ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 12. № 1 (2020). С. 43-55.

УДК 519.64.7

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СХОДИМОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО МЕТОДА КОЛЛОКАЦИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.И. ФЕДОТОВ

Аннотация. Среди приближенных методов решения операторных уравнений наиболее употребительными являются методы коллокаций и Галеркина. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. Так, методы Галеркина применяются для уравнений в гильбертовых пространствах, и погрешности решений, полученных этими методами, имеют порядки наилучших приближений точных решений. Однако методы Галеркина не всегда конструктивны, так как для их реализации требуется вычислять интегралы, что не всегда можно сделать явно. Методы коллокаций применяются для уравнений, заданных в пространствах непрерывных функций, и поэтому всегда конструктивны. Однако погрешности решений, полученные методами коллокаций, по порядку обычно меньше, чем порядки наилучшего приближения точного решения.

В данной работе для одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений на отрезке обоснован полиномиальный метод коллокации. Для обоснования впервые для таких уравнений была применена методика сведения обоснования метода коллокаций к обоснованию метода Галеркина. Для периодического случая такая методика была впервые использована автором для обоснования метода коллокаций для сингулярных интегро-дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений. Для уравнений, заданных на разомкнутом контуре, эта методика использована впервые. Кроме того, впервые доказана ограниченность нормы интерполяционного оператора Лагранжа в пространствах Соболева H_q^s, $s > 1/2$, с весом Чебышева второго рода. Именно этот результат позволил показать, что и для уравнений в непериодическом случае полиномиальный метод коллокаций обеспечивает такую же скорость сходимости, что и метод Галеркина.

Ключевые слова: сингулярные интергро-дифференциальные уравнения, обоснование приближенных методов.

Mathematics Subject Classification: 65R20

1. Введение

Арнольд и Венланд предложили в [1] оригинальную методику обоснования метода сплайн-коллокаций для периодических псевдодифференциальных уравнений в пространствах Соболева. Обоснование основано на эквивалентности метода сплайн-коллокаций и модифицированного метода Галеркина-Петрова и обосновании последнего путем сведения его к стандартному методу Галеркина. В работах [2]–[6] этот подход был использован для обоснования метода сплайн-коллокации для различных классов сингулярных интегральных и псевдодифференциальных уравнений. Было показано, что сильная эллиптичность

A.I. Fedotov, On asymptotic convergence of polynomial collocation method for one class of singular integro-differential equations.

Поступила 24 июня 2019 г.

является достаточным, а в некоторых случаях (см. [7],[8]) и необходимым условием сходимости метода сплайн-коллокаций.

В работе [9] автором был обоснован полиномиальный метод коллокаций для широкого класса сингулярных интегро-дифференциальных, периодических псевдодифференциальных и систем псевдодифференциальных уравнений в пространствах Соболева. Результаты этой работы показывают, что полиномиальный метод коллокаций сходится для более широкого класса сингулярных уравнений, чем метод сплайн-коллокаций. А именно, показано, что полиномиальный метод коллокаций сходится для всех эллиптических, а не только сильно эллиптических уравнений. Более того, скорость сходимости полиномиального метода коллокаций возрастает с ростом гладкости точного решения неограниченно, в то время как рост скорости сходимости метода сплайн-коллокаций ограничен порядком используемых сплайнов.

В данной работе методика работы [9] использована для обоснования метода полиномиальной коллокации для сингулярного интегро-дифференциального уравнения в непериодическом случае. Доказана сходимость метода, получены оценки погрешности приближенных решений.

2. Постановка задачи

Рассмотрим сингулярное интегро-дифференциальное уравнение

$$x'(t) + \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t)} = y(t), \quad |\, t\,| < 1, \tag{1}$$

с условием

$$\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0. \tag{2}$$

Здесь x – искомая, а y – известные функции, заданные на интервале отрезке $[-1,1]$ и интервале $(-1,1)$ соответственно, λ – данное действительное число, а сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши–Лебегу.

3. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены три леммы, необходимые для дальнейшего изложения. Доказательство первой леммы имеется, например, в [10], второй – в [11]. Результаты третьей леммы являются новыми, поэтому она приведена с доказательством.

Лемма 1. *Обозначим D и V линейные операторы, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Y. Предположим, что оператор D обратим, и выполнено условие $\|V\|_{X\to Y}\|D^{-1}\|_{Y\to X} < 1$. Тогда оператор $D+V : X \to Y$ также обратим, и справедлива оценка*

$$\|(D+V)^{-1}\|_{Y\to X} \leqslant \frac{\|D^{-1}\|_{Y\to X}}{1-\|V\|_{X\to Y}\|D^{-1}\|_{Y\to X}}.$$

Вновь обозначим X и Y банаховы пространства, и пусть $X_n \subset X$, $Y_n \subset Y$, $n = 1,2,...$, их подпространства. Рассмотрим уравнения

$$Kx = y,\ K : X \to Y, \tag{3}$$

$$K_n x_n = y_n,\ K_n : X_n \to Y_n,\ n = 1,2,..., \tag{4}$$

где K и K_n, $n = 1,2,...$, линейные ограниченные операторы.

