ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 2 (2019). С. 118-129.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛОВ НА МНОЖЕСТВАХ УРОВНЯ

Р.Г. САЛАХУДИНОВ

Аннотация. Рассматриваются специальные функционалы области G на плоскости, построенные при помощи функции расстояния до границы ∂G и классической функции напряжения. Функционалы, зависящие от функции расстояния, рассматриваются в случае односвязных областей. Изучены также функционалы, зависящие от функции напряжения конечносвязной области. Доказано, что свойство изопериметрической монотонности по свободному параметру порождает другую монотонность, а именно, монотонность функционалов, рассматриваемых как функции множеств, определенных на подмножествах области. Некоторые частные случаи неравенств ранее получены Пейном. Отметим, что неравенства были успешно применены для обоснования новых оценок жесткости кручения односвязной и многосвязной областей. В частности, построены новые функционалы области, монотонные по обоим своим аргументам. Кроме того, найдены точные оценки скорости изменения функционалов, т.е. получены точные оценки производных.

Ключевые слова: функция расстояния до границы, функция напряжения, неравенство типа Пейна, изопериметрическое неравенство, изопериметрическая монотонность.

Mathematics Subject Classification: Primary 28A25, 35A23; Secondary 30A10

1. Введение

Для эффективного решения некоторых проблем математической физики оказалось недостаточно таких классических геометрических характеристик области, как площадь, объем, площадь поверхности, длина границы, диаметр, максимум радиусов кругов, содержащихся в области. Более тонким и эффективным инструментом при решении некоторых задач оказались евклидовые моменты области относительно своей границы.

Пусть G — односвязная область на плоскости. Евклидовым моментом порядка α относительно границы области G называется функционал

$$\mathbf{I}_\alpha(G) := \int_G \rho(x, G)^\alpha \mathrm{dA}, \tag{1.1}$$

где $\rho(x, G)$ — функция расстояния от точки $x (\in G)$ до границы ∂G, $\alpha > -1$ и dA — дифференциальный элемент площади. Из работы [1] следует, что в соответствующей нормировке функционал (1.1) лежит в границах, образованных длиной границы области и максимумом радиусов кругов, содержащихся в области, более того, любое значение из упомянутого интервала может быть достигнуто при надлежащем подборе параметра.

R.G. Salakhudinov, Some properties of functionals on level sets.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 17-01-00282-а) и за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).

Поступила 26 сентября 2017 г.

Евклидовы моменты появляются в математической физике при оценке различных физических функционалов области. Например, как было показано Ф. Г. Авхадиевым [2], евклидовый момент инерции области ($\alpha = 2$) и жесткость кручения области являются сравнимыми величинами в классе односвязных областей, т.е. отношение функционалов ограничено сверху и снизу положительными константами, не зависящими от области и не обращающимися в нуль и бесконечность. Также евклидовы моменты различных порядков появляются при изучении неравенств типа Харди в многомерном евклидовом пространстве (см., например, [3]). Отметим, что и многомерные аналоги функционала (1.1) тоже находят применение при решении вариационных проблем (см. [4, 5]).

Применение изопериметрических неравенств на множествах уровня зачастую приводит к решению той или иной проблемы, более того, к новым методам исследования. Ярким примером такого рода является применение классического изопериметрического неравенства в теории кручения и теории течения вязкой жидкости (см. [6]), а также его важной роли в методах симметризации (см. [7, 8]).

Одной из целей нашей работы является исследования свойств функционала (1.1) на подмножествах G. Отметим, что в работе [9] стационарные евклидовы моменты ($\alpha = 1$) и евклидовые моменты инерции подобластей были применены для оценки жесткости кручения области. С другой стороны, предельный переход с множеств уровня позволяет рассматривать оценки на этих множествах как обобщение неравенств между функционалами области. Например, из наших основных утверждений следует, что ряд классических неравенств (неравенство Сен–Венана — Полиа, Пейна и других) могут быть получены путем предельного перехода с множеств уровня классической функции напряжения и функции расстояния до границы области.

В работах [1, 9, 10] показано, что евклидовы моменты порядка α и L^p–нормы функции напряжения области обладают целым рядом схожих изопериметрических свойств. Продолжая эту аналогию, в работе будут рассмотрены аналогичные вопросы для случая, когда функция $\rho(x, G)$ в (1.1) заменяется на классическую функцию напряжения $u(x, G)$, причем, в этом случае область G уже является конечносвязной областью на плоскости.

Основной идеей получения неравенств для функционалов является применение неравенств типа Пейна [6, 11] на множествах уровня функций.

2. Обсуждение задач и предварительные результаты

Введем необходимые для дальнейшего изложения обозначения. Пусть

$$G(\mu) := \{x \in G \mid \rho(x, G) > \mu\},$$

$$\mathbf{a}(\mu) \equiv \mathbf{a}(G(\mu)) := \int\limits_{G(\mu)} \mathrm{dA}. \tag{2.1}$$

$$\mathbf{l}(\mu) \equiv \mathbf{L}(G(\mu)) := \int\limits_{\partial G(\mu)} \mathrm{d}s.$$

В дальнейшем будем называть $G(\mu)$ множествами уровня функции $\rho(x, G)$.

Рассмотрим следующий геометрический функционал

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) := \mathbf{I}_\alpha(G(\mu)), \tag{2.2}$$

где $0 \leqslant \mu \leqslant \boldsymbol{\rho}(G)$, $\boldsymbol{\rho}(G) := \sup_{x \in G} \rho(x, G)$ и α — вещественный параметр. Свойства функции $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ в зависимости от параметра α при фиксированном μ носит изопереметрический характер. Нас в дальнейшем будут интересовать свойства функции $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ при фиксированном значении параметра. Ниже будет показано, что значением параметра вместе с геометрией области G во многом определяют свойства функции $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$.

