ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 4 (2018). С. 24-40.

УДК 517.984.5

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ТОЧКАМИ ПОВОРОТА

Л.Г. ВАЛИУЛЛИНА, Х.К. ИШКИН, Р.И. МАРВАНОВ

Аннотация. В статье изучается асимптотика спектра самосопряженного оператора T, порожденного в пространстве $L^2(0,+\infty)$ дифференциальным выражением четвертого порядка в предположении, что коэффициенты последнего имеют степенной рост на бесконечности так, что: а) индекс дефекта соответствующего минимального оператора равен (2,2), б) дифференциальное уравнение $Ty=\lambda y$ при достаточно больших положительных значениях спектрального параметра имеет 2 точки поворота: конечную и $+\infty$, в) корни характеристического уравнения растут «не в одну силу». Последнее обстоятельство приводит к существенным сложностям при исследовании асимптотики считающей функции спектра традиционным методом Карлемана–Костюченко, основанным на оценках резольвенты вдали спектра и тауберовых теоремах. Как ни странно, метод эталонных уравнений, применяемый для решения более тонкой задачи нахождения асимптотических разложений самих собственных чисел, а потому более чувствительный (по сравнению с методом Карлемана–Костюченко) к поведению коэффициентов дифференциального выражения, оказывается более эффективным в рассматриваемой ситуации: накладывая на коэффициенты некоторые ограничения типа гладкости и регулярности роста на бесконечности, удается получить асимптотическое уравнение для спектра оператора T. Это уравнение позволяет выписать несколько первых членов асимптотического разложения для собственных чисел оператора T в случае, когда коэффициенты имеют степенной рост. Отметим, что до сих пор метод эталонных уравнений применялся в случае наличия лишь одной точки поворота.

Ключевые слова: дифференциальные операторы, асимптотика спектра, точка поворота, сингулярные числа

Mathematics Subject Classification: 34B40, 34L20, 34L40, 47E05

1. Введение

Пусть T – ограниченный снизу самосопряженный оператор, действующий в некотором бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве, имеет дискретный спектр. Это означает, что спектр состоит из счетного числа собственных чисел конечной кратности и имеет единственную предельную точку $+\infty$. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора T, пронумерованные в порядке неубывания с учетом кратностей. Асимптотическое поведение последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно описывать либо в терминах самих

L.G. Valiullina, Kh.K. Ishkin, R.I. Marvanov, Spectral asymptotics for fourth order differential operator with two turning points.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

Поступила 7 июня 2018 г.

собственных чисел, либо в терминах функции распределения спектра $N(\lambda) = \sum\limits_{\lambda_n<\lambda} 1$:

$$\lambda_n \sim f(n),\ n \to +\infty, \tag{1}$$

$$N(\lambda) \sim g(\lambda),\ \lambda \to +\infty, \tag{2}$$

где f, g – некоторые возрастающие взаимно обратные функции, определенные в некоторой окрестности точки $+\infty$. Формулы (1) и (2) не всегда равносильны. Например, если $f(\lambda) = Ce^\lambda$, где C – положительная постоянная, то из формулы (1) следует (2). Но формула (2) равносильна формуле $N(\lambda) \sim \ln\lambda, \lambda \to +\infty$, из которой (1), очевидно, не следует. Легко проверить, что при $g(\lambda) = Ce^\lambda$ формула (2) сильнее формулы (1).

Рассмотренные примеры показывают, что причина неэквивалентности формул (1) и (2) не только в том, что функция $N(\lambda)$ определяется только с точностью до $O(1)$, но и в том, насколько «правильно» ведут себя на бесконечности функции f и g. Условие этой «правильности» хорошо известно [1]: если

$$\lim_{\delta\to1+0} \limsup_{x\to+\infty} \frac{f(\delta x)}{f(x)} = 1, \tag{3}$$

то для всякой возрастающей последовательности $\{\lambda_n\}$ с асимптотикой (2) верна и оценка (1). Аналогичное утверждение верно и для импликации (1) $\Rightarrow$ (2). Функции, удовлетворяющие условию (3), называют PRV-функциями (pseudo regularly varying). В связи с многочисленными приложениями (в особенности, в теории вероятностей) PRV-функции изучены достаточно подробно (см. [2] и имеющиеся там ссылки). Отметим, что PRV-функции явились естественным обобщением RV-класса правильно меняющихся функций, введенных в 1930 году Караматой в его основополагающей работе [3]. Результаты Караматы (вместе с последующими расширениями и обобщениями) оказались исключительно плодотворными для различных областей математики (см. [4, 5])

На практике условие (3) не всегда эффективно. Допустим, для какого-то оператора удается получить оценку (2), но требуется найти более точную асимптотику

$$\lambda_n \sim f(n) + O(\alpha_n),\ n \to +\infty, \tag{4}$$

где последовательность $\{\alpha_n\}$ убывает с требуемой скоростью. Ясно, что если даже функция g удовлетворяет условию (3), формула (4) не обязана следовать из (2). Таким образом, при выполнении условия (3) формула (4) может быть сильнее формулы (2).

Более существенное различие имеет место в методах получения оценок (4) и (2). Один из основных методов исследования асимптотики $N(\lambda)$, восходящий к работе Карлемана [6], основан на оценках резольвенты $(T - \lambda)^{-1}$ (или какой-либо функции от нее) при больших λ вдали от спектра T с последующим применением тауберовых теорем (см., например, [7]). Отметим, что тауберов метод может с успехом применяться и к несамосопряженным операторам [8, 9]. Но если требуется найти несколько первых членов асимптотического разложения (4), то тауберова техника уже неприменима, поскольку приходится «спускаться» на спектр — изучать асимптотику решений уравнения $Ty = \lambda y$, когда λ уходит в бесконечность по множеству, содержащему спектр оператора T. В случае когда оператор T – сингулярный обыкновенный дифференциальный оператор [10], последнее обстоятельство приводит, как правило, к появлению точек поворота [11, Гл. III, § 1], которые сильно усложняют задачу нахождения асимптотических разложений решений уравнения $Ty = \lambda y$. Поэтому чаще всего (по крайней мере, для обыкновенных дифференциальных операторов) задача нахождения разложения (4) является более сложной, по сравнению с аналогичной задачей для $N(\lambda)$[1]. В этом контексте операторы, для которых формула (4) выводится проще, чем формула (2), следовало бы отнести к разряду курьезов.

