

КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛОГО ПОРЯДКА

А.М. АБЫЛАЕВА, А.О. БАЙАРЫСТАНОВ

Аннотация. В работе получены необходимые и достаточные условия компактности оператора

$$Kf(x) = \int_0^x \ln \frac{x}{x-s} \frac{f(s)}{s} ds$$

из $L_{p,v}$ в $L_{q,u}$ при $1 < p \leq q < \infty$ и $v(x) = x^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, где $L_{q,u}$ — совокупность всех измеримых на $(0, \infty)$ функции f , для которых конечна норма $\|uf\|_q$.

Ключевые слова: компактность, оператор дробного интегрирования бесконечно малого порядка, оператор Римана-Лиувилля, сингулярный оператор, сопряженный оператор, неравенство Гельдера, весовые неравенства.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $R_+ = (0, \infty)$, $u, v : R_+ \rightarrow R$ весовые функции, т.е. неотрицательные измеримые на R_+ функции.

Начиная 70-х годов прошлого века, в мировой математической литературе интенсивно исследуется весовая оценка вида

$$\|uKf\|_q \leq C\|vf\|_p \quad (1)$$

для различных классов операторов K , где $\|\cdot\|_p$ — обычная норма пространства $L_p \equiv L_p(R)$. Далее через $L_{p,v}$ обозначим совокупность функции $f : R_+ \rightarrow R$ с конечной нормы $\|f\|_{p,v} = \|vf\|_p$. Обзор исследований оценок вида (1) с 1970 по 1982 гг. можно найти в [1]. Некоторые направления исследований оценок вида (1), сделанных для интегральных операторов до 2003 года, даны в монографии [2]. В работе [3] указана последовательность классов неотрицательных функции $K(\cdot, \cdot)$ и дано полное описание весов u и v , при которых для интегрального оператора

$$Kf(x) = \int_0^x K(x,s)f(s)ds \quad (2)$$

справедлива оценка (1) при принадлежности его ядра к этим классам. Однако эти результаты не охватывают оператора вида (2) в случае, когда ядро $K(\cdot, \cdot)$ имеет сингулярность, например, оператор Римана-Лиувилля

$$R_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}}, \quad (3)$$

А.М. АБЫЛАЕВА, А.О. БАЙАРЫСТАНОВ, COMPACTNESS CRITERION FOR FRACTIONAL INTEGRATION OPERATOR OF INFINITESIMAL ORDER.

© АБЫЛАЕВА А.М., БАЙАРЫСТАНОВ А.О. 2013.

Поступила 23 декабря 2011 г.

при $0 < \alpha < 1$. Оценка вида (1) для оператора (3) в общем случае остается открытой. Но исследованы следующие случаи: $u \equiv v$ в [4], $v \equiv 1$ в [5, 6] и случай невозрастания одной из весовых функций u, v в [7].

Оператор вида

$$Kf(x) = \int_0^x \ln \frac{x}{x-s} \frac{f(s)}{s} ds \quad (4)$$

называется оператором дробного интегрирования бесконечно малого порядка (см. [8], стр. 34).

В [9] исследована оценка (1) для оператора (4) в случае, когда $v(x) = x^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Эта оценка равносильна оценке

$$\|uT_\gamma f\|_q \leq C \|f\|_p \quad (5)$$

для оператора

$$T_\gamma f(x) = \int_0^x s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} f(s) ds.$$

Так как

$$\ln \frac{x}{x-s} = \int_0^s \frac{dt}{x-t} \quad \text{при } x > s \geq 0,$$

то имеет место неравенство

$$\frac{s}{x-s} > \ln \frac{x}{x-s} > \frac{s}{x}, \quad x > s > 0. \quad (6)$$

Функция $\ln \frac{x}{x-s}$ убывает по x и возрастает по s при $x > s \geq 0$, а функции $x \ln \frac{x}{x-s}$, $\frac{1}{s} \ln \frac{x}{x-s}$ убывают по x и возрастают по s при $x > s > 0$. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x \ln \frac{x}{x-s} \right) = \ln \frac{x}{x-s} - \frac{s}{x-s} < 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \ln \frac{x}{x-s} \right) = \frac{1}{s^2} \left(\frac{s}{x-s} - \ln \frac{x}{x-s} \right) > 0$$

при $x > s > 0$. Отметим, что для дифференцируемой функции f оценка (1) для оператора (4) эквивалентна неравенству

$$\left(\int_0^\infty \left| u(x) \int_0^x \frac{f(x) - f(s)}{x-s} ds \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty |f'(x) x^{1-\gamma}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (7)$$

В работе принимаются следующие соглашения. Неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ полагаются равными нулю. Неравенство вида $A \leq \beta B$, где положительная постоянная β , быть может, зависит от параметров p, q и γ , будем писать в виде $A \ll B$, а соотношение $A \approx B$ будет означать $A \ll B \ll A$.