Пусть $\mathbf{I}_{\alpha_0}(G) < +\infty$ для некоторого $\alpha_0 > -1$ (при этом мы считаем, что для меньших значений параметра функционал неограничен), тогда все множества уровня $G(\mu)$ имеют ограниченную площадь, за исключением может быть множества нулевого уровня, т.е. площади области G (см., например, [12]). Известно, что если площадь области ограничена и $\alpha \geq 0$, то справедливо неравенство

$$\mathbf{I}_\alpha(G) \leqslant \frac{\mathbf{A}(G)^{1+\alpha/2}}{\pi^{\alpha/2}(\alpha+1)(\alpha+2)}. \tag{2.3}$$

Если применить последнее неравенство к $G(\mu)$, тогда функция $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ корректно определена и конечна при $\mu \in (0, \boldsymbol{\rho}(G)]$ и $\alpha \geq 0$.

При $0 > \alpha_0 > -1$ площадь области конечна, тем более, площадь множеств уровня. Но, как будет показано ниже, вычисление функция $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ для отрицательных значений параметра тесно связано со свойствами функционала $\mathbf{l}(\mu)$ как функции от μ.

Отметим, что ограничение на параметр $\alpha > -1$ является естественным при рассмотрении функционала $\mathbf{I}_\alpha(G)$, при этом условие $\mathbf{I}_{\alpha_0}(G) < +\infty$ описывает вполне определенный класс областей на плоскости, более того, различным значениям параметра соответствуют различные классы.

Далее, будет естественно рассматривать значение функции $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ при $\mu = 0$ как результат предельного перехода. Тогда точку $\mu = 0$ при $\alpha \geq \alpha_0$ можно включить в область определения, а при $\alpha \leq \alpha_0$ положить $\mathbf{f}_\alpha(0) := +\infty$. Как отмечалось выше, в других точках значение параметра $\alpha = \alpha_0$ не играет такой роли для $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$.

С другой стороны, условие $\boldsymbol{\rho}(G) < +\infty$ является необходимым для исследования функционала (1.1), а также и для исследования функции (2.2). В свою очередь, случай $\alpha = +\infty$ соответствует классу областей с $\boldsymbol{\rho}(G) < +\infty$. Примеры полосы и полуполосы разочаровывают, так как функция $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ тождественно равна бесконечности на всей области определения. Однако нетрудно построить примеры, когда только с некоторого значения μ_0 площади множеств уровня становятся неограниченными. Простейший пример можно построить, объединяя полосу и круг, диаметр которого больше ширины полосы. Соответственно, $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ будет также отлична бесконечности на $[\mu_0, \boldsymbol{\rho}(G)]$. Из неравенства

$$\mathbf{I}_\alpha(G) \geq \frac{\pi \boldsymbol{\rho}(G)^4}{6}$$

следует, что класс областей, подчиненных условию $\boldsymbol{\rho}(G) < +\infty$, является наиболее широким классом, при котором функция (2.2) и функционал (1.1) описывают некоторые геометрические свойства области.

Далее, так как множества $G(\mu)$ монотонно вложены, из этого следует, что $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ при $\alpha \geq 0$ является не возрастающей функцией. В работе [9] было доказано равенство

$$\mathbf{f}_2(\mu) = \mathbf{i}_2(\mu) - 2\mu\, \mathbf{i}_1(\mu),$$

где

$$\mathbf{i}_q(\mu) := q \int\limits_{\mu}^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{q-1}\, \mathbf{a}(t) \mathrm{d}t, \quad q = 1,\, 2.$$

Из этого представления вытекают равенства

$$(\mathbf{f}_2(\mu))' = -2\mathbf{i}_1(\mu), \quad (\mathbf{f}_2(\mu))'' = 2\mathbf{a}(\mu). \tag{2.4}$$

Таким образом, $\mathbf{f}_2(\mu)$ является дважды дифференцируемой, монотонно убывающей и строго выпуклой вниз функцией. Отметим также, что у функции $\mathbf{f}_2(\mu)$ почти всюду существует третья производная (см. [8]).

Покажем, что аналогичными свойствами обладает и функция $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$.

Лемма 2.1. *Пусть G — односвязная область, с ограниченным евклидовым моментом порядка $\alpha_0(> -1)$. Тогда $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ является монотонно убывающей функцией при $\alpha \geq 0$, а также строго выпуклой вниз при $\alpha \geq 1$. Эта функция всюду дифференцируема при $\alpha \geq 1$, абсолютно непрерывна при $\alpha \in (0,1)$, а также если $\mathbf{l}(s)$ — функция ограниченной вариации, то $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ почти всюду дифференцируема и при $0 > \alpha > -1$.*

Доказательство. Следуя [9], заметим, что в области $G(\mu)$ существует своя функция расстояния до границы области, поэтому в дальнейшем будем различать линии уровня областей G и $G(\mu)$. Как нетрудно видеть, функцией расстояния до границы области $G(\mu)$ является функция $\rho(x,G)-\mu$, следовательно, $\mathbf{a}_\mu(s) = \mathbf{a}(s+\mu)$ $(0 \leq s \leq \boldsymbol{\rho}(G(\mu)))$, где $\mathbf{a}_\mu(s)$ — площадь множества уровня функции $\rho(x, G(\mu))$. Далее, применяя определение интеграла по Лебегу и интегрирование по частям, нетрудно получить следующее представление