Статья посвящена получению формулы (4) для одного из таких операторов. Этот оператор – обозначим его T – действует в пространстве $L^2(0,+\infty)$ по формуле

$$Ty = \mathcal{L}(y) := y^{(4)} - 2(p(x)y')' + q(x)y \tag{5}$$

на функциях из

$$\begin{aligned} D(T) \;&=\; \Big\{y \in L^2(0,+\infty): \; y^{[k]} \in AC[0,+\infty) \; (k = \overline{0,3}), \; \mathcal{L}(y) \in L^2(0,+\infty), \\ &\qquad y(0) = y''(0) = 0, \; \lim_{x\to+\infty}[y,y](x) = 0\Big\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$[y,z] = \sum_{k=1}^{2}\left(y^{[k-1]}\overline{z}^{[2-k]} - y^{[2-k]}\overline{z}^{[k-1]}\right),$$

$y^{[k]}$ – k-я квазипроизводная [10, § 15] функции y: $y^{[k]} = y^{(k)}$ при $k = \overline{0,2}$ и $y^{[3]} = 2py' - y'''$; $AC[0,+\infty)$ означает множество функций, абсолютно непрерывных на каждом отрезке $[0,b]$, $b > 0$. Всюду далее считаем, что функции p и q вещественны и суммируемы на каждом интервале $(0,b)$, $b > 0$. При таких условиях T – замкнутый симметрический оператор с индексом дефекта (n,n), где $0 \le n \le 2$ (см. [10, § 17, п. 5]). Если T самосопряжен (то есть $n = 0$) и при некотором $a > 0$ функции p и q неотрицательны п.в. на (a,∞), то из доказательства леммы 2 работы [12] следует, что T совпадает с оператором, ассоциированным с ограниченной снизу замкнутой квадратичной формой

$$\begin{aligned} l[y] \;&=\; \int_0^\infty \left(|y''|^2 + 2p|y'|^2 + q|y|^2\right) dt, \\ D(l) \;&=\; \{y \in L^2(0,\infty): \; \sqrt{q}y, \sqrt{p}y' \in L^2(a,\infty), y'' \in L^2(0,\infty), \; y(0) = 0\}, \end{aligned}$$

следовательно, ограничен снизу. Если дополнительно предположить, что

$$q(x) \to +\infty, \; x \to \infty, \tag{6}$$

то в силу принципа минимакса [13, гл. XIII, § 1] оператор T имеет дискретный спектр.

Как отмечалось выше, для получения асимптотических оценок (1) или (2) важно знать поведение фундаментальной системы решений (ФСР) уравнения

$$y^{(4)} - 2(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y \tag{7}$$

при больших $x > 0$ и $\lambda > 0$ (соответственно $\lambda < 0$). Поведение ФСР существенно зависит от поведения характеристических корней $\mu_i(x,\lambda)$ $(i = \overline{1,4})$ уравнения

$$\mu^4 - 2p\mu^2 + q - \lambda = 0.$$

Имеем

$$\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\nu_1}, \mu_{3,4} = \pm\sqrt{\nu_2}, \tag{8}$$

где $\nu_{1,2} = p \pm \sqrt{D}$, $D = p^2 + \lambda - q$. Здесь и всюду далее ветвь корня $\sqrt{z}$ выбирается так, что $\sqrt{z} > 0$ при $z > 0$. Таким образом, если q удовлетворяет (6) и

$$p^2(x) = o(q(x)), \; x \to \infty, \tag{9}$$

[1]Для некоторых операторов (например, для дифференциальных операторов в частных производных) главный член в разложении (1) удается получить только из (2), обращая функцию g.

то существуют положительные постоянные A, B и C, такие, что при $x > a, \lambda < -C$, $k, j = \overline{1,4}$

$$B \le \left| \frac{\mu_k(x,\lambda)}{\mu_j(x,\lambda} \right| \le A. \tag{10}$$

Условия (10) играют важную роль при выводе оценки (2) для квазидифференциальных операторов произвольного порядка [7, гл. VIII]. При нарушении этого условия асимптотическая структура ФСР уравнения (7) может сильно усложниться (см. [14] и имеющиеся там ссылки). Во-первых, эта сложность обусловлена тем, что характеристические корни на бесконечности растут «не в одну силу» («вырожденный» случай). Так, если $p(x) \to +\infty,\ x \to \infty$, и

$$q(x) = o(p^2(x)),\ x \to \infty, \tag{11}$$

то

$$\mu_{j+2}(x,\lambda) = o\left(\mu_j(x,\lambda)\right)\ (j = 1, 2),\ x \to +\infty.$$

Во-вторых, часть этих корней может слиться в один кратный корень в некоторых точках, которые и называют точками поворота. Как было отмечено выше, наличие последних доставляет особенно много хлопот при исследовании асимптотики ФСР (см. [11, 15] и дальнейшие ссылки). Более того, если

$$q(x) = x^\alpha,\ p(x) = \sqrt{x^{2\beta} + x^\gamma \cos x^\delta + x^\alpha},\ 0 < \alpha, \gamma < 2\beta,\ \delta > 0, \tag{12}$$

то из формул (8) видно, что при $\lambda = -r,\ r \gg 1$, уравнение (7), в зависимости от знака выражения $\delta + \gamma - 2\beta$, имеет конечное или бесконечное число точек поворота, определяемые уравнением $x^{2\beta} + x^\gamma \cos x^\delta = r$. Вблизи каждой точки поворота стандартные асимптотические оценки (ВКБ-оценки для уравнений второго порядка и их аналоги для уравнений и систем высших порядков [11]) не работают.

Поэтому при условии (11) и больших отрицательных λ приходится иметь дело со сложностями обоих типов. Тем не менее, метод Карлемана–Костюченко (для получения формулы (2)) в данной ситуации также применим, нужно только «выходить» в комплексную λ-плоскость (см. [14] а также [7]).

Однако, в «вырожденном» случае (конечно, при более детальной информации о поведении функций p и q) удается получить формулу (4), более сильную (при наложенных на p и q условиях), чем (2). При этом сложностей, связанных с наличием точек поворота, оказалось меньше, чем в задаче нахождения формулы (2)!