Лемма 2. *Предположим, что оператор $K : X \to Y$ обратим, и операторы K_n, $n = 1, 2, ...,$ равномерно сходятся к нему*

$$\|K - K_n\|_{X_n \to Y} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Если $\dim X_n = \dim Y_n$, $n = 1, 2, ...,$ *то для всех n, удовлетворяющих условию*

$$q_n = \|K^{-1}\|_{Y \to X} \|K - K_n\|_{X_n \to Y} < 1,$$

приближенные уравнения (4) имеют единственные решения $x_n^* \in X_n$ для любых правых частей $y_n \in Y_n$, и верна оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \frac{\|K^{-1}\|_{Y \to X}}{1 - q_n} (\|y - y_n\|_Y + q_n \|y\|_Y),$$

где $x^* = K^{-1} y$ – точное решение уравнения (3).

В дальнейшем будем, как обычно, обозначать $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0$ множество натуральных чисел, дополненных нулем, а $\mathbb{R}$ множество действительных чисел.

Обозначим $T_l(t) = \cos(l \arccos t)$, $l \in \mathbb{N}_0$, $t \in [-1, 1]$, систему полиномов Чебышева первого рода ортогональных на $[-1, 1]$ с весом $p(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$, $t \in [-1, 1]$.

Обозначим

$$U_l(t) = \frac{\sin((l + 1) \arccos t)}{\sin(\arccos t)}, \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [-1, 1],$$

систему полиномов Чебышева второго рода ортогональных на $[-1, 1]$ с весом $q(t) = (1 - t^2)^{1/2}$, $t \in [-1, 1]$.

Обозначим H_p^{s+1} пространство Соболева порядка $s + 1 \in \mathbb{R}$ с весом p, т.е. замыкание множества всех гладких действительнозначных функций, определенных на отрезке $[-1, 1]$, относительно нормы

$$\|x\|_{H_p^{s+1}} = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \underline{l}^{2(s+1)} \widehat{x}^2(l) \right\}^{1/2}, \ \underline{l} = \begin{cases} l, & l \in \mathbb{N}, \\ 1, & l = 0, \end{cases} \tag{5}$$

а

$$\widehat{x}(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} p(\tau) x(\tau) d\tau, \qquad \widehat{x}(l) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} p(\tau) x(\tau) T_l(\tau) d\tau, \ l \in \mathbb{N},$$

коэффициенты Фурье функции x по системе полиномов $\{T_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$. В пространстве H_p^{s+1} определим скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle_{H_p^{s+1}} = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \underline{l}^{2(s+1)} \widehat{f}(l) \widehat{g}(l), \ f, g \in H_p^{s+1}.$$

С введенным скалярным произведением постранство H_p^{s+1} становится гильбертовым пространством, причем норма (5) выражается через скалярное произведение

$$\|x\|_{H_p^{s+1}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{H_p^{s+1}}}, \ x \in H_p^{s+1}.$$

Обозначим H_q^s пространство Соболева порядка $s \in \mathbb{R}$ с весом q, т.е. замыкание множества всех гладких действительнозначных функций, определенных на интервале $(-1, 1)$ относительно нормы

$$\|y\|_{H_q^s} = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} (l + 1)^{2s} \widehat{y}^2(l) \right\}^{1/2}, \tag{6}$$

где

$$\widehat{y}(l) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} q(\tau) y(\tau) U_l(\tau) d\tau, \ l \in \mathbb{N}_0,$$

коэффициенты Фурье функции y по системе полиномов $\{U_l\}_{l\in\mathbb{N}_0}$. В пространстве H_q^s также определим скалярное произведение

$$\langle f,g\rangle_{H_q^s}=\sum_{l\in\mathbb{N}_0}(l+1)^{2s}\widehat{f}(l)\widehat{g}(l),\ f,g\in H_q^s.$$

С введенным скалярным произведением пространство H_q^s становится гильбертовым пространством, а норма (6) выражается через это скалярное произведение

$$\|y\|_{H_q^s}=\sqrt{\langle y,y\rangle_{H_q^s}},\ y\in H_q^s.$$

Всюду в дальнейшем будем полагать выполненным условие $s>1/2$, при котором (см., напр., [13]) пространство H_q^s вкладывается в пространство непрерывных функций, а пространство H_p^{s+1} вкладывается в пространство функций, первая производная которых непрерывна.

Зафиксируем $n\in\mathbb{N}_0$ и обозначим

$$(P_ny)(t)=\sum_{k=0}^{n}y(t_k)\xi_k(t),\ t\in[-1,1], \tag{7}$$

интерполяционный полином Лагранжа функции $y\in H_q^s$ по узлам

$$t_k=\cos\frac{\pi(k+1)}{n+2},\ k=0,1,...,n. \tag{8}$$

Здесь

$$\xi_k(t)=\frac{U_{n+1}(t)}{(t-t_k)U'_{n+1}(t_k)},\ k=0,1,...,n,\ t\in[-1,1],$$

– фундаментальные полиномы, соответствующие узлам (8). В [14] автором доказана ограниченность нормы оператора Лагранжа в паре пространств Соболева (H_p^s,H_p^s), $s>1/2$. Следующая лемма устанавливает ограниченность нормы оператора Лагранжа P_n в паре пространств Соболева (H_q^s,H_q^s), $s>1/2$.

