problem in Electrostatics* // Math. Meth. Appl. Sci. **12**:5, 387–392 (1990).
7. O. Mendez, W. Reichel *Electrostatic characterization of spheres* // Forum Math. **12**:2, 223–245 (2000).
8. B. Sirakov *Symmetry for exterior elliptic problems and two conjectures in potential theory* // Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. non Linéaire. **18**:2, 135–156 (2001).
9. W. Reichel *Radial symmetry for an electrostatic, a capillarity and some fully nonlinear overdetermined problems on exterior domains* // Z. Anal. Anwendungen. **15**:3, 619–635 (1996).
10. L. Zalcman *A bibliographic survey of the Pompeiu problem* // Approximation by solutions of partial differential equations (ed. Fuglede B. et. al), Kluwer, Dordrecht, 185–194 (1992).
11. V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov *Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*, Birkhäuser, Basel (2013).
12. S.A. Williams *Analyticity of the boundary for Lipschitz domains without the Pompeiu property* // Indiana Univ. Math. J. **30**:3, 357–369 (1981).
13. L.A. Caffarelli, L. Karp, H. Shahgholian *Regularity of a free boundary with application to the Pompeiu problem* // Ann. of Math. **151**:2, 269–292 (2000).
14. C.A. Berenstein, P. Yang *An overdetermined Neumann problem in the unit disk* // Adv. in Math. **44**:1, 1–17 (1982).
15. N.B. Willms, G.M.L. Gladwell *Saddle points and overdetermined problems for the Helmholtz equation* // Z. Angew Math. Phys. **45**:1, 1–26 (1994).
16. P.W. Schaefer *On nonstandard overdetermined boundary value problems* // Nonlinear Analysis. **47**:4, 2203–2212 (2001).
17. N. Garofalo, E. Sartori *Symmetry in exterior boundary value problems for quasilinear elliptic equations via blow-up and a priori estimates* // Adv. Diff. Eqs. **4**:2, 137–161 (1999).
18. W. Reichel *Radial symmetry for elliptic boundary-value problems on exterior domains* // Arch. Rational Mech. Anal. **137**:6, 381–394 (1997).

19. G.A. Philippin *Applications of the maximum principle to a variety of problems involving elliptic differential equations* // Pitman Res. Notes Math. Ser. **175**, 34–48 (1988).
20. A.D. Alexandrov *A characteristic property of the spheres* // Ann. Mat. Pura Appl. **58**:1, 303–315 (1962).
21. L.E. Payne, P.W. Schaefer *Duality theorems in some overdetermined problems* // Math. Methods in the Appl. Sciences. **11**:6, 805–819 (1989).
22. M. Choulli, A. Henrot *Use of the domain derivative to prove symmetry results in partial differential equations* // Math. Nachr. **192**:1, 91–103 (1998).
23. B. Brandolini, C. Nitsch, P. Salani, C. Trombetti *Serrin type overdetermined problems: an alternative proof* // Arch. Rational Mech. Anal. **190**:2, 267–280 (2008).
24. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1966.
25. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций*. М.: Гостехиздат, 1956.

Валерий Владимирович Волчков,  
Донецкий национальный университет,  
ул. Университетская, 24,  
283001, г. Донецк  
E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Виталий Владимирович Волчков,  
Донецкий национальный университет,  
ул. Университетская, 24,  
283001, г. Донецк  
E-mail: volna936@gmail.com