ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 2 (2020). С. 49-54.

УДК 517.951, 517.957

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОДНОЙ СПИНОВОЙ СИСТЕМЫ И ДВУХКОМПОНЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ КАМАССЫ-ХОЛМА

А.Г. ТАЙШИЕВА, Т.Р. МЫРЗАКУЛ, Г.Н. НУГМАНОВА

Аннотация. Работа посвящена исследованию эквивалентности двухкомпонентного уравнения Камассы-Холма (УКХ) и спиновой системы, являющееся обобщением уравнения ферромагнетика Гейзенберга. Известно, что эквивалентность между нелинейными интегрируемыми уравнениями дает возможность расширенного поиска их различных точных решений. Для УКХ применим метод обратной задачи рассеяния через систему линейных дифференциальных уравнений в частных призводных со скалярными коэффициентами. В отличие от УКХ, коэффициенты линейных систем, соответствующих спиновым уравнениям, связаны с симметричными матричными представлениями Лакса. Поэтому при установлении эквивалентности между выше упомянутыми уравнениями возникают дополнительные сложности. Исходя из этого, нами предлагается матричное представление Лакса для УКХ в симметрическом пространстве. Используя этот результат, установлена калибровочная эквивалентность между двухкомпонентным УКХ и спиновой системой. Показана связь между их решениями.

Ключевые слова: двухкомпонентное уравнение Камассы-Холма, матричное представление Лакса, спиновая система, калибровочная эквивалентность.

Mathematics Subject Classification: 35C08, 35Q51

1. Введение

Теория многокомпонентных интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений привлекла в последнее время немалое количество исследователей в области теории солитонов [1]-[2]. Одним из таких моделей является двухкомпонентное УКХ, которое берет начало с классического интегрируемого УКХ вида [3]

$$u_t + \kappa\, u_x - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \tag{1.1}$$

где $u = u(x,t)$ — скорость волны на мелководье в направлении x, а κ — константа связи.

В работах [4]–[6] показаны, что УКХ (1.1) обладает большинством важных свойств, характерных интегрируемым уравнениям.

2. Двухкомпонентное УКХ

Объектом нашего исследования является двухкомпонентное УКХ, которое приведено в работе [7]. Оно выглядит следующим образом:

$$m_t + um_x + 2mu_x - \rho\rho_x = 0, \tag{2.1}$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{2.2}$$

A.G. Tayshieva, T.R. Myrzakul, G.N. Nugmanova, On equivalence of one spin system and two-component Kamass-Holm equation.

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (Договор N132 от 12.03.2018).

Поступила 10 декабря 2019 г.

где $u = u(x,t)$, $\rho = \rho(x,t)$ and $m = m(x,t) \equiv u - u_{xx} + k^2$ – действительные функции от x и t.

УКМ (2.1)–(2.2) разрешимо методом обратной задачи рассеяния через представление Лакса [7]

$$\Phi_{xx} = \left(\frac{1}{4} - m\lambda + \rho^2\lambda^2\right)\Phi, \tag{2.3}$$

$$\Phi_t = -\left(\frac{1}{2\lambda} + u\right)\Phi_x + \frac{u_x}{2}\Phi, \tag{2.4}$$

где λ — спектральный параметр, $\Phi(\lambda; x, t) = (\phi_1, \phi_2)^T$.

3. Матричное представление Лакса двухкомпонентного УКХ

Основной результат данного пункта сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Представление Лакса для двухкомпонентного УКХ (2.1)–(2.2) в симметрическом пространстве $\mathfrak{su}(n+1)/\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1)\oplus\mathfrak{u}(n))$ при $n = 2$ задается в виде*

$$\Phi_x = U_1\Phi, \tag{3.1}$$

$$\Phi_t = V_1\Phi, \tag{3.2}$$

где

$$U_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \lambda \\ m\lambda + \rho^2\lambda^3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{u+u_x}{2} - \frac{1}{4\lambda^2} & \frac{1}{2\lambda} - u\lambda \\ \frac{m+u_x+u_{xx}}{2\lambda} - um\lambda + \frac{\lambda\rho^2}{2} - \lambda^3 u\rho^2 & \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{u+u_x}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Из условий совместности системы (3.1)–(3.2), матрицы $U_1(x,t,\lambda)$ и $V_1(x,t,\lambda)$ удовлетворяют условию нулевой кривизны