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) = \int\limits_0^{\mathbf{a}(\mu)} s(\mathbf{a}_\mu)^\alpha \mathrm{d}\mathbf{a}_\mu = \alpha \int\limits_0^{\boldsymbol{\rho}(G(\mu))} s^{\alpha-1}\mathbf{a}_\mu(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \alpha \int\limits_0^{\boldsymbol{\rho}(G)-\mu} (s+\mu)^{\alpha-1}\,\mathbf{a}(s+\mu)\,\mathrm{d}s = \alpha \int\limits_\mu^{\boldsymbol{\rho}(G)} (s-\mu)^{\alpha-1}\,\mathbf{a}(s)\,\mathrm{d}s,$$

где $\alpha > 0$. Из этого представления следуют дифференцируемость функции при $\alpha \geq 1$ и существование второй производной при $\alpha \geq 2$, а также равенства

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_\alpha(\mu))' &= -\alpha(\alpha-1) \int\limits_\mu^{\boldsymbol{\rho}(G)} (s-\mu)^{\alpha-2}\,\mathbf{a}(s)\,\mathrm{d}s = -\alpha\mathbf{f}_{\alpha-1}(\mu), \\ (\mathbf{f}_\alpha(\mu))'' &= \alpha(\alpha-1)\mathbf{f}_{\alpha-2}(\mu). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Частными случаями последних равенств является (2.4). Таким образом, $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ монотонно убывает при $\alpha \geq 1$ и строго выпукла при $\alpha \geq 2$.

Покажем, что приведенные формулы справедливы при более общих предположениях. Обозначим через $\mathbf{l}_\mu(s)$ длину линии уровня функции $\rho(x, G(\mu))$, тогда почти всюду справедливо равенство $\mathbf{a}'_\mu(s) = -\mathbf{l}_\mu(s)$. Отсюда, применяя формулу коплощади [13] для функции расстояния до границы, получим

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) = \int\limits_0^{\boldsymbol{\rho}(G(\mu))} s^\alpha\,\mathbf{l}_\mu(s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_\mu^{\boldsymbol{\rho}(G)} (s-\mu)^\alpha\,\mathbf{l}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.6}$$

где $\alpha > -1$. Из последнего представления вытекает монотонность $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ уже при $\alpha \geq 0$, а также другая формула для производной:

$$\mathbf{f}'_\alpha(\mu) = -\alpha \int\limits_\mu^{\boldsymbol{\rho}(G)} (s-\mu)^{\alpha-1}\mathbf{l}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.7}$$

Из полученного представления и выражения производной следует, что равенства (2.5) справедливы при $\alpha > 0$ и $\alpha > 1$, соответственно.

Используя неотрицательность и измеримость подынтегральной функции и применяя теорему Фубини о повторном интегрировании, при $\alpha > 0$ и $0 \le \nu \le \boldsymbol{\rho}(G)$ получаем

$$\int\limits_0^{\nu} \mathbf{f}'_\alpha(\mu)\mathrm{d}\mu = -\,\alpha \int\limits_0^{\nu} \mathrm{d}\mu \int\limits_{\mu}^{\boldsymbol{\rho}(G)} (s-\mu)^{\alpha-1}\mathbf{l}(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$= -\,\alpha \int\limits_0^{\nu} \mathbf{l}(s)\,\mathrm{d}s \int\limits_0^{s} (s-\mu)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\mu - \alpha \int\limits_{\nu}^{\boldsymbol{\rho}(G)} \mathbf{l}(s)\,\mathrm{d}s \int\limits_0^{\nu} (s-\mu)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\mu =$$

$$= -\int\limits_0^{\nu} s^\alpha \mathbf{l}(s)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{\nu}^{\boldsymbol{\rho}(G)} \Big[(s-\nu)^\alpha - s^\alpha\Big]\mathbf{l}(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int\limits_{\nu}^{\boldsymbol{\rho}(G)} (s-\nu)^\alpha \mathbf{l}(s)\,\mathrm{d}s - \int\limits_0^{\boldsymbol{\rho}(G)} s^\alpha \mathbf{l}(s)\,\mathrm{d}s = \mathbf{f}_\alpha(\nu) - \mathbf{f}_\alpha(0).$$

Таким образом, функция $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ является абсолютно непрерывной при $\alpha > 0$.

Далее, предположим, что $\mathbf{l}(\mu)$ является функцией ограниченной вариации. Тогда при $\alpha > -1$, применяя в (2.6) формулу интегрирование по частям, получим

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) = \frac{1}{\alpha+1} \int\limits_0^{\boldsymbol{\rho}(G)-\mu} \mathbf{l}(s+\mu)\,\mathrm{d}s^{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1} \int\limits_{\mu}^{\boldsymbol{\rho}(G)} \mathbf{l}(s)\,\mathrm{d}(s-\mu)^{\alpha+1} =$$

$$\frac{\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G))(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \int\limits_{\mu}^{\boldsymbol{\rho}(G)} (s-\mu)^{\alpha+1}\,\mathrm{d}\mathbf{l}(s),$$

где последний интеграл понимается в смысле Римана–Стильтьеса и

$$\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G)) := \lim_{\mu\to\boldsymbol{\rho}(G)} \mathbf{l}(\mu).$$

Из условий леммы и полученного представления следует существование почти всюду производной

$$\mathbf{f}'_\alpha(\mu) = -\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G))(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)^\alpha + \int\limits_{\mu}^{\boldsymbol{\rho}(G)} (s-\mu)^\alpha\,\mathrm{d}\mathbf{l}(s),$$

при $0 \ge \alpha > -1$. В частности,

$$(\mathbf{a}(\mu))' = -\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G)) + \int\limits_{\mu}^{\boldsymbol{\rho}(G)} \mathrm{d}\mathbf{l}(s) = -\mathbf{l}(\mu)$$

почти всюду.