Существуют различные методы, благодаря которым удается преодолеть проблемы, связанные с точками поворота, и получить формулу (2) для операторов вида T. Один из них (см., например, [14, 16]) – упомянутый выше «выход» в комплексную λ-плоскость: исследование асимптотики функции Грина оператора T при больших λ из некоторого невещественного луча, исходящего из начала координат, и применение какой-либо тауберовой теоремы [8, 9, 17]. Другой метод, восходящий к работе Лангера [18], позволяет получить приближенное решение уравнения (7), пригодное как в точке поворота, так и вдали от нее. Этот метод одинаково эффективен как в самосопряженных, так и несамосопряженных спектральных задачах [15, 19, 20]. Именно благодаря методу Лангера удается получить формулу (4) с оценкой

$$\alpha_n = n^{-m},\ m = \mathrm{const} > 0, \tag{13}$$

в «вырожденном» случае (11), когда коэффициенты p и q имеют степенной рост и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям типа гладкости и регулярности поведения на бесконечности (Теорема 2). Подчеркнем еще раз: с одной стороны, оценки (4) и (13) несут гораздо больше информации об асимптотике спектра оператора T по сравнению с оценкой (2), с другой – для получения оценки (2) метод Лангера в некоторых случаях (как в примере (12)) может оказаться бессилен.

2. Формулировка основных результатов

На вещественнозначные функции p и q наложим следующие ограничения:

1) Существует $x_0 > 0$, что функции p и q суммируемы на $(0, x_0)$.

2) При $x \geq x_0$ ($x_0 \geq 0$ — постоянная) функции p и q имеют абсолютно непрерывные производные, удовлетворяющие неравенствам

$$a_1 x^{\alpha-1} \leqslant q'(x) \leqslant A_1 x^{\alpha-1}, b_1 x^{\beta-1} \leqslant p'(x) \leqslant B_1 x^{\beta-1}, \tag{14}$$

где $a_1, A_1, b_1, B_1, \alpha, \beta$ — положительные постоянные, причем

$$\alpha < 2\beta; \tag{15}$$

вторые производные функций p и q имеют постоянный знак (почти всюду).

Замечание 1. Из неравенств (14) следует, что при $x \geq x_1$ ($x_1 \geq x_0$)

$$ax^\alpha \leqslant q(x) \leqslant Ax^\alpha, bx^\beta \leqslant p(x) \leqslant Bx^\beta, \tag{16}$$

где a, A, b, B – положительные постоянные. Следовательно [10, § 24, Теорема 2], спектр всякого самосопряженного расширения минимального оператора, порожденного выражением (5), дискретен.

Ниже при некоторых дополнительных ограничениях на функции p и q мы получим двойную асимптотику [11, Гл. II, § 7] решений уравнения $\mathcal{L}(y) = \lambda y$, откуда, в частности, будет вытекать, что индекс дефекта минимального оператора T_0, порожденного в $L^2(0, +\infty)$ дифференциальным выражением $\mathcal{L}y$ [10, гл. V, § 17], равен (2,2). Последний факт влечет за собой самосопряженность оператора T.

Из соотношений (8) и неравенств (15), (16) видно, что уравнение (7) при каждом $\lambda \gg 1$ имеет единственную точку поворота a_λ, определяемую условием $q(a_\lambda) = \lambda$. В этой точке сливаются корни $\mu_{3,4}$, которые совпадают с характеристическими корнями для уравнения Штурма–Лиувилля

$$-y'' + \frac{q-\lambda}{p + \sqrt{p^2 + \lambda - q}} y = 0. \tag{17}$$

В работе [21] при условиях 1), 2) и $0 < \beta < \alpha + 2$ найдена асимптотика ФСР уравнения (7) при больших $\lambda > 0$, равномерная по $x \geq 0$. Используя эту асимптотику, было получено асимптотическое уравнение для спектра, позволяющее в случае $q(x) = x^\alpha, p(x) = x^\beta$ выписать несколько первых членов в разложении (4), (13).

При построении асимптотики ФСР оказалось, что два решения из ФСР допускают при больших λ равномерное по $x \geq 0$ приближение парой решений уравнения (17). В случае $\beta \geq \alpha + 2$ такое приближение становится непригодным в окрестности (своей для каждого $\lambda > 0$) бесконечности. Это связано с тем, что при $\beta \geq \alpha + 2$ точка $x = +\infty$ также является точкой поворота, потому для построения асимптотики решений уравнения (17) около бесконечности приходится выбирать другое эталонное уравнение. При выборе эталонного уравнения нам понадобится уже более подробная по сравнению с условием 2) информация о поведении функций p и q на бесконечности. А именно, мы будем предполагать, что p удовлетворяет следующему условию

3) на $[x_0, \infty)$ $p^{(k)}(x) = (x^\beta)^{(k)} + O\left(x^{\beta-k-\epsilon}\right)$, $k = 0, 1, 2$, $\varepsilon > 0$.

В случае $\beta = \alpha + 2$ мы потребуем выполнения еще одного условия

4) на $[x_0, +\infty)$ $q(x) = x^\alpha + O(x^{\alpha-\sigma})$, $\sigma > 0$.

Очевидно, функции вида

$$p(x) = x^\beta + R(x), q(x) = x^\alpha + V(x), \tag{18}$$

где $R, V \in C_0[0, +\infty)$, удовлетворяют условиям 1) – 4).

Теорема 1. *Пусть при $\beta \geq \alpha + 2$ выполнены условия 1) – 3), а при $\beta = \alpha + 2$ и условие 4). Тогда собственные числа оператора T с достаточно большими номерами определяются из уравнения*

$$\sin\Phi(\lambda) + K(\lambda)\cos\Phi(\lambda) + O(\lambda^{-\delta}) = 0, \tag{19}$$