$\chi_{(a,b)}(\cdot)$ — характеристическая функция интервала (a, b) , Z — множества целых чисел.

В работе [9] получены критерии ограниченности оператора T_γ и сопряженного к нему оператора

$$T_\gamma^* g(s) = s^{\gamma-1} \int_s^\infty g(x) \ln \frac{x}{x-s} dx, \quad (8)$$

из L_p в $L_{q,u}$.

В частности доказаны следующие теоремы.

Теорема А. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$. Оператор T_γ ограничен из L_p в $L_{q,u}$ тогда и только тогда, когда

$$D_\gamma = \sup_{x>0} D_\gamma(x) < \infty, \quad \text{где } D_\gamma(x) = x^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_x^\infty t^{-q} u(t) dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

При этом $\|T_\gamma\| \approx D_\gamma$.

Теорема В. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma > 1 - \frac{1}{q}$. Тогда оператор T_γ^* ограничен из $L_{p,v}$ в L_q тогда и только тогда, когда

$$D_\gamma^* = \sup_{x>0} D_\gamma^*(x) \equiv \sup_{x>0} x^{\gamma+\frac{1}{q}} \left(\int_x^\infty t^{-p'} v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

При этом $\|T_\gamma^*\| \approx D_\gamma^*$.

В настоящей работе мы исследуем вопросы компактности оператора T_γ из L_p в $L_{q,u}$.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$. Оператор T_γ компактен из L_p в $L_{q,u}$ тогда и только тогда, когда $D_\gamma < \infty$ и

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_\gamma(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} D_\gamma(x) = 0. \quad (9)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть T_γ есть компактный оператор из L_p в $L_{q,u}$. На основании теоремы А, $D_\gamma < \infty$.

Теперь докажем выполнение условий (9). Для $0 < s < \infty$ рассмотрим семейство функций

$$f_s(x) = \chi_{(0,s)}(x) s^{-\frac{1}{p}}, \quad x > 0, \quad (10)$$

с нормой

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_0^\infty |f_s(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^s s^{-1} dx \right)^{\frac{1}{p}} = s^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^s dx \right)^{\frac{1}{p}} = 1. \quad (11)$$

Покажем, что семейство функции (10) слабо сходится к нулю в L_p . В силу теоремы [10] об общем виде линейных непрерывных функционалов в лебеговом пространстве, линейный непрерывный функционал в L_p имеет вид:

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx, \quad \text{где } g \in L_{p'}.$$

Используя неравенство Гельдера, выводим:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_s(x)g(x)dx &= \int_0^s s^{-\frac{1}{p}}g(x)dx \leq \\ &\leq s^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^s dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^s |g(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_0^s |g(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для любого $g \in L_{p'}$ последний интеграл в (12) стремится к нулю при $s \rightarrow 0$, что означает слабую сходимость $f_s \rightarrow 0$ в L_p при $s \rightarrow 0$. Тогда по свойству компактных операторов в банаховом пространстве

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|T_\gamma f_s\|_{q,u} = 0. \quad (13)$$

Поскольку, $\ln \frac{x}{x-t} \geq \frac{t}{x}$ при $0 < t < x$, то

$$\begin{aligned} \|T_\gamma f_s\|_{q,u} &= \left(\int_0^\infty u(x) \left| \int_0^x t^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-t} f_s(t) dt \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \geq \\ &\geq \left(\int_s^\infty u(x) \left| \int_0^s t^{\gamma-1} s^{-\frac{1}{p}} \ln \frac{x}{x-t} dt \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \geq \\ &\geq s^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^s t^\gamma dt \right) \left(\int_s^\infty x^{-q} u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{\gamma+1} D_\gamma(s). \end{aligned} \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует, что $\lim_{s \rightarrow 0} D_\gamma(s) = 0$, т.е. выполнено первое соотношение (9). Покажем второе соотношение (9). Из компактности оператора T_γ следует компактность сопряженного оператора T_γ^* (8) из $L_{q',u^{1-q'}}$ в $L_{p'}$. Для $0 < s < \infty$ введем семейство функций

$$g_s(x) = \chi_{(s,\infty)}(x) \left(\int_s^\infty t^{-q} u(t) dt \right)^{-\frac{1}{q'}} u(x) x^{1-q}. \quad (15)$$