В заключении доказательства приведем простые примеры областей, для которых функция $\mathbf{l}(\mu)$ не непрерывна. Область с конечным числом скачков функции $\mathbf{l}(\mu)$ нетрудно получить с помощью хорошо известной области в виде «гантели» (см. [7, стр. 313]). Действительно, рассмотрим область, являющуюся объединением двух одинаковых кругов и прямоугольника, ширина которого меньше диаметра кругов. Нетрудно убедиться, что в этом случае рассматриваемая функция будет иметь ровно один скачек. Область с конечным числом скачков можно получить, объединяя гантели, так чтобы они пересекались по ручкам разной ширины. Ещё более простым примером является объединение двух прямоугольников различной ширины, образующих «лестницу» с двумя ступенями. В этом случае также получим ровно один скачок у функции $\mathbf{l}(\mu)$. Увеличивая число ступеней, получим конечное или бесконечное число скачков функции. □

Частными случаями свойств монотонности и выпуклости являются двусторонние оценки для функции $\mathbf{f}_2(\mu)$ и её производной. Однако, эти оценки являются специальным случаем двухсторонних неравенств, получаемых с применением неравенства типа Пейна [9]

$$\mathbf{I}_2(G) \leq \frac{2\boldsymbol{\rho}(G)}{3}\left(\mathbf{I}_1(G) - \frac{\pi\boldsymbol{\rho}(G)^3}{12}\right).$$

Действительно, учитывая первое из равенств (2.4), применим последнее неравенство на множествах уровня $G(\mu)$, тогда получим дифференциальное неравенство

$$\mathbf{f}_2(\mu) \leq -\frac{2(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)}{3}\left(\frac{(\mathbf{f}_2(\mu))'}{2} + \frac{\pi(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)^3}{12}\right).$$

С помощью несложных алгебраических выкладок можно показать, что последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\left(\frac{\mathbf{f}_2(\mu)}{(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)^3}\right)' \leq -\frac{\pi}{6}. \tag{2.8}$$

Проинтегрируем полученное неравенство по $[0,\, \mu]$ и $[\mu,\, \boldsymbol{\rho}(G)]$, получим двустороннюю оценку

$$\frac{2}{3}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G))(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)^3 + \frac{\pi}{6}(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)^4 \leq \mathbf{f}_2(\mu) \leq \left(\frac{\mathbf{f}_2(0)}{\boldsymbol{\rho}(G)^3} - \frac{\pi\mu}{6}\right)(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)^3,$$

где $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G))$ — длина линии уровня функции $\rho(x,G)$, находящаяся на расстоянии $\mu = \boldsymbol{\rho}(G)$ от границы области. Далее, применяя равенства (2.4), из последнего неравенства нетрудно получить двусторонние оценки для $\mathbf{f}_2'(\mu)$ и $\mathbf{f}_2''(\mu)$. В частности, из этих оценок следует полиномиальное поведение $\mathbf{f}_2(\mu)$ и её производных.

Чтобы обобщить последнее неравенство, правое неравенство запишем в виде

$$\frac{1}{\boldsymbol{\rho}(G(\mu))^3}\left(\mathbf{f}_2(\mu) - \frac{\pi\boldsymbol{\rho}(G(\mu))^4}{6}\right) \leq \frac{1}{\boldsymbol{\rho}(G)^3}\left(\mathbf{f}_2(0) - \frac{\pi\boldsymbol{\rho}(G)^4}{6}\right). \tag{2.9}$$

Заметим, что

$$\mathbf{I}_2(D) = \frac{\pi r^4}{6},$$

где D — круг радиуса r. Поэтому естественным является рассмотреть функционал

$$\mathbf{F}_\alpha(\mu) := \frac{1}{\boldsymbol{\rho}(G(\mu))^{\alpha+1}}\left(\mathbf{f}_\alpha(\mu) - \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G(\mu))^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right). \tag{2.10}$$

Во веденных обозначениях неравенство (2.9) принимает очень простой вид

$$\mathbf{F}_2(\mu) \leq \mathbf{F}_2(0).$$

Таким образом, естественной является гипотеза о том, что аналогичное неравенство имеет место и для $\mathbf{F}_\alpha(\mu)$. Рассуждая аналогично, получаем оценку снизу

$$\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\rho}(G)) \leq \mathbf{F}_2(\mu)$$

и соответствующую гипотезу для $\mathbf{F}_\alpha(\mu)$.

Покажем, что последние два неравенства также являются частными случаями свойства монотонности функции $\mathbf{F}_\alpha(\mu)$.

Теорема 2.1. *Пусть G — односвязная область, с ограниченным евклидовым моментом порядка $\alpha(>0)$. Тогда $\mathbf{F}_\alpha(\mu)$ является монотонно убывающей функцией при $\alpha \geq 0$.*

Следствие 1. *В условиях теоремы 2.1 функция* $\mathbf{f}_\alpha(\mu)\boldsymbol{\rho}(G(\mu))^{-(\alpha+1)}$ *монотонно убывает на* $[0,\boldsymbol{\rho}(G)]$, *в частности, справедливо неравенство*

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) < \left(1-\frac{\mu}{\boldsymbol{\rho}(G)}\right)^{\alpha+1}\mathbf{I}_\alpha(G),$$

где $\mu \in (0,\boldsymbol{\rho}(G))$.