где

$$\Phi(\lambda) = \sqrt{\lambda}\int_0^\infty \left(p + \sqrt{p^2+\lambda}\right)^{-1/2} dt + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2(\beta-2)}\sqrt{(\beta-1)^2 + 2C}, \tag{20}$$

$$C = \begin{cases} 0, & \beta > 2 + \alpha, \\ 1 & \beta = 2 + \alpha, \end{cases}, \tag{21}$$

$$K(\lambda) = -\frac{5}{72}\left(\Phi(\lambda) - \frac{\pi}{4}\right)^{-1} + \frac{1}{2}\int_0^{a_\lambda} |\nu_2|^{-1/2}\left(b^2 + b' - K(t,\lambda) + \frac{D'\nu_2'\nu_2}{8D^2}\right) dt, \tag{22}$$

$$b = \frac{p'}{2\sqrt{D}},\ \nu_2 = p - \sqrt{D},\ D = p^2 + \lambda - q, \tag{23}$$

$$\delta = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2(\beta-\alpha-2)}{\beta-2}, \dfrac{2\varepsilon}{\beta-2}\right\}, & \beta > \alpha+2, \\ \min\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2\sigma}{\beta-2}, \dfrac{3\varepsilon}{\beta-2}\right\}, & \beta = \alpha + 2. \end{cases} \tag{24}$$

Если функции p и q имеют вид (18), *то*

$$\delta = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\beta}, \dfrac{2(\beta-\alpha-2)}{\beta-2}\right\}, & \beta > \alpha + 2, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\beta}, & \beta = \alpha + 2. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть функции p и q имеют вид* (18). *Тогда спектр оператора T при $2 + \alpha < \beta < 2 + 2\alpha$ имеет асимптотику*

$$\lambda_k = m_k^{\frac{4\beta}{\beta+2}} + \frac{4\beta}{\beta+2}C_0^{-1}\left\{C_1 m_k^{\frac{2(\beta-1)}{\beta+2}} - C_2 m_k^{\frac{2(\beta-2)}{\beta+2}} + C_3 m_k^{\frac{((\beta-2)^2+2\alpha\beta)}{\beta^2-4}}\right\} + O\left(k^{-m}\right), \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned}
m_k &= C_0^{-1}\pi\left(k+\frac{\beta}{4(\beta-2)}\right),\\
C_0 &= \int_0^\infty\left(x^\beta+\sqrt{x^{2\beta}+1}\right)^{-1/2}dx,\ C_1=\frac{1}{2}\int_0^\infty R(x)dx,\\
C_2 &= \frac{\beta}{8}\int_0^\infty\left[\widetilde{\nu_2}^{1/2}\widetilde{D}^{-1/2}t^{\beta-2}\left(-2\beta\widetilde{D}^{-1}+\beta\widetilde{D}^{-2}-\frac{3}{4}\beta t^\beta\widetilde{D}^{-1/2}+1\right)+\right.\\
&+ \left.\frac{3\beta-4}{(\beta-2)^2}\widetilde{Q}^{-2}\widetilde{\nu}^{-1/2}\right]dt-\frac{(3\beta-4)\beta}{8(\beta-2)^2}C_0^{-1},\\
\widetilde{\nu} &= t^\beta+\sqrt{\widetilde{D}},\ \widetilde{D}=t^{2\beta}+1,\ \widetilde{Q}=\int_t^\infty\widetilde{\nu}^{-1/2}dt,\ \gamma=\frac{\beta-1}{\beta-2},\\
C_3 &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\beta-2}{\sqrt{2}}\right)^{-2\alpha/(\beta-2)}\int_0^\infty t^{-2\alpha/(\beta-2)+1}J_\gamma^2(t)dt,\ J_\gamma - \text{функция Бесселя первого рода},\\
m &= \min\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta},\frac{3}{4},\ \frac{2(\beta-\alpha-2)}{\beta-2},\ \frac{1}{2}+\frac{\beta-\alpha-2}{\beta-2}\right\}-\frac{3\beta-2}{\beta+2}.
\end{aligned}$$

При $\beta\geq 2+2\alpha$ имеют место аналогичные формулы.

3. Доказательство теоремы 1

3.1. Приведение основного уравнения к каноническому виду. Введем обозначения. Пусть $\chi(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице на $[0,x_0]$ и нулю на $[x_0+1,\infty)$. Положим

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= p(x)(1-\chi(x)),\quad q_1(x)=q(x)(1-\chi(x)),\\
f(x,\lambda,\mu) &= \mu^4-2p_1\mu^2+q_1-\lambda,
\end{aligned}$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&2p_1&0&-1\\q_1-\lambda&0&0&0\end{pmatrix},\quad A_2=\chi\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&2p&0&0\\q&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Далее пусть $Y=(y,y^{[1]},y^{[2]},y^{[3]})^T$, где $y^{[k]}$ означает k-ую квазипроизводную [10, с. 182]. Тогда уравнение $\mathcal{L}y=\lambda y$ эквивалентно системе уравнений

$$Y'=(A_1+A_2)Y. \tag{26}$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$\begin{aligned}
A_0 &= \operatorname{diag}(A_{01},A_{02}),\\
A_{01} &= \sqrt{\nu_1}\operatorname{diag}(1,-1),\quad A_{02}=\begin{pmatrix}0&1\\ \nu_2&0\end{pmatrix}, && (27)\\
T &= D^{-1/4}\begin{pmatrix}I_2&I_2\\ \Lambda_1&\Lambda_2\end{pmatrix}\operatorname{diag}(MW,I_2), && (28)
\end{aligned}$$

I_n — единичная матрица n-го порядка,

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \operatorname{diag}(\nu_1,-\nu_2),\quad \Lambda_2=\operatorname{diag}(\nu_2,-\nu_1),\\
W &= \begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},\quad M_1=\operatorname{diag}(\nu_1^{-1/4},\nu_1^{1/4}),\\
B_1 &= -T^{-1}T',\qquad B_2=T^{-1}A_2T. && (29)
\end{aligned}$$

Далее пусть

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, \\
X_{11} &= -\frac{1}{2}A_{01}^{-1}B_{11}, \quad X_{22} = -\frac{p}{2\sqrt{D}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
X_{12} &= -\frac{1}{2\sqrt{D}}\left(A_{01}(B_{12} + B_{12}A_{02}\right), \\
X_{21} &= -\frac{1}{2\sqrt{D}}\left(B_{21}A_{01} + A_{02}B_{21}\right).
\end{aligned} \tag{30}
$$