Лемма 3. *Для любых $n\in\mathbb{N}_0$ и $s\in\mathbb{R}$, $s>1/2$, справедлива оценка*

$$\|P_n\|_{H_q^s\to H_q^s}<\sqrt{1+\zeta(2s)},$$

где $\zeta(t)=\sum_{j=1}^{\infty}j^{-t}$ – дзета-функция Римана, ограниченная и убывающая при $t>1$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $y\in H_q^s$, $s>1/2$. Используя равенство

$$U'_{n+1}(t)=\frac{tU_{n+1}(t)-(n+2)T_{n+2}(t)}{1-t^2},\ n\in\mathbb{N}_0,\ t\in[-1,1], \tag{9}$$

и известное (см., напр., [12]) соотношение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{q(\tau)U_{n+1}(\tau)d\tau}{\tau-t}=-T_{n+2}(t),\ n\in\mathbb{N}_0,\ t\in[-1,1], \tag{10}$$

вычислим коэффициенты Фурье полинома (7).

При $0\leqslant l\leqslant n$ получим

$$\begin{aligned}(\widehat{P_ny})(l)&=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}q(\tau)(P_ny)(\tau)U_l(\tau)d\tau=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}q(\tau)\sum_{k=0}^{n}y(t_k)\frac{U_{n+1}(\tau)U_l(\tau)d\tau}{(\tau-t_k)U'_{n+1}(t_k)}\\&=\sum_{k=0}^{n}y(t_k)\left(\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{q(\tau)U_{n+1}(\tau)(U_l(\tau)-U_l(t_k))d\tau}{(\tau-t_k)U'_{n+1}(t_k)}\right.\\&\qquad\left.+\frac{2}{\pi}U_l(t_k)\int_{-1}^{1}\frac{q(\tau)U_{n+1}(\tau)d\tau}{(\tau-t_k)U'_{n+1}(t_k)}\right).\end{aligned}$$

Так как полином $(U_l(\tau)-U_l(t_k))/(\tau-t_k)$, $\tau\in[-1,1]$, является полиномом степени $l-1<n+1$, то в силу ортогональности

$$\int_{-1}^{1}\frac{q(\tau)U_{n+1}(\tau)(U_l(\tau)-U_l(t_k))d\tau}{(\tau-t_k)U'_{n+1}(t_k)}=0,\ \ k=0,1,...,n.$$

Теперь, используя соотношения (9) и (10), найдем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{q(\tau)U_{n+1}(\tau)d\tau}{(\tau-t_k)U'_{n+1}(t_k)}=\frac{\sin^2\dfrac{\pi(k+1)}{n+2}}{n+2},\ \ k=0,1,...,n.$$

окончательно получим

$$(\widehat{P_ny})(l)=\frac{2}{n+2}\sum_{k=0}^{n}y(t_k)\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+2}U_l(t_k),\ \ 0\leqslant l\leqslant n. \tag{11}$$

Для остальных значений l, $n<l$, коэффициенты Фурье полинома (7) будут равны нулю. Действительно, в этом случае, учитывая, что t_k, $k=0,1,...,n$, корни полинома U_{n+1}, имеем

$$(\widehat{P_ny})(l)=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}q(\tau)(P_ny)(\tau)U_l(\tau)d\tau=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n}y(t_k)\int_{-1}^{1}\frac{q(\tau)U_{n+1}(\tau)U_l(\tau)d\tau}{(\tau-t_k)U'_{n+1}(t_k)}$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n}y(t_k)\int_{-1}^{1}\frac{q(\tau)(U_{n+1}(\tau)-U_{n+1}(t_k))U_l(\tau)d\tau}{(\tau-t_k)U'_{n+1}(t_k)},\ \ n<l.$$

А так как $(U_{n+1}(\tau)-U_{n+1}(t_k))/(\tau-t_k)$, $k=0,1,...,n$, полиномы степени меньше l, то в силу ортогональности

$$\int_{-1}^{1}\frac{q(\tau)(U_{n+1}(\tau)-U_{n+1}(t_k))U_l(\tau)d\tau}{(\tau-t_k)U'_{n+1}(t_k)}=0,k=0,1,...,n,$$

и, следовательно,

$$(\widehat{P_ny})(l)=0,\ \ n<l. \tag{12}$$

По определению нормы в пространстве H_q^s с учетом равенств (12)

$$\|P_ny\|^2_{H_q^s}=\sum_{0\leqslant l\leqslant n}(l+1)^{2s}(\widehat{P_ny})^2(l). \tag{13}$$

Теперь вычислим коэффициенты $(\widehat{P_ny})(l)$ только для l, $0\leqslant l\leqslant n$. В (11) заменим значения функции y в узлах (8) значениями ее ряда Фурье. В результате для всех l, $0\leqslant l\leqslant n$, найдем

$$(\widehat{P_ny})(l)=\frac{2}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m\in\mathbb{N}_0}\widehat{y}(m)\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+2}U_m(t_k)U_l(t_k)$$

$$=\sum_{m\in\mathbb{N}_0}\widehat{y}(m)\frac{2}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{\pi(m+1)(k+1)}{n+2}\sin\frac{\pi(l+1)(k+1)}{n+2}$$

$$=\frac{1}{n+2}\sum_{m\in\mathbb{N}_0}\widehat{y}(m)\sum_{k=0}^{n}\left(\cos\frac{\pi(m-l)(k+1)}{n+2}-\cos\frac{\pi(m+l+2)(k+1)}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{n+2}\sum_{m\in\mathbb{N}}\widehat{y}(m-1)\left(\frac{\sin\dfrac{(2n+3)\pi(m-(l+1))}{2(n+2)}}{\sin\dfrac{\pi(m-(l+1))}{2(n+2)}}\right.$$

$$-\frac{\sin\dfrac{(2n+3)\pi(m+(l+1))}{2(n+2)}}{\sin\dfrac{\pi(m+(l+1))}{2(n+2)}}\Bigg),\ 0\leqslant l\leqslant n.$$