Другим важным следствием теоремы 2.1 является свойство о степенном поведении функционала $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$.

Следствие 2. *Пусть* G *— односвязная область и* $\alpha \geq 0$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) \leq \left(\mathbf{I}_\alpha(G) - \frac{2\pi\mu\boldsymbol{\rho}(G)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)\left(1-\frac{\mu}{\boldsymbol{\rho}(G)}\right)^{\alpha+1}, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) \geq \frac{\boldsymbol{\rho}(G)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G)) + \frac{2\pi(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)}{\alpha+2}\right)\left(1-\frac{\mu}{\boldsymbol{\rho}(G)}\right)^{\alpha+1}, \tag{2.12}$$

где $0 \leq \mu \leq \boldsymbol{\rho}(G)$. *Оба неравенства обращаются в равенство тогда и только тогда, когда* G *— область типа Боннезена.*

При $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ последние неравенства доказаны в [9] и применены для оценок жесткости кручения и евклидовых моментов области относительно границы.

Очевидно, что неравенство (2.11) обобщает следствие 1. С другой стороны, следствием (2.12) является изопериметрическое неравенство

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) \geq \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left(1-\frac{\mu}{\boldsymbol{\rho}(G)}\right)^{\alpha+2}, \tag{2.13}$$

являющиеся противоположным к неравенству из следствия 1, причем неравенство (2.13) обращается в равенство тогда и только тогда, когда G — круг.

Утверждение следствия 2 можно представить в виде следующего двойного неравенства

$$\frac{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G))\boldsymbol{\rho}(G)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad (\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)^{\alpha+1} \leq \mathbf{f}_\alpha(\mu) - \frac{2\pi(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \leq$$

$$\left(\mathbf{I}_\alpha(G)\boldsymbol{\rho}(G)^{-(\alpha+1)} - \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)^{\alpha+1},$$

выделяющем степенное поведение в явном виде, где область и параметр α являются фиксированными.

Далее, оценки производных функции $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ получаются с использованием равенств (2.5).

Следствие 3. *Пусть* G *— односвязная область и* $\alpha \geq 1$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\mathbf{f}'_\alpha(\mu) \geq -\alpha\left(\mathbf{I}_{\alpha-1}(G) - \frac{2\pi\mu\boldsymbol{\rho}(G)^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)}\right)\left(1-\frac{\mu}{\boldsymbol{\rho}(G)}\right)^{\alpha},$$

$$\mathbf{f}'_\alpha(\mu) \leq -\boldsymbol{\rho}(G)^{\alpha}\left(\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G)) + \frac{2\pi(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)}{\alpha+1}\right)\left(1-\frac{\mu}{\boldsymbol{\rho}(G)}\right)^{\alpha},$$

где $0 \leq \mu \leq \boldsymbol{\rho}(G)$. *Оба неравенства обращаются в равенство тогда и только тогда, когда* G *— область типа Боннезена.*

Следствие 4. *Пусть G — односвязная область и $\alpha \geq 2$. Тогда справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}''_\alpha(\mu) &\leq \alpha(\alpha-1)\left(\mathbf{I}_{\alpha-2}(G) - \frac{2\pi\mu\boldsymbol{\rho}(G)^{\alpha-1}}{\alpha(\alpha-1)}\right)\left(1-\frac{\mu}{\boldsymbol{\rho}(G)}\right)^{\alpha-1}, \\ \mathbf{f}''_\alpha(\mu) &\geq (\alpha-1)\boldsymbol{\rho}(G)^{\alpha-1}\left(\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G)) + \frac{2\pi(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)}{\alpha}\right)\left(1-\frac{\mu}{\boldsymbol{\rho}(G)}\right)^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

где $0 \leq \mu \leq \boldsymbol{\rho}(G)$. Оба неравенства обращаются в равенство тогда и только тогда, когда G — область типа Боннезена.

Из [10] и теоремы 2.1 следует, что функционал

$$\mathbf{E}(\alpha,\mu) := (\alpha+1)\mathbf{F}_\alpha(\mu) \tag{2.14}$$

является монотонно убывающей функцией по обоим своим аргументам. При этом монотонность по первому аргументу называется изопериметрической монотонностью по параметру α. Действительно, фиксируя μ, мы получаем связь между различными геометрическими характеристиками множества $G(\mu)$ в форме неравенства. С другой стороны, фиксируя α, мы получаем неравенства, аналогичные монотонности, например, функционала $\mathbf{a}(\mu)$. В действительности, следствие 3 выражает количественное изменение производной функционала.

Если вместо функции $\rho(x,G)$ рассмотреть классическую функцию напряжения области, при этом от класса односвязных областей можно перейти к классу конечносвязных областей на плоскости, то оказывается, что можно доказать утверждения, аналогичные вышеизложенным. В данном случае базовыми являются результаты, полученные в работах [1, 11, 14]. Далее сформулируем результаты, опуская их подробное обсуждение.

Пусть G — конечносвязная область на плоскости. Обозначим через Γ_0 внешнюю граничную компоненту границы ∂G, а через $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$ — внутренние компоненты границы. Функцией напряжения области G называют единственное решение $u(x,G)$ следующей краевой задачи

$$\begin{cases} \triangle u = -2 & \text{в } G, \\ u = 0 & \text{на } \Gamma_0, \\ u = c_i & \text{на } \Gamma_i,\ i=1,\ldots,n, \end{cases}$$

где константы c_i определяются из условия

$$\oint_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s = -2a_i,\ i=1,\ldots,n,$$

здесь $\partial/\partial n$ обозначает внутреннюю нормаль и a_i — площадь, ограниченную кривой Γ_i.