Легко проверяются соотношения

$$T^{-1}AT = A_0, \quad XA_0 - A_0X = B_1.$$

Тогда подстановка

$$Y = T(I_4 + X)V$$

приводит уравнение (26) к виду

$$V' = (A_0 + Z_1)V, \tag{31}$$

где

$$Z_1 = (I_4 + X)^{-1}(B_1X - X' + B_2(I_4 + X)). \tag{32}$$

3.2. Эталонные решения. Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
\xi &= \left(\frac{\beta - 2}{2}\int_x^\infty \frac{dt}{\nu^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2/(\beta-2)}, \ \nu = p_1 + \sqrt{p_1^2 + \lambda}, \\
B &= (\xi')^{-1/2}, \ Q_1 = \int_0^x \nu_1^{1/2}dt, \ Q_2 = \sqrt{\lambda}\int_x^\infty \frac{dt}{\nu^{1/2}}.
\end{aligned}
$$

Эталонные решения возьмем в виде

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \operatorname{diag}(V_{01}, V_{02}), \\
V_{01} &= \operatorname{diag}(\exp Q_1, exp(-Q_1)), \ V_{02} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}, \\
v_1 &= B\xi^{\frac{1}{2}}J_\gamma(Q_2), \ v_2 = B\xi^{\frac{1}{2}}Y_\gamma(Q_2), \\
\gamma &= \begin{cases} \frac{\beta-1}{\beta-2}, & \beta > \alpha + 2, \\ \frac{\sqrt{(\beta-1)^2+2}}{\beta-2} & \beta = \alpha + 2, \end{cases}
\end{aligned}
$$

Здесь J_γ и Y_γ – функции Бесселя соответственно первого и второго родов [22]. Тогда

$$V_0' = (A_0 + Z_2)V_0, \tag{33}$$

где

$$
\begin{aligned}
Z_2 &= \operatorname{diag}(0, Z_0), \\
Z_0 &= \left[\left(\frac{\beta(\beta-2)}{4} + \frac{C}{2}\right)\left(\frac{\xi'}{\xi}\right)^2 + \frac{B''}{B} - \frac{q_1}{\nu_1}\left(1 - \frac{\lambda}{\nu(\sqrt{D} + \sqrt{p_1^2 + \lambda})}\right)\right]\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

постоянная C определена по формуле (21).

Введем в рассмотрение функции

$$\varphi = \frac{\lambda}{\nu}, \ p_0 = \begin{cases} \sqrt{\varphi}, & x \leqslant b_\lambda, \\ \frac{1}{x}, & x > b_\lambda, \end{cases},$$

где b_λ – корень уравнения $\sqrt{\lambda}Q_2(b_\lambda,\lambda)=1$ (легко видеть, что при достаточно больших $\lambda>0$ b_λ определяется однозначно);

$$\begin{aligned}
P &= \mathrm{diag}(1,1,1,p_0),\ D=\mathrm{diag}(D_1,D_2), && (34)\\
D_1 &= V_{01},\ D_2=\left\{\begin{array}{ll}\mathrm{diag}\left(\lambda^{\gamma/2}\xi^{-r},\lambda^{-\gamma/2}\xi^{r}\right), & x>b_\lambda,\\ \varphi^{-\frac14}I_2 & x\leqslant b_\lambda,\end{array}\right. , && (35)\\
r &= \frac12\left(\sqrt{(\beta-1)^2+2C}+1\right),\\
\widetilde{V_0} &= P^{-1}V_0D^{-1},\ \widetilde{V}=P^{-1}VD^{-1}. && (36)
\end{aligned}$$

Тогда $\widetilde{V_0}=\mathrm{diag}(I_2,\widetilde{V_{02}})$, причем (см. [22, § 7.13]) при $x\leqslant M^{-1}\lambda^{1/(\beta-2)}$ $(M\gg 1)$

$$\begin{aligned}
\widetilde{V_{02}} &= \sqrt{\frac{\beta-2}{\pi}}\begin{pmatrix}\cos\Phi_1 & \sin\Phi_1\\ \sin\Phi_1 & -\cos\Phi_1\end{pmatrix}\times\\
&\times\left[I_2+\frac12\left(\gamma^2-\frac14\right)\left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+O\left(\varphi^{-1/2}\frac{\nu'}{\nu}+\frac{1}{\lambda Q_2^2}\right)\right], && (37)\\
\Phi_1 &= Q_2-(2\gamma+1)\pi/4.
\end{aligned}$$

Кроме того, для достаточно больших $M>0,\Lambda_0>0$ найдутся положительные постоянные C_1,C_2, такие, что

$$C_1<|\widetilde{V_{02}}(x,\lambda|<C_2\ \forall\, x\geq M\lambda^{1/(\beta-2)},\lambda\geq\Lambda_0.$$

3.3. Интегральное уравнение.

Имеем (см. (31) и (33))

$$V=V_0+\int_{\Gamma(x)}V_0(x,\lambda)V_0(t,\lambda)Z(t,\lambda)V(t,\lambda)dt,$$

где

$$Z=Z_1-Z_2.$$

Умножив обе части этого уравнения слева и справа соответственно на P^{-1} и D^{-1} (см. (36)), получим уравнение для $\widetilde{V}$

$$\widetilde{V}=\widetilde{V_0}+A(\lambda)\widetilde{V}, \tag{38}$$

где оператор $A(\lambda)$ действует по формуле

$$\begin{aligned}
(A(\lambda)\widetilde{V})(x,\lambda) &= \widetilde{V_0}(x,\lambda)\int_{\Gamma(x)}A(x,t,\lambda)\widetilde{V}(t,\lambda)D(t,\lambda)D^{-1}(x,\lambda)dt=:\\
&=:\ \widetilde{V_0}(x,\lambda)A_1(\lambda)\widetilde{V}, && (39)\\
A(x,t,\lambda) &= D(x,\lambda)D^{-1}(t,\lambda)(\widetilde{V_0}^{-1}P^{-1}ZP)(t,\lambda). && (40)
\end{aligned}$$

Матрицу $\Gamma(x)=((\gamma_{ij},x))$, где (γ_{ij},x) – интервал, по которому интегрируется элемент, стоящий на пресечении i-й строки и j-го столбца подынтегральной матрицы, выберем следующим образом: $\gamma_{ij}=+\infty$ при $(i,j)=(3,2),(4,2),(4,3)$ и $\gamma_{ij}=0$ при остальных (i,j). Из определения (34) – (35) матрицы D следует, что при таком выборе все экспоненциальные множители в (40) ограничены. Тогда для нормы оператора $A(\lambda)$ в пространстве Z справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\|A(\lambda)\| &= O(I(\lambda)),\ I(\lambda)=\int_0^\infty\|G(t,\lambda)\|\,dt, && (41)\\
G(t,\lambda) &= P^{-1}(t,\lambda)Z(t,\lambda)P(t,\lambda).
\end{aligned}$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$G(t,\lambda)=\mathrm{diag}(0,G_0)+O(g), \tag{42}$$