Представляя числители выражений в последних скобках в виде

$$\sin\frac{(2n+3)\pi(m-(l+1))}{2(n+2)}=\sin\pi(m-(l+1))\cos\frac{\pi(m-(l+1))}{2(n+2)}$$

$$-\cos\pi(m-(l+1))\sin\frac{\pi(m-(l+1))}{2(n+2)}=\sin\pi(m-(l+1))\cos\frac{\pi(m-(l+1))}{2(n+2)}$$

$$+(-1)^{m-l}\sin\frac{\pi(m-(l+1))}{2(n+2)},\ m\in\mathbb{N}_0,\ 0\leqslant l\leqslant n,$$

$$\sin\frac{(2n+3)\pi(m+(l+1))}{2(n+2)}=\sin\pi(m+(l+1))\cos\frac{\pi(m+(l+1))}{2(n+2)}$$

$$-\cos\pi(m+(l+1))\sin\frac{\pi(m+(l+1))}{2(n+2)}=\sin\pi(m+(l+1))\cos\frac{\pi(m+(l+1))}{2(n+2)}$$

$$+(-1)^{m-l}\sin\frac{\pi(m+(l+1))}{2(n+2)},\ m\in\mathbb{N}_0,\ 0\leqslant l\leqslant n,$$

получим

$$(\widehat{P_ny})(l)=\frac{1}{2(n+2)}\sum_{m\in\mathbb{N}}\widehat{y}(m-1)\left(\frac{\sin\pi(m-(l+1))}{\sin\dfrac{\pi(m-(l+1))}{2(n+2)}}\cos\frac{\pi(m-(l+1))}{2(n+2)}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\pi(m+(l+1))}{\sin\dfrac{\pi(m+(l+1))}{2(n+2)}}\cos\frac{\pi(m+(l+1))}{2(n+2)}\right),\ 0\leqslant l\leqslant n.$$

Так как

$$\frac{\sin\pi(m-(l+1))}{\sin\dfrac{\pi(m-(l+1))}{2(n+2)}}\cos\frac{\pi(m-(l+1))}{2(n+2)}$$

$$=\begin{cases}(-1)^{\mu}2(n+2), & m-(l+1)=2(n+2)\mu,\\ 0, & m-(l+1)\neq 2(n+2)\mu,\end{cases}\ \mu\in\mathbb{N}_0,$$

$$\frac{\sin\pi(m+(l+1))}{\sin\dfrac{\pi(m+(l+1))}{2(n+2)}}\cos\frac{\pi(m+(l+1))}{2(n+2)}$$

$$=\begin{cases}(-1)^{\mu}2(n+2), & m+(l+1)=2(n+2)\mu,\\ 0, & m+(l+1)\neq 2(n+2)\mu,\end{cases}\ \mu\in\mathbb{N},$$

то

$$(\widehat{P_ny})(l)=\sum_{\mu\in\mathbb{N}_0}(-1)^{\mu}\widehat{y}(2(n+2)\mu+l)+\sum_{\mu\in\mathbb{N}}(-1)^{\mu-1}\widehat{y}(2(n+2)\mu-l-2)),\ 0\leqslant l\leqslant n.$$

Возвращаясь к (13), найдем

$$\|P_ny\|^2_{H^s_q}=\sum_{1\leqslant l\leqslant n+1}l^{2s}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{N}_0}(-1)^{\mu}\widehat{y}(2(n+2)\mu+l-1)\right.$$

$$+\sum_{\mu\in\mathbb{N}}(-1)^{\mu-1}\widehat{y}(2(n+2)\mu-l-1)\Bigg)^2 \leqslant 2\sum_{1\leqslant l\leqslant n+1} l^{2s}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{N}_0}(-1)^{\mu}\widehat{y}(2(n+2)\mu+l-1)\right)^2$$

$$+2\sum_{1\leqslant l\leqslant n+1} l^{2s}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{N}}(-1)^{\mu-1}\widehat{y}(2(n+2)\mu-l-1)\right)^2$$

$$=2\sum_{1\leqslant l\leqslant n+1}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{N}_0}(-1)^{\mu}\frac{l^s(2(n+2)\mu+l-1)^s}{(2(n+2)\mu+l-1)^s}\widehat{y}(2(n+2)\mu+l-1)\right)^2$$

$$+2\sum_{1\leqslant l\leqslant n+1}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{N}}(-1)^{\mu-1}\frac{l^s(2(n+2)\mu-l-1)^s}{(2(n+2)\mu-l-1)^s}\widehat{y}(2(n+2)\mu-l-1)\right)^2$$