Обозначим через G_0 область, граница которой совпадает с Γ_0 и содержащую G. Продолжим по непрерывности константами $u(x,G)$ в множества, ограниченные кривыми $\Gamma_i\,(i=1,\ldots,n)$. При этом сохраним за продолжением обозначение. Рассмотрим следующий интегральный функционал области

$$\mathbf{T}_\beta(G) := \int_{G_0} u(x,G)^\beta \mathrm{dA},$$

где $\beta > -1$. В случае односвязной области при $\beta = 1$ последний функционал с точностью до константы совпадает с жесткостью кручения области G.

Обозначим через $G(\nu)$ множество уровня функции $u(x,G)$, т. е.

$$G(\nu) := \{x \in G_0 \,|\, u(x,G) > \nu\}.$$

Заметим, что частью границы множеств $G(\nu)$ могут выступать кривые Γ_i. Для области с ограниченным функционалом $\mathbf{T}_\beta(G)$ $(\beta < +\infty)$ все множества уровня имеют конечную площадь при $\nu < \mathbf{u}(G)$ (см. [14]), где $\mathbf{u}(G) := \sup_{x\in G} u(x,G)$.

По аналогии с евклидовыми моментами рассмотрим функционал
$$\boldsymbol{\phi}_\beta(\nu) := \mathbf{T}_\beta(G(\nu)),$$
где $0 \leqslant \nu \leqslant \mathbf{u}(G)$, $\beta > -1$.

Лемма 2.2. *Пусть G — конечносвязная область, с ограниченным функционалом $\mathbf{T}_\beta(G)$ $(\beta \geq 0)$. Тогда $\boldsymbol{\phi}_\beta(\mu)$ является монотонно убывающей при $\beta \geq 0$ функцией и строго выпуклой вниз при $\beta \geq 1$, а также абсолютно непрерывной при $\beta > 0$.*

Доказательство. Из определений функции $u(x,G)$ и множеств $G(\nu)$ нетрудно установить равенство
$$u(x, G(\nu)) = u(x,G) - \nu \ (x \in G(\nu)), \tag{2.15}$$
в частности, $\mathbf{u}(G(\nu)) = \mathbf{u}(G) - \nu$. Применяя определение интеграла по Лебегу, получим
$$\boldsymbol{\phi}_\beta(\nu) = \int_0^{\mathbf{A}(G(\nu))} t(\mathbf{a}_\nu)^\beta \mathrm{d}\mathbf{a}_\nu = \int_\nu^{\mathbf{u}(G)} (t-\nu)^\beta \mathrm{d}\mathbf{a}(t) + \sum_{c_i>\nu} (c_i - \nu)^\beta a_i.$$
Далее, применяя формулу коплощади [13], применённой к функции $u(x,G)$, имеем
$$\boldsymbol{\phi}_\beta(\nu) = \int_\nu^{\mathbf{u}(G)} (t-\nu)^\beta \boldsymbol{\ell}(t)\mathrm{d}t + \sum_{c_i>\nu} (c_i - \nu)^\beta a_i, \tag{2.16}$$
где
$$\boldsymbol{\ell}(t) := \int_{\Gamma(t)} \frac{\mathrm{d}s}{|\nabla u(x,G)|}$$
и $\Gamma(t) = \{x \in G | u(x,G) = t\}$. Из полученной формулы следует монотонное убывание $\boldsymbol{\phi}_\beta(\nu)$ при $\beta \geq 0$.

Также, из формулы (2.16) следует равенство
$$\boldsymbol{\phi}'_\beta(\nu) = -\beta \int_\nu^{\mathbf{u}(G)} (t-\nu)^{\beta-1} \boldsymbol{\ell}(t)\mathrm{d}t - \beta \sum_{c_i>\nu} (c_i-\nu)^{\beta-1} a_i = -\beta \boldsymbol{\phi}_{\beta-1}(\nu). \tag{2.17}$$
Отсюда вытекает строгая выпуклость вниз $\boldsymbol{\phi}_\beta(\nu)$ при $\beta \geq 1$.

Абсолютная непрерывность функции $\boldsymbol{\phi}_\beta(\nu)$ доказывается так же, как и в случае Леммы 2.1. □

Далее, анализируя результаты работы [14], по аналогии с определением (2.10) рассмотрим функционал
$$\boldsymbol{\Phi}_\beta(\nu) := \frac{1}{\mathbf{u}(G(\nu))^\beta} \left(\boldsymbol{\phi}_\beta(\nu) - \frac{2\pi \mathbf{u}(G(\nu))^{\beta+1}}{\beta+1} \right),$$
где $\beta \geq 0$. В случае когда область G ограничена концентрическим кольцом, то хорошо известно, что выражение в скобках обращается тождественно в нуль, а в остальных случаях, как показал Пейн [6], строго положительно.

Имеет место следующий аналог теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть G — конечносвязная область, с ограниченным функционалом $\mathbf{T}_\beta(G)$ для некоторого $\beta(\geq 0)$. Тогда $\boldsymbol{\Phi}_\beta(\nu)$ является монотонно убывающей функцией при $\beta \geq 1$.*

Приведем также следствия, иллюстрирующие степенное поведение функции $\boldsymbol{\phi}_\beta(\nu)$.

Следствие 5. *В условиях теоремы 2.2 справедливы неравенства*
$$0 \leq \boldsymbol{\phi}_\beta(\nu) - \frac{2\pi \mathbf{u}(G)^{\beta+1}}{\beta+1} \left(1 - \frac{\nu}{\mathbf{u}(G)}\right)^{\beta+1} \leq \mathbf{T}_\beta(G) \left(1 - \frac{\nu}{\mathbf{u}(G)}\right)^\beta,$$
где $0 \leq \nu \leq \mathbf{u}(G)$. Оба неравенства обращаются в равенство тогда и только тогда, когда G — концентрическое кольцо.