Из условия $D_\gamma < \infty$ следует сходимость интеграла в (15). Покажем, что для любого $s > 0$ функция $g_s \in L_{q',u^{1-q'}}$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \|g_s\|_{q',u^{1-q'}} &= \left(\int_0^\infty |g_s x|^{q'} u^{1-q'}(x) dx \right)^{\frac{1}{q'}} = \\ &= \left(\int_s^\infty t^{-q} u(t) dt \right)^{-\frac{1}{q'}} \left(\int_s^\infty (u(x) x^{1-q})^{q'} u^{1-q'}(x) dx \right)^{\frac{1}{q'}} = 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Для всех $f \in L_{q,u}$, в силу (16)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g_s(x) f(x) dx &= \int_s^\infty g_s(x) f(x) dx \leq \left(\int_s^\infty |g_s(x)|^{q'} u^{1-q'}(x) dx \right)^{\frac{1}{q'}} \times \\ &\times \left(\int_s^\infty |f(x)|^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_s^\infty |f(x)|^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Предельный переход в последнем неравенстве при $s \rightarrow \infty$ показывает, что $g_s \rightarrow 0$, слабо в $L_{q',u^{1-q'}}$ при $s \rightarrow \infty$. Тогда $T_\gamma^* g_s$ (в силу компактности T_γ^*) сходится к нулю при $s \rightarrow \infty$ по норме $L_{p'}$, т.е.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|T_\gamma^* g_s\|_{p'} = 0. \quad (17)$$

Из оценки

$$\begin{aligned} \|T_\gamma^* g_s\|_{p'} &= \left(\int_0^\infty \left| t^{\gamma-1} \int_t^\infty g_s(x) \ln \frac{x}{x-t} dx \right|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \geq \\ &\geq \left(\int_0^s t^{p'(\gamma-1)} \left(\int_s^\infty \frac{u(x)}{x^{q-1}} \ln \frac{x}{x-t} dx \right)^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_s^\infty x^{-q} u(x) dx \right)^{-\frac{1}{q'}} \geq \end{aligned}$$

(опять используем неравенство $\ln \frac{x}{x-t} \geq \frac{t}{x}$)

$$\geq \left(\int_s^\infty x^{-q} u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^s t^{p'(\gamma-1)} t^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\frac{1}{p'\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{p'}} D_\gamma(s).$$

Откуда и из (17) получаем справедливость второго соотношения в (9). Утверждение теоремы в необходимую сторону доказано полностью.

Достаточность. Пусть $0 < a < b < \infty$ и

$$P_a f = \chi_{(0,a)} f, \quad P_{ab} f = \chi_{[a,b]} f, \quad Q_b f = \chi_{[b,\infty)} f.$$

Тогда для оператора T_γ

$$T_\gamma f = P_{ab} T_\gamma P_{ab} + P_a T_\gamma P_a f + P_{ab} T_\gamma P_a f + Q_b T_\gamma f. \quad (18)$$

Покажем, что оператор $P_{ab} T_\gamma P_{ab}$ компактен из L_p в $L_{q,u}$. Так как $P_{ab} T_\gamma P_{ab} f(x) = P_{ab} T_\gamma \chi_{[a,b]}(x) f(x) = 0$, при $x \notin [a, b]$, то достаточно показать, что оператор $P_{ab} T_\gamma P_{ab}$ компактен из $L_p(a, b)$ в $L_{q,u}(a, b)$, а это, в свою очередь, эквивалентно компактности из $L_p(a, b)$ в $L_q(a, b)$ оператора $Tf(x) = \int_a^b K(x, s) f(s) ds$ с ядром $K(x, s) = u^{\frac{1}{q}}(x) \chi_{(a,b)}(x-s) s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s}$, который, в силу локальной суммируемости функции u , удовлетворяет условию

$$\int_a^b \left(\int_a^b |K(x, s)|^{p'} ds \right)^{\frac{q}{p'}} dx = \int_a^b u(x) \left(\int_a^x \left(s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} \right)^{p'} ds \right)^{\frac{q}{p'}} \leq$$