$$\leqslant 2\sum_{1\leqslant l\leqslant n+1}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{N}_0}\frac{l^{2s}}{(2(n+2)\mu+l-1)^{2s}}\sum_{\mu\in\mathbb{N}_0}(2(n+2)\mu+l-1)^{2s}\widehat{y}^2(2(n+2)\mu+l-1)\right)$$

$$+2\sum_{1\leqslant l\leqslant n+1}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{N}}\frac{l^{2s}}{(2(n+2)\mu-l-1)^{2s}}\sum_{\mu\in\mathbb{N}}(2(n+2)\mu-l-1)^{2s}\widehat{y}^2(2(n+2)\mu-l-1)\right)$$

$$\leqslant \|y\|^2_{H^2_q}\Bigg(\max_{1\leqslant l\leqslant n+1}\sum_{\mu\in\mathbb{N}_0}\frac{l^{2s}}{(2(n+2)\mu+l-1)^{2s}}$$

$$+\max_{1\leqslant l\leqslant n+1}\sum_{\mu\in\mathbb{N}}\frac{l^{2s}}{(2(n+2)\mu-l-1)^{2s}}\Bigg).$$

Оценим по отдельности максимумы сумм в последнем выражении. Для первой суммы имеем

$$\max_{1\leqslant l\leqslant n+1}\sum_{\mu\in\mathbb{N}_0}\frac{l^{2s}}{(2(n+2)\mu+l-1)^{2s}} \tag{14}$$

$$\leqslant\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2s}\max_{1\leqslant l\leqslant n+1}\sum_{\mu\in\mathbb{N}_0}\left(2\mu+\frac{l-1}{n+2}\right)^{-2s}$$

$$\leqslant 1+\max_{1\leqslant l\leqslant n+1}\sum_{\mu\in\mathbb{N}}\left(2\mu+\frac{l-1}{n+2}\right)^{-2s}\leqslant 1+\sum_{\mu\in\mathbb{N}}(2\mu)^{-2s}.$$

Для второй суммы найдем

$$\max_{1\leqslant l\leqslant n+1}\sum_{\mu\in\mathbb{N}}\frac{l^{2s}}{(2(n+2)\mu-l-1)^{2s}} \tag{15}$$

$$\leqslant\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2s}\max_{1\leqslant l\leqslant n+1}\sum_{\mu\in\mathbb{N}}\left(2\mu-\frac{l+1}{n+2}\right)^{-2s}\leqslant\sum_{\mu\in\mathbb{N}}(2\mu-1)^{-2s}.$$

Подставляя (14) и (15) в (13), получим

$$\|P_n y\|^2_{H^s_q}\leqslant(1+\zeta(2s))\|x\|^2_{H^s_q},\ s>\frac{1}{2}.$$

Лемма 3 доказана. □

Обозначим $E_n(y)^s_q$ наилучшее приближение по норме пространства H^s_q функции $y \in H^s_q$ алгебраическими полиномами. Известно, что наилучшее приближение функции в гильбертовом пространстве доставляет отрезок ее ряда Фурье

$$E_n(y)^s_q = \|y - Q_n y\|_{H^s_q},\ (Q_n y)(t) = \sum_{0\leqslant l\leqslant n} \widehat{y}(l)U_l(t),\ t \in (-1,1).$$

Следствие 1. *Для любой функции $y \in H^s_q$, $s > 1/2$, и любого $n \in \mathbb{N}_0$ верна оценка*

$$\|y - P_n y\|_{H^s_q} \leqslant (1 + \sqrt{1 + \zeta(2s)})E_n(y)^s_q.$$

Доказательство. Возьмем произвольные функцию $y \in H^s_q$, $s > 1/2$, и число $n \in \mathbb{N}_0$. Цепочка неравенств

$$\|y - P_n y\|_{H^s_q} \leqslant \|y - Q_n y\|_{H^s_q} + \|Q_n y - P_n y\|_{H^s_q} \leqslant E_n(y)^s_q$$

$$+\|P_n\|_{H^s_q \to H^s_q}\|y - Q_n y\|_{H^s_q} \leqslant (1 + \sqrt{1 + \zeta(2s)})E_n(y)^s_q$$

доказывает требуемую оценку. □

4. Анализ разрешимости

Задачу (1), (2) запишем в виде операторного уравнения

$$Kx \equiv Dx + Vx = y,\ K : X \to Y,$$

$$X = \{x \in H^{s+1}_p \mid \int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)dx}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0\},\ Y = H^s_q.$$

$$(Dx)(t) = x'(t),\ (Vx)(t) = \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t)},\ t \in (-1,1).$$

Теорема 1. *Для всех λ, $\mid \lambda \mid< 1$, задача (1), (2) однозначно разрешима при любой правой части $y \in Y$, и верна оценка*

$$\|K^{-1}\|_{Y\to X} \leqslant (1- \mid \lambda \mid)^{-1}.$$

Доказательство. Покажем вначале, что оператор $D : X \to Y$ обратим и $\|D\|_{X\to Y} = \|D^{-1}\|_{Y\to X} = 1$. Действительно, возьмем произвольные функции $x \in X$ и $y \in Y$ и запишем их в виде их рядов Фурье в соответствующих пространствах

$$x(t) = \sum_{l\in\mathbb{N}} \widehat{x}(l)T_l(t),\ t \in [-1,1],\ y(t) = \sum_{l\in\mathbb{N}_0} \widehat{y}(l)U_l(t),\ t \in (-1,1).$$