$$U_{1t} - V_{1x} + [U_1, V_1] = 0. \tag{3.5}$$

Перепишем уравнение (3.5) в компонентах U_1, V_1 пары:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \lambda \\ m\lambda + \rho^2\lambda^3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_t - \begin{pmatrix} \frac{u+u_x}{2} - \frac{1}{4\lambda^2} & \frac{1}{2\lambda} - u\lambda \\ \frac{m+u_x+u_{xx}}{2\lambda} - um\lambda + \frac{\lambda\rho^2}{2} - \lambda^3 u\rho^2 & \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{u+u_x}{2} \end{pmatrix}_x - \\ - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\lambda} - u\lambda \\ -\frac{m+u_x+u_{xx}}{2\lambda} + um\lambda - \frac{\lambda\rho^2}{2} + \lambda^3 u\rho^2 & 0 \end{pmatrix} - \\ - \left(u + u_x - \frac{1}{2\lambda^2}\right)\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda m - \lambda^3\rho^2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{u_x+u_{xx}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{u_x+u_{xx}}{2} \end{pmatrix} = 0.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Приравнивая соответствующие элементы вторых строк и первых столбцов матриц в уравнении (3.6), получим

$$\begin{gathered}\lambda m_t + 2\lambda^3\rho\rho_t - \frac{m_x + u_{xx} + u_{xxx}}{2\lambda} + (um)_x\lambda - \lambda\rho\rho_x + \\ + 2u\rho\rho_x\lambda^3 + u_x\rho^2\lambda^3 + \frac{m + u_x + u_{xx}}{2\lambda} - um\lambda + \\ + \frac{\lambda\rho^2}{2} - \lambda^3 u\rho^2 + \left(u + u_x - \frac{1}{2\lambda^2}\right)\left(\lambda m + \lambda^3\rho^2\right) = 0.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Остальные элементы будут тождественно равны нулю.

Коэффициенты при λ в уравнении (3.7) будут такими же, как первое уравнение двухкомпонентного УКХ – уравнение (2.1)

$$m_t + 2u_x m + u m_x - \rho\rho_x = 0,$$

коэффициенты при степени λ^3 эквивалентны второму уравнению двухкомпонентного УКХ – уравнению (2.2)

$$\rho_t + (u\rho)_x = 0,$$

а коэффиценты при степени λ^{-1} эквивалентны уравнению

$$m = u - u_{xx} + C,$$

где C — интегральная постоянная. □

4. Обобщенное уравнение ферромагнетика Гейзенберга

В данном пункте приведем один из интегрируемых обобщенных уравнений ферромагнетика Гейзенберга (спиновую систему), который имеет вид

$$[A, A_{xt} + (uA_x)_x] - \frac{1}{\beta^2}A_x - 4\beta\rho\rho_x Z = 0. \tag{4.1}$$

Здесь действительные функции $u(x,t)$ и $\rho(x,t)$ выражаются через 2×2 матричную функцию $A(x,t)$ следующим образом:

$$u = 0.25\beta^{-2}(1-\partial_x^2)^{-1}\det(A_x^2), \tag{4.2}$$

$$\rho^2 = -\frac{tr(A_x^2) + 2det(A_x)}{8\beta^4}, \tag{4.3}$$

где $\beta = const$ и

$$Z = \frac{0.5\beta}{u_x + u_{xx}}[A, A_t + (u - 0.5\beta^{-2})A_x]. \tag{4.4}$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} A_3 & A^- \\ A^+ & -A_3 \end{pmatrix}$ является матричным аналогом трехкомпонентного спинового вектора (или вектора намагниченности) $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ с единичной длиной $\mathbf{A}^2 = 1$. А в терминах элементов матрицы $A: A^{\pm} = A_1 \pm iA_2, \quad A^2 = I$, где $I = diag(1,1)$.

Обобщенное уравнение ферромагнетика Гейзенберга (4.1) вкратце назовем уравнением Мырзакулова-CVI (УМ-CVI) (в честь его автора), по аналогии работ [8]-[9].

Представление Лакса, соответствующее уравнению М-CVI, выглядит следующим образом

$$\Psi_x = U_2\Psi, \tag{4.5}$$

$$\Psi_s = V_2\Psi, \tag{4.6}$$

где

$$U_2 = \left(\frac{\lambda}{4\beta} - \frac{1}{4}\right)[A, A_x] + (\lambda^3 - \beta^2\lambda)\rho^2 Z, \tag{4.7}$$

$$V_2 = \left(\frac{1}{4\beta^2} - \frac{1}{4\lambda^2}\right)A + \frac{u}{4}\left(\frac{\beta}{\lambda} - \frac{\lambda}{\beta}\right)[A, A_x] + \left(\frac{\beta}{4\lambda} - \frac{1}{4}\right)[A, A_t] + v\rho^2 Z, \tag{4.8}$$

здесь $v = \lambda(0.5 + \beta^2 u) - \lambda^3 u - 0.5\beta^2\lambda^{-1}$.