(используем неравенство $\frac{s}{x-s} \geq \ln \frac{x}{x-s}$ при $x > s > 0$)

$$\leq \int_a^b u(x) \left(\int_a^x s^{p'\gamma} \left(\frac{1}{x-s} \right)^{p'} ds \right)^{\frac{q}{p'}} \leq \left(\int_a^b s^{p'\gamma} ds \right)^{\frac{q}{p'}} \int_a^b u(x) x^{-q} dx < \infty.$$

Следовательно, по признаку Кантаровича [10], оператор T_γ компактен из $L_p(a, b)$ в $L_{q,u}(a, b)$, что равносильно компактности из L_p в $L_{q,u}$ оператора $P_{ab} T_\gamma P_{ab}$. Из (18) имеем

$$\|T_\gamma - P_{ab} T_\gamma P_{ab}\| \leq \|P_a T_\gamma P_a\| + \|P_{ab} T_\gamma P_a\| + \|Q_b T_\gamma\|. \quad (19)$$

Покажем, что правая часть (19) стремится к нулю при $a \rightarrow 0$ и $b \rightarrow \infty$, тогда оператор T_γ как равномерный предел компактных операторов ([11], VI.12) будет компактным из L_p в $L_{q,u}$.

Пусть $u_a = P_a u$, тогда на основании Теоремы А имеем:

$$\|P_a T_\gamma P_a f\|_{q,u_a} \leq \|P_a T_\gamma f\|_{q,u_a} = \left(\int_0^\infty u_a(x) \left| \int_0^x s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} f(s) ds \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \sup_{z>0} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_z^\infty u_a(x)x^{-q}dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|P_a T_\gamma P_a\| &\ll \sup_{z>0} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_z^\infty u_a(x)x^{-q}dx \right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{0<z<a} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_z^a u(x)x^{-q}dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq \sup_{0<z<a} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_z^\infty u(x)x^{-q}dx \right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{0<z<a} D_\gamma(z). \end{aligned}$$

Откуда

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|P_a T_\gamma P_a\| \ll \overline{\lim}_{z \rightarrow 0} D_\gamma(z) = \lim_{z \rightarrow 0} D_\gamma(z) = 0. \quad (20)$$

Оценка $\|P_{ab} T_\gamma P_a\|$:

$$\begin{aligned} \|P_{ab} T_\gamma P_a f\|_{q,u} &= \left(\int_a^b u(x) \left| \int_0^x s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} (P_a f)(s) ds \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq \left(\int_a^\infty u(x) \left(\int_0^a s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} |f(s)| ds \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \end{aligned}$$

(используем неравенство Гельдера и свойство функции $x \ln \frac{x}{x-s}$)

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_a^\infty u(x) \left(\int_0^a \left| s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} \right|^{p'} ds \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^a |f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\int_a^\infty u(x)x^{-q} \left(\int_0^a \left| s^{\gamma-1} x \ln \frac{x}{x-s} \right|^{p'} ds \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p \leq \\ &\leq \left(\int_a^\infty u(x)x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^a \left| s^{\gamma-1} a \ln \frac{a}{a-s} \right|^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p \leq \\ &\leq (\beta_p)^{\frac{1}{p'}} a^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_a^\infty u(x)x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p \leq (\beta_p)^{\frac{1}{p'}} D_\gamma(a) \|f\|_p, \end{aligned}$$

где $\beta_p = \int_0^1 \left| s^{\gamma-1} \ln \frac{1}{1-s} \right|^{p'} ds \leq \ln^{p'} 2 \int_0^{\frac{1}{2}} s^{p'(\gamma-1)} ds + \max\{1, 2^{-p'(\gamma-1)}\} \int_{\ln 2}^\infty t^{p'} e^{-t} dt$.