Уравнение

$$Dx = y,\ D : X \to Y, \tag{16}$$

в этом случае будет иметь вид бесконечной системы уравнений

$$l\widehat{x}(l)U_{l-1}(t) = \widehat{y}(l-1)U_{l-1}(t),\ l \in \mathbb{N},\ t \in (-1,1),$$

а его решением будет функция

$$x(t) = \sum_{l\in\mathbb{N}} l^{-1}\widehat{y}(l-1)T_l(t),\ t \in [-1,1].$$

Из произвольности выбора элемента $y \in Y$ следует обратимость оператора $D : X \to Y$. Вычислим норму операторов $D : X \to Y$ и $D^{-1} : Y \to X$. Для произвольного элемента $x \in X$ имеем

$$\|Dx\|^2_Y = \sum_{l\in\mathbb{N}_0} (l+1)^{2s}((l+1)\widehat{x}(l+1))^2 = \sum_{l\in\mathbb{N}} l^{2(s+1)}\widehat{x}^2(l) = \|x\|^2_X,$$

для произвольного элемента $y \in Y$ найдем

$$\|D^{-1}y\|_X^2 = \sum_{l\in\mathbb{N}} l^{2(s+1)}(l^{-1}\widehat{y}(l-1))^2 = \sum_{l\in\mathbb{N}_0}(l+1)^{2s}\widehat{y}^2(l) = \|y\|_Y^2.$$

Это и означает, что $\|D\|_{X\to Y} = \|D^{-1}\|_{Y\to X} = 1$.

Найдем теперь норму оператора $V : X \to Y$. Вновь возьмем произвольный элемент $x \in X$

$$x(t) = \sum_{l\in\mathbb{N}} \widehat{x}(l)T_l(t),\ t \in [-1,1],$$

и применим к нему оператор V. Так как (см. напр., [12])

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_l(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} = U_{l-1}(t),\ l \in \mathbb{N},\ t \in [-1,1],$$

то

$$(Vx)(t) = \frac{\lambda}{\pi}\sum_{l\in\mathbb{N}} \widehat{x}(l)\int_{-1}^{1} \frac{T_l(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} = \lambda\sum_{l\in\mathbb{N}} \widehat{x}(l)U_{l-1}(t),\ t \in (-1,1),$$

и норма функции Vx в пространстве Y оценивается неравенством

$$\|Vx\|_Y^2 = \lambda^2\sum_{l\in\mathbb{N}_0}(l+1)^{2s}\widehat{x}^2(l+1) \leqslant \lambda^2\sum_{l\in\mathbb{N}} l^{2(s+1)}\widehat{x}^2(l) = \lambda^2\|x\|_X^2,$$

поэтому $\|V\|_{X\to Y} \leqslant\mid \lambda \mid$. По лемме 1 оператор $K = D + V : X \to Y$ обратим для всех λ, $\mid \lambda \mid< 1$ и верна оценка

$$\|K^{-1}\|_{Y\to X} \leqslant (1-\mid \lambda \mid)^{-1},\ \mid \lambda \mid< 1.$$

Теорема 1 доказана. □

5. Метод Галеркина

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}_0$. Приближенное решение задачи (1), (2) будем искать в виде отрезка ряда Фурье

$$x_{n+1}(t) = \sum_{1\leqslant l\leqslant n+1} \widehat{x}_{n+1}(l)T_l(t),\ t \in [-1,1], \tag{17}$$

неизвестные коэффициенты $\widehat{x}_{n+1}(l)$, $l = 1, 2, ..., n+1$, которого найдем по методу Галеркина из системы уравнений

$$l\widehat{x}_{n+1}(l) + \lambda\widehat{x}_n(l) = \widehat{y}(l-1),\ 1 \leqslant l \leqslant n+1, \tag{18}$$

где

$$\widehat{y}(l) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} q(\tau)y(\tau)U_l(\tau)d\tau,\ 0 \leqslant l \leqslant n,$$

коэффициенты Фурье функции y по системе полиномов $\{U_l\}_{l\in\mathbb{N}_0}$.

Теорема 2. *Для любых фиксированных $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mid \lambda \mid< 1$ и $n \in \mathbb{N}_0$ система уравнений (18) метода Галеркина решения задачи (1), (2) имеет единственное решение*

$$\widehat{x}^*_{n+1}(l) = (l+\lambda)^{-1}\widehat{y}(l-1),\ 1 \leqslant l \leqslant n+1,$$

и приближенные решения

$$x^*_{n+1}(t) = \sum_{1\leqslant l\leqslant n+1} \widehat{x}^*_{n+1}(l)T_l(t),\ t \in [-1,1],$$

сходятся к точному решению x^* задачи (1), (2) со скоростью

$$\|x^* - x^*_n\|_X \leqslant (1-\mid \lambda \mid)^{-1}E_n(y)_q^s.$$

Доказательство. Обозначим

$$X_n = \mathrm{span}\{T_l\}_{l=1}^{n+1},\ Y_n = \mathrm{span}\{U_l\}_{l=0}^{n}$$