5. Калибровочная эквивалентность двухкомпонентного УКХ и УМ-CVI

В данном пункте установлена калибровочная связь между двухкомпонентным УКХ и УМ-CVI.

Теорема 5.1. *Двухкомпонентное УКХ (2.1)–(2.2) с матричным представлением Лакса (3.1)–(3.2) и спиновая система (4.1) с представлением Лакса (4.5)–(4.6) являются калибровочно эквивиалентными между собой.*

Доказательство. Исходя из классической теории калибровочной эквивалентности (см. например [10]), доказательство теоремы 5.1 начнем с преобразования

$$\Psi = g^{-1}\Phi, \quad g = \Phi|_{\lambda=\beta},$$

где $\Psi(\lambda; x, t)$ является решением системы, соответствущей УМ-CVI (4.1), $\Phi(\lambda; x, t)$ – решением системы, соответствущей двухкомпонентному УКХ (2.1)–(2.2) , а $g(x, t)$ – произвольная 2×2 матричная функция, которая является решением системы (3.1)–(3.2) при $\lambda = \beta$.

Производная от вектор-функции Ψ по x равна

$$\Psi_x = \left(g^{-1}\Phi\right)_x = g^{-1}\Phi_x - g^{-1}g_x g^{-1}\Phi = g^{-1}\left(U_1 - g_x g^{-1}\right)\Phi =$$
$$= \left[(\lambda-\beta)\, g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 0 \end{pmatrix} g + \left(\lambda^3 - \beta^3\right)\rho^2 g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g\right]\Psi. \tag{5.1}$$

Введем обозначение [10]

$$A = g^{-1}\sigma_3 g, \tag{5.2}$$

где $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – матрица Паули. Из (5.2) получим, что

$$A_x = \left(g^{-1}\sigma_3 g\right)_x = g^{-1}\left[\sigma_3, g_x g^{-1}\right] g = 2g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta m - \beta^3\rho^2 & 0 \end{pmatrix} g. \tag{5.3}$$

Также имеем

$$[A, A_x] = 4g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta m + \beta^3\rho^2 & 0 \end{pmatrix} g, \tag{5.4}$$

и

$$g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 0 \end{pmatrix} g = \frac{1}{4\beta}[A, A_x] - \beta^2\rho^2 Z. \tag{5.5}$$

С учетом (5.4) и (5.5), из (5.1) находим, что

$$U_2 = \left(\frac{\lambda}{4\beta} - \frac{1}{4}\right)[A, A_x] + \left(\lambda^3 - \beta^2\lambda\right)\rho^2 Z, \tag{5.6}$$

где $Z = g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g$.

Таким образом, мы выразили через спиновую матрицу A искомую 2×2-матрицу U_2, которая является коэффициентом уравнения (4.5).

Далее, чтобы восстановить коэффициент уравнения (4.5), берем производную от Ψ по t:

$$\Psi_t = \left(g^{-1}\Phi\right)_t = g^{-1}\Phi_t - g^{-1}g_t g^{-1}\Phi = g^{-1}\left(V_1 - g_t g^{-1}\right)\Phi =$$
$$= \left(\frac{1}{4\beta^2} - \frac{1}{4\lambda^2}\right)A + \left[\frac{1}{8\beta\lambda} - \frac{1}{8\beta^2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4\beta}\right)u\right][A, A_x] + \tag{5.7}$$
$$+ \left[-\frac{\beta^2\rho^2}{2\lambda} + \lambda u\beta^2\rho^2 + \left(\frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\beta}\right)(u_x + u_{xx}) + \frac{\lambda\rho^2}{2} - \lambda^3 u\rho^2\right] Z.$$

Также имеем, что

$$A_t = g^{-1}\left[\sigma_3, g_t g^{-1}\right] g = 2g^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\beta} - u\beta \\ -\frac{m+u_x+u_{xx}}{2\beta} + um\beta - \frac{\rho^2\beta}{2} + \beta^3 u\rho^2 & 0 \end{pmatrix} g, \tag{5.8}$$

и

$$[A, A_t] = \left(\frac{1}{2\beta^2} - u\right)[A, A_x] + \frac{2}{\beta}(u_x + u_{xx})Z. \tag{5.9}$$