Следствие 6. *Пусть G — конечносвязная область и $\beta \geq 1$. Тогда справедливы неравенства*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}'_\beta(\nu) &\geq -\left(\beta \mathbf{T}_{\beta-1}(G) - 2\pi\nu\mathbf{u}(G)^{\beta-1}\right)\left(1-\frac{\nu}{\mathbf{u}(G)}\right)^{\beta-1}, \\ \boldsymbol{\phi}'_\beta(\nu) &\leq -2\pi\left(\mathbf{u}(G)-\nu\right)^{\beta},\end{aligned}$$

где $0 \leq \nu \leq \mathbf{u}(G)$. Оба неравенства обращаются в равенство тогда и только тогда, когда G — концентрическое кольцо.

Следствие 7. *Пусть G — конечносвязная область и $\beta \geq 2$. Тогда справедливы неравенства*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}''_\beta(\nu) &\leq \beta\left((\beta-1)\mathbf{T}_{\beta-2}(G) - 2\pi\nu\mathbf{u}(G)^{\beta-2}\right)\left(1-\frac{\nu}{\mathbf{u}(G)}\right)^{\beta-2}, \\ \boldsymbol{\phi}''_\beta(\nu) &\geq 2\pi\beta\left(\mathbf{u}(G)-\nu\right)^{\beta-1},\end{aligned}$$

где $0 \leq \nu \leq \mathbf{u}(G)$. Оба неравенства обращаются в равенство тогда и только тогда, когда G — концентрическое кольцо.

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 2.1. Из утверждения Леммы 2.1 об абсолютной непрерывности функции $\mathbf{f}_\alpha(\mu)$ следует, что убывание $\mathbf{F}_\alpha(\mu)$ эквивалентно неравенству $\mathbf{F}'_\alpha(\mu) \leq 0$ для почти всех $\mu \in (0, \boldsymbol{\rho}(G))$. Последнее неравенство, ввиду тождества $\boldsymbol{\rho}(G(\mu)) = \boldsymbol{\rho}(G) - \mu$ и определения (2.10), равносильно оценке

$$\left(\frac{\mathbf{f}_\alpha(\mu)}{(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)^{\alpha+1}}\right)' \leq -\frac{2\pi}{(\alpha+1)(\alpha+2)}. \tag{3.1}$$

Это неравенство при $\alpha = 2$ совпадает с (2.8), следовательно, утверждение теоремы в этом частном случае обоснованно нами ранее.

В работах [9, 10] были изучены свойства функционала $(\alpha+1)\mathbf{F}_\alpha(0)$ как функции аргумента α. Будем называть областью типа Боннезена выпуклую область, являющуюся объединением двух полукругов и прямоугольника, в частности, при вырождении прямоугольника получаем круг. Так как утверждение является одним из ключевых в доказательстве, мы приведем его формулировку, используя обозначения, введенные в данной работе.

Теорема A. [10] *Пусть G — односвязная область и $\mathbf{I}_{p_0}(G) < +\infty$ для некоторого $p_0 \in [-1, \infty)$. Тогда*

1) *если G не совпадает с экстремалью в неравенстве Боннезена, то $(\alpha+1)\mathbf{F}_\alpha(0)$ — строго убывающая функция от α,*

2) *если G совпадает с одной из экстремалей в неравенстве Боннезена, то $(\alpha+1)\mathbf{F}_\alpha(0) \equiv \mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G))$, для $\alpha \in [-1, +\infty)$.*

В частности, справедливо неравенство

$$(\alpha+1)\mathbf{F}_\alpha(0) \leq \alpha\mathbf{F}_{\alpha-1}(0).$$

Неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда G является областью типа Боннезена. Важным является тот факт, что все линии уровня функции расстояния области типа Боннезена также ограничивают область типа Боннезена.

Применим последнее неравенство на множествах уровня $G(\mu)$. Учитывая определения (2.2), неравенство примет вид

$$\mathbf{f}_\alpha(\mu) \le \frac{\alpha\boldsymbol{\rho}(G(\mu))}{\alpha+1}\,\mathbf{f}_{\alpha-1}(\mu) - \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G(\mu))^{\alpha+2}}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)}.$$

Учитывая равенства (2.5) и проделав несложные алгебраические преобразования, получаем, что последнее неравенство эквивалентно неравенству (3.1). Это завершает доказательство теоремы. □

Доказательство следствия 2. Неравенство (2.11) эквивалентно неравенству

$$\mathbf{F}_\alpha(\mu) \le \mathbf{F}_\alpha(0),$$

являющееся прямым следствием теоремы 2.1.