подпространства пространств X и Yсоответственно. Систему уравнений (18) запишем в виде операторного уравнения

$$K_n x_{n+1} \equiv Q_n(Dx_{n+1} + Vx_{n+1}) = Q_n y,\ K_n : X_n \to Y_n, \tag{19}$$

По теореме 1 оператор K в условиях теоремы 2 обратим. Кроме того, $\dim X_n = \dim Y_n$ и $K - K_n \equiv 0$ на X_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Поэтому по лемме 2 операторное уравнений (19) имеет единственное решение

$$x^*_{n+1}(t) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant n+1} (l+\lambda)^{-1}\widehat{y}(l-1)T_l(t),\ t \in [-1,1],$$

при любой правой части $Q_n y \in Y_n$, и погрешность приближенного решения оценивается неравенством

$$\|x^* - x^*_{n+1}\|_X \leqslant \|K^{-1}\|_{Y\to X}\|y - Q_n y\|_Y \leqslant (1- \mid \lambda \mid)^{-1}E_n(y)^s_q.$$

Теорема 2 доказана. □

При всех преимуществах метода Галеркина он имеет один существенный недостаток – неконструктивность. Действительно, для вычисления коэффициентов Фурье правой части уравнения (1) необходимо брать интегралы, которые не от всех функций вычисляются в явном виде. Этого недостатка лишен метод коллокаций, который, однако, в ряде пространств, например, гельдеровских или непрерывных функций, имеет худшую скорость сходимости чем метод Галеркина.

В следующем разделе показано, что в пространствах Соболева скорость сходимости метода коллокаций не уступает скорости сходимости метода Галеркина.

6. Метод коллокаций

Вновь зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Приближенное решение задачи (1), (2) как и по методу Галеркина будем искать в виде отрезка ряда Фурье (17), но его неизвестные коэффициенты $\{\widehat{x}_{n+1}(l)\}_{l=1}^{n+1}$ найдем теперь по методу коллокаций из системы уравнений

$$(Dx_{n+1})(t_k) + (Vx_{n+1})(t_k) = y(t_k), k = 0, 1, ..., n, \tag{20}$$

по узлам (8)

Обозначая $w = Kx_{n+1} - y$, можно метод Галеркина (18) записать в виде системы уравнений

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} q(\tau)w(\tau)U_l(\tau)d\tau = 0,\ l = 0, 1, ..., n, \tag{21}$$

а метод коллокаций (20) – в виде системы уравнений

$$w(t_k) = 0,\ k = 0, 1, ..., n. \tag{22}$$

Аппроксимируем интегралы (21) интерполяционными квадратурными суммами

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} q(\tau)(P_n w)(\tau)U_l(\tau)d\tau = \frac{2}{n+2}\sum_{k=0}^{n} w(t_k)U_l(t_k)\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+2},\ l = 0, 1, ..., n,$$

и обозначим

$$r_l = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} q(\tau)w(\tau)U_l(\tau)d\tau - \frac{2}{n+2}\sum_{k=0}^{n} w(t_k)U_l(t_k)\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+2},\ l = 0, 1, ..., n,$$

остаточные члены этих квадратурных сумм. Из чисел $\{r_l\}_{l=0}^n$ образуем полином

$$(R_n w)(t) = \sum_{l=0}^{n} r_l U_l(t),\ t \in [-1,1].$$

Теперь запишем метод Галеркина (18) для искомой функции $w - R_n w$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} q(\tau)(w - R_n w)(\tau) U_l(\tau) d\tau = 0,\ l = 0,1,...,n, \tag{23}$$

Систему уравнений (23) назовем модифицированным методом Галеркина-Петрова для задачи (1), (2).

Лемма 4. *Метод коллокаций (20) и модифицированный метод Галеркина-Петрова (23) эквивалентны в том смысле, что равенства (22) выполняются тогда и только тогда, когда выполняются равенства (23).*

Доказательство. Равенства (23) представим в виде

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} q(\tau)(w - R_n w)(\tau) U_l(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} q(\tau) w(\tau) U_l(\tau) d\tau - r_l$$

$$= \frac{2}{n+2}\sum_{k=0}^{n} w(t_k) U_l(t_k) \sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+2} = 0,\ l = 0,1,...,n.$$

Теперь равенства (23) следуют из равенств (22) тривиально.

Пусть выполнены равенства (23). Матрица $(U_l(t_k))_{l,k=0}^n$ невырождена, поэтому однородная система уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} w(t_k) U_l(t_k) \sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+2} = 0,\ l = 0,1,...,n.$$

имеет только нулевое решение

$$w(t_k)\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+2} = 0,\ k = 0,1,...,n.$$

Так как

$$\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+2} \neq 0, k = 0,1,...,n, \text{ то } w(t_k) = 0,\ k = 0,1,...,n.$$

Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Для любой функции $w \in H_q^s$ и любого $n \in \mathbb{N}_0$ верна оценка*

$$\|R_n w\|_{H_q^s} \leqslant \sqrt{1+\zeta(2s)} E_n(w)_q^s.$$

Доказательство. Зафиксируем функцию $w \in H_q^s$ и число $n \in \mathbb{N}_0$. Коэффициенты r_l, $l = 0,1,..,n$, это первые $n+1$ коэффициенты Фурье функции $w - P_n w$, поэтому по лемме 3 имеем

$$\|R_n w\|_{H_q^s} = \|Q_n(w - P_n w)\|_{H_q^s} = \|P_n(Q_n w - w)\|_{H_q^s} \leqslant \sqrt{1+\zeta(2s)} E_n(w)_q^s.$$