С учетом (5.8) и (5.9), из (5.7) находим, что V_2 выражается через A в виде

$$V_2 = \left(\frac{1}{4\beta^2} - \frac{1}{4\lambda^2}\right)A + \left[\left(\frac{\beta}{4\lambda} - \frac{\lambda}{4\beta}\right)u - \frac{1}{8\beta\lambda} + \frac{1}{8\beta^2}\right][A, A_x] +$$

$$+\left(\frac{\beta}{4\lambda} - \frac{1}{4}\right)[A, A_t] + \rho^2\vartheta Z, \tag{5.10}$$

где $\vartheta = \frac{\lambda}{2} - \lambda^3 u - \frac{\beta^2}{2\lambda} + \lambda\beta^2 u$. Таким образом, получен коэффициент уравнения (4.6). Теперь нетрудно убедиться, что условие нулевой кривизны

$$U_{2t} - V_{2x} + [U_2, V_2] = 0$$

с U_2, V_2 парами, определенными как (5.6) и (5.10), эквивалентно УМ-CVI (4.1). □

Следствие 5.1. *Если функции $u(x,t)$ и $\rho(x,t)$ являются решениями двухкомпонентного УКХ (2.1)–(2.2), а матричная функция A является решением УМ-CVI (4.1), тогда их связь выражается в виде (4.2) и (4.3).*

6. Заключение

В данной работе предложена матричная форма представления Лакса для двухкомпонентного УКХ в симметрическом пространстве $\mathfrak{su}(n+1)/\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1)\oplus\mathfrak{u}(n))$ для случая $n=2$. Такого вида представление Лакса расширяет возможности исследования рассматриваемого нами уравнения. В частности, используя матричный вид представления Лакса для УКХ, нами установлена калибровочная эквивалентность этого уравнения к УМ-CVI, и представлена связь между их решениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Myrzakul, R. Myrzakulov *Integrable geometric flows of interacting curves/surfaces, multilayer spin systems and the vector nonlinear Schrodinger equation* // Int. Jour. Geom. Meth. Mod. Phys. **14**:10, 1750136 (2017).
2. G. Nugmanova, A. Myrzakul *Integrability of the Two-Layer Spin System.* // Geom., Integr. and Quant., Proc. XXth Int. Conf., Ed. by I. Mladenov. Sofia, 208–214 (2019).
3. R. Camassa, D.D. Holm *An Integrable Shallow Water Equation with Peaked Solitons* // Phys. Rev. Lett. **71**:11, 1661–1664 (1993).
4. R. Camassa, D. D. Holm, J. M. Hyman *A New Integrable Shallow Water Equation* // Adv. Appl. Mech, **31**:1, 1–33 (1994).
5. A. Constantin, V. Gerdjikov, R.I. Ivanov *Inverse Scattering Transform for the Camassa-Holm equation* // Inverse Problem **22**:6, 2197–2207 (2006).
6. Балтаева И.И., Уразбоев Г.У. *Об уравнении Камасса-Холма с самосогласованными источниками* // Уфимск. Матем. Журн. **3**:2, 10–19 (2011).

7. Юй-Цинь Яо, Е-Хуэй Хуань, Юнь-Бо Цзен *Двухкомпонентное уравнение Камассы-Холма с самосогласованными источниками и его многосолитонные решения.* Теор. Мат. Физ. **162**:1, 75–86 (2010).
8. Chen Chi, Zhou Zi-Xiang *Darboux Tranformation and Exact Solutions of the Myrzakulov-I Equations* // Chin. Phys. Lett. **26**:8, 080504 (2009).
9. Chen Hai, Zhou Zi-Xiang *Darboux Transformation with a Double Spectral Parameter for the Myrzakulov-I Equation.* Chin. Phys. Lett., **31**:12, 120504 (2014).
10. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А. *Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и уравнения Ферромагнетика Гейзенберга.* Теор. Мат. Физ. **38**:1, 26–35 (1979).

Айгуль Галимжановна Тайшиева,
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Сатпаева, 2,
Z05T8G1, г. Нур-Султан, Казахстан
E-mail: `aigulustaz@gmail.com`

Толкынай Ратбайкызы Мырзакул,
Казахский национальный женский педагогический университет,
ул. Айтекеби, 99,
A15A4G6, г. Алматы, Казахстан
E-mail: `tmyrzakul@gmail.com`

Гулгасыл Нукарбаевна Нугманова,
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Сатпаева, 2,
Z05T8G1, г. Нур-Султан, Казахстан
E-mail: `nugmanovagn@gmail.com`