Снова воспользуемся тем, что функционал $(\alpha+1)\mathbf{F}_\alpha(0)$ является монотонно убывающей функцией аргумента α. С другой стороны, в работе [9, с. 2952] доказано, что

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\alpha\,\mathbf{I}_\alpha(G)}{\boldsymbol{\rho}(G)^{\alpha+1}} = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G)).$$

Следствием этих двух утверждений является следующее изопериметрическое неравенство

$$\mathbf{I}_\alpha(G) \ge \frac{\boldsymbol{\rho}(G)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G)) + \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G)}{p+2}\right).$$

Применяя полученное неравенство на множествах уровня $G(\mu)$, а также $\boldsymbol{\rho}(G(\mu)) = \boldsymbol{\rho}(G) - \mu$, получим неравенство (2.12). □

Доказательство теоремы 2.2. Из утверждения Леммы 2.2 об абсолютной непрерывности функции $\boldsymbol{\phi}_\beta(\nu)$ следует, что убывание $\boldsymbol{\Phi}_\beta(\nu)$ эквивалентно неравенству $\boldsymbol{\Phi}'_\beta(\nu) \le 0$ для почти всех $\nu \in (0, \mathbf{u}(G))$. Последнее неравенство, ввиду тождества $\mathbf{u}(G(\nu)) = \mathbf{u}(G) - \nu$ и соответствующих определений, равносильно оценке

$$\left(\frac{\boldsymbol{\phi}_\beta(\nu)}{(\mathbf{u}(G)-\nu)^\beta}\right)' \le -\frac{2\pi}{\beta+1}. \tag{3.2}$$

В данном случае ключевым в доказательстве является утверждение из работы [14]. Мы приведем утверждение, адаптированное к введенным обозначениям.

Теорема B. *Пусть G конечносвязна область, $\mathbf{T}_{p_0}(G) < +\infty$ для некоторого $p_0 \in [0,\infty)$. Then*
1) *Если G не является концентрическим кольцом, то $\boldsymbol{\Phi}_\beta(0)(\mathbf{u}(G))^{-1}$ является строго убывающей функцией от β для $\beta \ge p_0$.*
2) *Если G — концентрической кольцо, то $\boldsymbol{\Phi}_\beta(0)(\mathbf{u}(G))^{-1} \equiv 0$ для $\beta \in [0,+\infty)$.*

В частности, имеет место неравенство

$$\boldsymbol{\Phi}_\beta(0) \le \boldsymbol{\Phi}_{\beta-1}(0). \tag{3.3}$$

Неравенство обращается в равенство только в случае концентрического кольца. Заметим, что линии уровня функции напряжения концентрического кольца также ограничивают концентрическое кольцо.

Применяя последнее неравенство на множествах уровня $G(\nu)$, получим

$$\boldsymbol{\phi}_\beta(\nu) \le \mathbf{u}(G(\nu))\boldsymbol{\phi}_{\beta-1}(\nu) - \frac{2\pi\mathbf{u}(G(\nu))^{\beta+1}}{\beta(\beta+1)}. \tag{3.4}$$

Применяя (2.17), нетрудно установить, что неравенство (3.4) эквивалентно неравенству (3.2). Теорема 2.2 доказана. □

Доказательство следствия 5. Левое неравенство в утверждении следствия представляет собой неравенство Пейна для $G(\nu)$, а правое неравенство эквивалентно неравенству $\mathbf{\Phi}_\beta(\nu) \leq \mathbf{\Phi}_\beta(0)$. $\square$

В заключении отметим, что аналогом функционала (2.14) в данном случае будет функционал

$$\mathbf{R}(\beta, \nu) := \mathbf{\Phi}_\beta(\nu),$$

являющийся монотонным по обеим переменным. Монотонное поведение по свободному параметру β доказано в работе [14], как и в случае с функцией расстояния до границы, эта монотонность изопериметрическая.

Автор выражает благодарность анонимному рецензенту за ценные замечания и рекомендации к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Салахудинов Р.Г. Интегральные свойства классической функции напряжения односвязной области // *Матем. заметки*, 92(3):447–458, 2012.
2. Авхадиев Ф.Г. Решение обобщенной задачи Сен–Венана // *Матем. сборник*, 189(12):3–12, 1998.
3. F.G. Avkhadiev Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants // *Lobachevskii J. Math.*, 21:3–31, 2006.
4. R. Bañuelos, M. van den Berg, and T. Carroll Torsional rigidity and expected lifetime of brownian motion // *J. London Math. Soc. (2)*, 66:499–512, 2002.
5. Салахудинов Р.Г. Двухсторонние оценки l^p–нормы функции напряжения выпуклых областей в $\mathbb{R}^n$ // *Изв. вузов. Математика*, (3):41–49, 2006.
6. L.E. Payne *Some inequalities in the torsion problem for multiply connected regions* // Studies in Mathematical analysis and Related Topics. Stanford University Press, Stanford, California, 1962. Essays in honor of G. Pólya. P. 270–280
7. Полиа Г. и Сегё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике.* Физматгиз, М., 1962.
8. C. Bandle *Isoperimetric inequalities and applications.* Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, 1980.
9. R.G. Salakhudinov Refined inequalities for euclidian moments of a domain with respect to its boundary // *SIAM J. Math. Anal.*, 44(4):2949–2961, 2012.
10. Салахудинов Р.Г. Изопериметрическая монотонность евклидовых граничных моментов односвязной области // *Изв. вузов. Математика*, (8):66–79, 2013.
11. Салахудинов Р.Г. Изопериметрические неравенства для l^p–норм функции напряжения многосвязной области на плоскости // *Изв. вузов. Математика*, (9):75–80, 2013.
12. R.G. Salahudinov Isoperimetric inequalities for l^p–norms of the distance function to the boundary // *Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.–мат. науки*, 148(2):151–162, 2006.
13. J. Maly, D. Swanson, and W. Ziemer. The coarea formula for sobolev mappings // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355:477–492, 01 2002.
14. R.G. Salakhudinov Payne type inequalities for l^p–norms of the warping functions // *J. Math. Anal. Appl.*, 410(2):659–669, 2014.

Рустем Гумерович Салахудинов,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
ул. Кремлёвская, 35,
420037, г. Казань, Россия
E-mail: `rsalakhud@gmail.com`