Лемма 5 доказана. □

Теорема 3. *Для любых фиксированных* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mid \lambda \mid < 1$ *и* $n \in \mathbb{N}_0$ *система уравнений полиномиального метода коллокаций (20) имеет единственное решение* $\{\widehat{x}^*_{n+1}(l)\}_{l=1}^{n+1}$, *и приближенные решения*

$$x^*_{n+1}(t) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant n+1} \widehat{x}^*_{n+1}(l) T_l(t), \ t \in [-1, 1],$$

сходятся к точному решению x^* *задачи (1), (2) со скоростью*

$$\|x^* - x^*_n\|_X \leqslant (1- \mid \lambda \mid)^{-1} E_n(y)^s_q.$$

Доказательство. Систему уравнений (20) полиномиального метода коллокаций запишем, следуя леммме 4, в виде системы уравнений (23) модифицированного метода Галеркина-Петрова. В операторной форме система уравнений (23) будет иметь вид $Q_n w = Q R_n w$. Делая обратную замену $w = K x_{n+1} - y$, получим уравнение

$$QKx_{n+1} = Q_n(y + R_n w) \tag{24}$$

метода Галеркина для уравнения

$$Dx + Vx = y + R_n w.$$

По лемме 2 оператор $K_n = Q_n K$ обратим в паре пространств (X_n, Y_n), и погрешность приближенного решения x^*_{n+1} уравнения (24) по методу Галеркина оценивается неравенством

$$\|x^* - x^*_{n+1}\|_X \leqslant (1- \mid \lambda \mid)^{-1} \|y - R_n w - Q_n y + Q_n R_n w\|_Y$$
$$\leqslant (1- \mid \lambda \mid)^{-1} (\|y - Q_n y\|_Y + \|R_n w - Q_n R_n w\|_Y).$$

Так как $R_n = Q_n - Q_n P_n$, то $R_n w - Q_n R_n w = 0$, поэтому

$$\|x^* - x^*_{n+1}\|_X \leqslant (1- \mid \lambda \mid)^{-1} E_n(y)^s_q.$$

Теорема 3 доказана. □

7. Замечание

Задача (1), (2) является, разумеется, всего лишь модельной задачей, которая подобрана специально, чтобы показать методику обоснования метода коллокаций путем сведения его обоснования к обоснованию метода Галеркина. Применение этой методики для обоснования метода коллокаций для более общих, например, для псевдодифференциальных уравнений на разомкнутых контурах, требует развития теории таких уравнений. Однако развитие теории сингулярных интегро-дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений на разомкнутых контурах пока сильно отстает от развития теории таких уравнений в периодическом случае, что сдерживает и развитие теории обоснования приближенных методов в этом направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. N. Arnold, W. L. Wendland *On the asymptotic convergence of collocation methods* // Math. of Comp. **41**, № 164. 1983. P. 349–381.
2. D. N. Arnold, W. L. Wendland *The convergence of spline collocation method for strongly elliptic equations on curves* // Number. Math. **46**. 1985. P. 317–341.
3. J. Elshner *On spline collocation for singular integral equations on an interval* // Semin. Anal. Oper. Equat. and Numer. Anal. 1985/86. 1986. P. 31–54.
4. J. Elshner *On spline approximation for a class of integral equations III* // Semin. Anal. Oper. Equat. and Numer. Anal. 1986/87. 1987. P. 25–40.
5. J. Elshner *On spline approximation for singular integral equations on an interval* // Preprint Akad. Wiss. DDR, Karl Weierstrass Inst. Math. **4**. 1987.

6. J. Elshner *On spline approximation for singular integral equationson an interval* // Math. Nachr. **139** 1988. P. 309–319.
7. S. B. Prössdorf, G. Schmidt,- *A finite element collocation method for singular integral equations* // Math. Nachr. **100** 1981. P. 33–60.
8. S. B. Prössdorf *Recent results in numerical analysis for singular integral equations* // Proc. 9th Conf. Probl. and Meth. Math. Phys. (TPM) Karl-Marx-Stadt, June 27 – July 1. 1988. P. 224–234.
9. A. I. Fedotov *On the asymptotic convergence of the polynomial collocation method for singular integral equations and periodic pseudodifferential equations*// Archivum Mathematicum. Tomus 38, № 1. 2002. P. 1–13.
10. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. *Приближенное решение операторных уравнений*, М.: Наука. 1969. 418 с.
11. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач*, Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. 232 с.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, М.: Наука. 1971. 1108 с.
13. Тейлор М. *Псевдодифференциальные операторы*, М.: Мир. 1984. 472 с.
14. Федотов А. И. *Оценка нормы интерполционного оператора Лагранжа в многомерном пространстве Соболева с весом* // Математические заметки. **99**, № 5. 2016. С. 752-763.

Александр Иванович Федотов,
Казанский филиал московского социально-гуманитарного института,
ул. Столярова, 3,
420030, г. Казань, Россия
E-mail: `fedotovkazan@mail.ru`