где

$$
\begin{aligned}
G_0 &= \begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ g_2 & 0 \end{pmatrix}, \\
g &= \nu_1^{-\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{\nu_1'}{\nu_1} \right)^2 + \frac{\nu_1''}{\nu_1} \right), \\
g_1 &= \frac{1}{8} \frac{p_0}{\sqrt{D}} \left(\frac{D'}{D} \frac{\nu_1'}{\sqrt{D}} + 8\chi p \right), && (43) \\
g_2 &= \frac{1}{4p_0} \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{\nu'}{\nu} \right)^2 + \frac{\nu''}{\nu} - \frac{\beta(3\beta-4)+8c}{(\beta-2)^2} \lambda Q_2^{-2} \nu^{-1} - \frac{4q}{\nu_1} \right). && (44)
\end{aligned}
$$

Лемма 1. *Пусть функции p и q удовлетворяют условиям 1) – 3), а в случае $\beta = \alpha+2$ и условию 4). Тогда*

$$
\begin{aligned}
I(\lambda) &= O(\lambda^{-m}), \ \lambda \to +\infty, && (45) \\
m &= \begin{cases} \min\{1/4, (\beta-\alpha-2)/(\beta-2), \varepsilon/(\beta-2)\}, & \beta > \alpha+2, \\ \min\{1/4, \sigma/(\beta-2), \varepsilon/(\beta-2)\}, & \beta = \alpha+2, \end{cases}
\end{aligned}
$$

где σ и ε положительные постоянные, фигурирующие в условиях 3) и 4).

Доказательство. Из соотношений (41) и (42) имеем

$$
I(\lambda) = O\left(\int_0^\infty (g + |g_1| + |g_2|) dt \right).
$$

Элементарные оценки, основанные на неравенствах (14) и (16) и условии 2), показывают, что

$$
\int_0^\infty (g + |g_1|) dt = O\left(\lambda^{-1/4 - 1/2\beta} \right), \ \lambda \to +\infty.
$$

Для оценки интеграла $I_1(\lambda) = \int\limits_0^\infty |g_2|\, dt$ разобьем его на два интеграла

$$
I_1 = \left\{ \int_0^{c_\lambda} + \int_{c_\lambda}^\infty \right\} |g_2|\, dt = I_{11} + I_{12}, \ c_\lambda = \lambda^{1/2\beta},
$$

и заметим, что из условий 3) и 4) следует

$$
\begin{aligned}
g_2 &= O\left(x^{-2} \left(x^{-\delta} + \lambda x^{-2\beta} \right) \right), \ c_\lambda^{-1} x \to \infty, \\
\delta &= \begin{cases} \min\{\varepsilon, \beta-\alpha-2\}, & \beta > \alpha+2, \\ \min\{\varepsilon, \sigma\}, & \beta = \alpha+2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Отсюда легко следует (45). □

Три числа, которые определяют m в (45), имеют различную природу. Первое число зависит от гладкости функции p в окрестности нуля. Второе число ($(\beta-\alpha-2)/(\beta-2)$ или $\sigma/(\beta-2)$) обусловлено выбором эталонных решений и в этом смысле характеризует точность метода. Последнее из чисел определяется относительной малостью функции $R(x) = p(x) - x^\beta$ в окрестности бесконечности. В предельном случае, если предположить финитность функции $R(x)$, то в (46) исчезнет ϵ. Если дополнительно предположить финитность $V = q - x^\alpha$ в условии 4), то при $\beta = \alpha + 2$

$$
g_2 = O(\lambda x^{-2-2\beta}), c_\lambda^{-1} x \to \infty.
$$

Таким образом, справедлива

Лемма 2. *Пусть функции p и q имеют вид* (18). *Тогда*

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= O(\lambda^{-m}),\ \lambda\to\infty,\\ m &= \begin{cases} \min\{1/4+1/2\beta,(\beta-\alpha-2)/(\beta-2)\}, & \beta>\alpha+2,\\ 1/4+1/2\beta, & \beta=\alpha+2,\end{cases}\end{aligned}$$

3.4. Завершение доказательства теоремы 1. Из леммы 1 следует, что при $\lambda\to\infty$ равномерно по $x\geq 0$

$$Y(x,\lambda)=TP(I_4+o(1))\widetilde{V}_0(I_4+o(1))D(x,\lambda), \tag{46}$$

так что индексы дефекта минимального оператора T_0 равны (2.2). Значит, оператор T самосопряжен, а уравнение для собственных чисел имеет вид

$$\det\left[C_2\widetilde{V}(0,\lambda)\left(E_4+A_1(\lambda)\widetilde{V}_0(0,\lambda)+O(I^2(\lambda)\right)C_1^T\right]=0, \tag{47}$$

где

$$C_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что $[A_1(\lambda)\widetilde{V}_0C_1^T](0,\lambda)$ имеет вид

$$\left(A_1(\lambda)\widetilde{V}_0C_1^T\right)(0,\lambda)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\0&0\\\alpha_{31}&0\\\alpha_{41}&\alpha_{42}\end{pmatrix}, \tag{48}$$

причем

$$\alpha_{42}=\frac{\pi}{\beta-2}\int_0^\infty(g_1\omega_{12}\omega_{21}-g_2\omega_{11}^2)f(t,\lambda)dt+O(|\beta(\lambda)|),$$

где ω_{ij} означают элементы матрицы $\widetilde{V_{02}}$,

$$\begin{aligned} f(t,\lambda) &= \left\{\begin{array}{ll}1, & t\leqslant b_\lambda,\\ \lambda^\gamma\xi^{-(\beta-1)}(t,\lambda), & t>b_\lambda,\end{array}\right\}, \\ \beta(\lambda) &= \lambda^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty\left(\frac{q_1'p_1p_1'}{(p_1^2+\lambda)^{\frac{7}{4}}}+\frac{q_1''}{(p_1^2+\lambda)^{\frac{3}{4}}}\right)dt,\end{aligned} \tag{49}$$