Откуда $\|P_{ab} T_\gamma P_a\| \ll D_\gamma(a)$. Следовательно,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow 0} \|P_{ab} T_\gamma P_a\| \ll \lim_{a \rightarrow 0} D_\gamma(a) = 0. \quad (21)$$

Пусть $u_b = Q_b u$, тогда на основании Теоремы А получим

$$\begin{aligned} \|Q_b T_\gamma f\|_{q,u} &= \left(\int_0^\infty u_b(x) \left| \int_0^x s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} f(s) ds \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\ll \sup_{z>0} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_z^\infty u_b(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \|Q_b T_\gamma\| &\ll \sup_{z>0} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_z^\infty u_b(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \sup_{z \geq b} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_z^\infty u(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{z \geq b} D_\gamma(z). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \|Q_b T_\gamma\| \ll \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} D_\gamma(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} D_\gamma(z) = 0. \quad (22)$$

Из (19), (20), (21) и (22) следует, что правая часть (19) стремится к нулю при $a \rightarrow 0$ и $b \rightarrow \infty$. Теорема 1 доказана.

Переходя к сопряженному оператору и применяя теорему 1, имеем

Теорема 2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma > 1 - \frac{1}{q}$. Тогда оператор (8) компактен из $L_{p,v}$ в L_q тогда и только тогда, когда

$$D_\gamma^* < \infty, \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0} D_\gamma^*(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} D_\gamma^*(x) = 0.$$

Из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 3. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, и $v(x) = x^{-\gamma}$. Оператор дробного интегрирования бесконечно малого порядка (4) компактен из $L_{p,v}$ в $L_{q,u}$ тогда и только тогда, когда $D_\gamma < \infty$ и выполнено (9).

В случае $q < p$ имеет место

Теорема 4. Пусть $1 < q < p < \infty$, $v(x) = x^{-\gamma}$, $\gamma > \frac{1}{p}$. Оператор дробного интегрирования бесконечно малого порядка (4) компактен из $L_{p,v}$ в $L_{q,u}$ тогда и только тогда, когда

$$E_\gamma = \left(\int_0^\infty \left[\left(\int_x^\infty \frac{u(t)}{t^q} dt \right)^{\frac{1}{q}} x^{\gamma+\frac{1}{p'}} \right]^{\frac{pq}{p-q}} dx \right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty.$$

Справедливость утверждения Теоремы 2 непосредственно следует из Теоремы 2 работы [9], так как по теореме Андо ([12], § 5), при $1 < q < p < \infty$ всякий ограниченный интегральный оператор из L_p в $L_{q,u}$ является компактным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дынькин Е.М., Осиленкер Б.П. *Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения* // Математический анализ. Т. 21 (Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР). М. 1983, С. 42–129.
2. A. Kufner, L-E. Persson *Weighted inequalities of Hardy type*. World Scientific, New Jersey, 2003.
3. Ойнаров Р. *Ограниченность и компактность интегральных операторов вольтеревского типа* // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, №5. С. 1100–1115.
4. K.F. Andersen, E.T. Sawyer *Weighted norm inequalities for the Riemann - Liouville and Weyl fractional integral operators*// Trans.Amer.Math.Soc.1988, V. 308, № 2. P. 547–557.
5. D.V. Prokhorov *On the boundedness and compactness of a class of integral operators* // J.London Math. Soc. 2000. V. 61, № 2. P. 617–628.
6. A. Meskhi *Solution of some weight problems for the Riemann - Liouville and Weil operators* // Georgian Math.J. 1998. № 5. P. 565–574.
7. Прохоров Д.В., Степанов В.Д. *Операторы Риммана–Лиувилля* // Доклады РАН. 2002, Т. 382, № 4. С. 452–455.
8. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высшая школа, 1995.
9. Абылаева А.М., Омирбек М.Ж. *Весовая оценка для интегрального оператора с логарифмической особенностью* // Известия, серия физико-математическая. Алматы: НАН РК, 2005. № 1. С. 38–47.
10. Кантарович Л.В., Акилов Г.Р. *Функциональный анализ*. М.: Наука. 1977.
11. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики*. Т. 1. М.: Мир. 1977.
12. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функции*. М.: Наука. 1966.

Абылаева Акбота Мухамедияровна,
Евразийский Национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Мунайтпасова 5,
473021, г. Астана, Казахстан
E-mail: abylayeva_b@mail.ru

Байарыстанов Аскар Ойнарович,
Евразийский Национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Мунайтпасова 5,
473021, г. Астана, Казахстан
E-mail: oskar_62@mail.ru