все остальные ненулевые элементы в (48) удовлетворяют оценке

$$\alpha_{ij}=O\left(\lambda^{-1/4}\int_0^{x_0+1}|\chi p|\exp(-\delta_0Q_1)dt\right)+O\left(\lambda^{-3/4}\right)+O\left(Q_2^{-2}(0,\lambda)\right),(i,j)\neq(4,2). \tag{50}$$

Но

$$\beta(\lambda)=O\left(\lambda^{-\frac{3}{4}-\frac{\beta-\alpha-1}{2\beta}}\right),$$

следовательно, уравнение (47) можно записать в виде

$$\omega_{11}(0,\lambda)+\alpha_{42}(\lambda)\omega_{12}(0,\lambda)+O(I^2(\lambda)+Q_2^{-2}(0,\lambda))=0. \tag{51}$$

Пусть

$$K(\lambda)=\frac{\beta(3\beta-4)+8c}{8(\beta-2)^2}Q_2^{-1}(0,\lambda)+\frac{\pi}{\beta-2}\int_0^\infty(g_1\omega_{21}\omega_{12}-\omega_{11}^2g_2)f(t,\lambda)dt, \tag{52}$$

где $C,f(t,\lambda),g_1,g_2$ определены соответственно по (21), (49), (43), (44). Тогда, заменяя в (52) ω_{11} и ω_{12} их асимптотиками согласно (37), получим уравнение (19). Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 2

4.1. Параметр квантования. Из уравнения (19) следует, что

$$\Phi(\lambda_k) = \nu_k \pi + o(1), k \to \infty, \tag{53}$$

где $\nu_k = \nu_k(\alpha, \beta)$ – целое положительное число – параметр квантования. Покажем, что $\nu_k(\alpha, \beta) = k$.

Пусть $\lambda_k(\beta)$ – k-е собственное число оператора T при $p = x^\beta$, $q = 0$ и пусть $\{\mu_k\}_1^\infty$ – спектр задачи

$$y^{(4)} = \lambda y, \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{54}$$

$$y(0) = y''(0) = 0, \ y(1) = y'(1) = 0. \tag{55}$$

Лемма 3. *При каждом фиксированном* k

$$\lambda_k(\beta) \to \mu_k, \ \beta \to +\infty.$$

Доказательство. Из леммы 2 работы [12] следует, что квадратичная форма оператора T имеет вид

$$\begin{aligned} l[y] &= \int_0^\infty (|y''|^2 + 2x^\beta |y'|^2) dx, \\ D(l) &= \left\{ y \in L^2(0,\infty) : \ y, y' \in AC[0,+\infty), y'' \in L^2(0,\infty), y(0) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $y_k(\beta) = y_k(\beta, x)$ и $z_k = z_k(x)$ k-ю нормированную собственную функцию оператора T и задачи (54) – (55) соответственно. Тогда если z_k продолжить нулем на $[1,\infty)$, то $z_k \in D(l)$ и $l[z_k] = \mu_k + \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k = \int\limits_0^1 2x^\beta |f_k'|^2 dx$. Отсюда в силу вариационного принципа [13, гл. XIII, теорема XIII.3] заключаем, что

$$\lambda_k(\beta) \leqslant \mu_k + \varepsilon_k \ (k = 1, 2, \dots), \tag{56}$$

и при каждом фиксированном k $\varepsilon_k \to +0$ при $\beta \to +\infty$. Далее, из неравенств

$$\begin{aligned} \int_1^\infty x^\beta |y_k'(\beta, x)|^2 dx &\leqslant \mu_k + \varepsilon_k, \\ \int_1^\infty |y_k''(\beta, x)|^2 dx &\leqslant \mu_k + \varepsilon_k, \end{aligned}$$

проведя несложные выкладки, будем иметь, что при каждом фиксированном k

$$y_k(1) = o(1), \ y_k'(1) = o(1), \ \beta \to +\infty. \tag{57}$$

Но

$$\int_0^1 |y_k''(\beta, x)|^2 dx < \lambda_k(\beta),$$

откуда, учитывая (57), заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется положительное число $B(k, \varepsilon)$, такое, что при всех $\beta > B(k, \varepsilon)$ найдется функция v_k из области определения квадратичной формы (54) – (55), для которой

$$\int_0^1 |v_k''|^2 dx < \lambda_k(\beta) + \varepsilon.$$

Из последнего соотношения, снова применяя вариационный принцип, получим

$$\mu_k \leqslant \lambda_k(\beta) + \varepsilon, \ \beta > B(k, \varepsilon).$$

Отсюда и из неравенства (56) получаем утверждение леммы. □

Лемма 4. *При каждом* $\beta > 2$

$$\Phi(\lambda_k(\beta)) = k\pi + o(1),\ k \to \infty.$$

Доказательство. Уравнение для собственных чисел задачи (54) – (55) имеет вид

$$\sin\left(\mu^{1/4} - \pi/4\right) + \exp\left(-2\mu^{1/4}\right)\cos\left(\mu^{1/4} - \pi/4\right) = 0,$$

откуда, применяя теорему Руше, получаем

$$\mu_k^{1/4} = \pi\,(k + 1/4) + o(1),\ k \to +\infty.$$

Но при $\beta \to \infty$ (см.(20))

$$\Phi(\lambda) = \lambda^{1/4} - \frac{\pi}{4} + o(1),$$

так что в (53) $\nu_k(\beta) = k$ при достаточно больших β. Согласно теореме 1 из [12] функция $\lambda_k(\cdot)$ непрерывна на $(2,\infty)$, следовательно, функция $\nu_k(\cdot)$ также непрерывна на $(2,\infty)$, так что $\nu_k(\beta) = k$ при всех $\beta > 2$. □

Лемма 5. *Пусть* $\lambda_k(\alpha,\beta)_1^\infty$ *– собственные числа оператора* T *при* $q(x) = x^\alpha$, $p = x^\beta$. *Тогда*

$$\Phi(\lambda_k(\alpha,\beta)) = k\pi + o(1),\ k \to \infty.$$

Доказательство. Так как $\lambda_k(\alpha,\beta)$ непрерывна на $\Omega = \{\beta \geq 2+\alpha,\ \alpha > -1\} \cup \{\beta > 2\}$ (см. теорему 1 из [12]) и член $o(1)$ в (53) является малым равномерно по любому компакту K из Ω, то $\nu_k(\alpha,\beta)$ непрерывна на Ω. Но $\nu_k(0,\beta) = k$ (лемма 15), следовательно, $\nu_k(\alpha,\beta) = k$ в Ω. □

4.2. Завершение доказательства теоремы 2.

Имеем

$$Q_2(0,\lambda) = \lambda^{1/4+1/2\beta}\int_0^\infty \left(t^\beta + \sqrt{t^{2\beta}+1}\right)^{-1/2} dt = C_0\lambda^{1/4+1/2\beta},$$

так что задача сводится к изучению асимптотики $K(\lambda)$. Заменяя в интеграле (52) $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{21}$ их асимптотиками согласно (37), произведя далее замену переменных $t \longmapsto \lambda^{1/2\beta}\tau$, получим (считаем $\chi = 0$ в (43))

$$\begin{aligned} K(\lambda) &= -C_1\lambda^{-1/4} + C_2\lambda^{-1/4-1/2\beta} + k(\lambda) + O(\lambda^{-1/2-1/2\beta}),\\ k(\lambda) &= \frac{\pi}{\beta-2}\int_0^\infty p_0^{-1} q \nu^{-1}\omega_{11}^2 f(t,\lambda)dt. \end{aligned}$$

Из определения $\widetilde{V}_0(x,\lambda)$ (см. (36)) имеем

$$k(\lambda) = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \lambda^{-1/2} q\nu^{-1/2} Q(t,\lambda) J_\gamma^2\left(\sqrt{\lambda}Q\right)dt,$$

где

$$Q = \int_t^\infty \nu^{-1/2}dt.$$

Пусть $\beta < 2\alpha + 2$. Тогда, разбивая интеграл $k(\lambda)$ на сумму

$$k(\lambda) = \frac{\pi}{2}\left[\int_0^{c_\lambda} + \int_{c_\lambda}^\infty\right]\lambda^{-1/2} q\nu^{-1/2} Q J_\gamma^2\left(\sqrt{\lambda}Q\right)dt,$$

где $c_\lambda = b_\lambda\lambda^{-\varepsilon},\ 0 < \varepsilon < \dfrac{1}{\beta-2} - \dfrac{1}{2\beta}$, и заменяя в первом интеграле $J_\gamma\left(\sqrt{\lambda}Q\right)$ ее асимптотикой, а во втором – q на основании условий 3) и 4) выражением $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\beta-2}Q\right)^{-2\alpha/(\beta-2)}$, получим

$$k(\lambda) = C_3\lambda^{-(\beta-\alpha-2)/(\beta-2)} + O\left(\lambda^{-1/2-(\beta-\alpha-2)/(\beta-2)}\right).$$

Подставляя теперь K в уравнение (19) и разрешая его относительно λ с учетом леммы 5, получим (25). Теорема доказана.

Замечание 2. Случай $\beta \geq 2\alpha + 2$ отличается от рассмотренного лишь асимптотикой интеграла $k(\lambda)$. Легко видеть, что при $\beta > 2\alpha + 2$

$$k(\lambda) \sim \mathrm{const} \cdot \lambda^{-1/2-(\beta-2-2\alpha)/4\beta},$$

так что член $C_3 m_k^{-1/2+2\alpha\beta/(\beta^2-4)}$ в (25) следует заменить на член вида $\mathrm{const} \cdot m_k^{-1/2+\alpha/(\beta+2)}$. При $\beta = 2\alpha + 2$ $k(\lambda) = \mathrm{const} \cdot \lambda^{-1/2} \ln \lambda$, что приводит к появлению в (25) члена вида $\mathrm{const} \cdot m_k^{-2/(\beta-2)} \ln m_k$.

Теорема 3. *Пусть функции p и q имеют вид (2.48), причем $\beta = \alpha + 2$. Тогда*

$$\lambda_k = m_k^{\frac{4\beta}{\beta+2}} + \frac{4\beta}{\beta+2} C_0^{-1} \left\{ C_1 m_k^{\frac{5\beta-4}{2(\beta+2)}} - C_2 m_k^{\frac{2(\beta-2)}{\beta+2}} \right\} + O(k^{-m}),$$

где $m_k = C_0^{-1}\pi \left(k - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{(\beta-1)^2+2}}{2(\beta-2)} \right)$, *постоянные C_0, C_1 определены так же, как в случае $\beta > 2 + \alpha$*

$$C_2 = \frac{\beta}{8} \int_0^\infty \left[\widetilde{\nu}^{1/2} \widetilde{D}^{-1/2} t^{\beta-2} \left(-\frac{2\beta}{\widetilde{D}} + \frac{\beta}{\widetilde{D}^2} - \frac{3\beta t^\beta}{\sqrt{\widetilde{D}}} + 1 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{3(\beta-4)\beta+8}{\beta(\beta-2)^2} \widetilde{Q}^{-2} \widetilde{\nu}^{-1/2} - 8t^{\beta-2}\widetilde{\nu}^{-1} \right] dt - \frac{3(\beta-4)\beta+8}{(\beta-2)^2} C_0^{-1},$$

$$m = \min\left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}, \frac{3}{4}, \frac{2(\beta-2-\alpha)}{\beta-2} \right\} - \frac{3\beta-2}{\beta+2}.$$

Доказательство. Рассуждая так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, будем иметь

$$K(\lambda) = -C_1\lambda^{-1/4} + C_2\lambda^{-1/4-1/2\beta} + O\left(\lambda^{-1/2-1/\beta}\right),$$

отсюда и следует утверждение теоремы. □

5. О плотности собственных и сингулярных чисел несамосопряженного ангармонического осциллятора

Пусть $H(\alpha, \theta)$ – оператор, действующий в $L^2(0, +\infty)$ по правилу

$$D(H(\alpha,\theta)) = \{y \in L^2(0,+\infty): \ y, y' \in AC[0,+\infty), \\ -y'' + e^{i\theta}x^\alpha y \in L^2(0,+\infty), y(0) = 0\}, \tag{58}$$

$$H(\alpha,\theta)y = -y'' + e^{i\theta}x^\alpha y. \tag{59}$$

Здесь $\theta \in (-\pi, \pi), \alpha \in (0, +\infty)$ – постоянные, $AC[0, +\infty)$ – множество функций, абсолютно непрерывных на любом отрезке $[0, a], a > 0$. Оператор $H(\alpha, \theta)$ принято называть *несамосопряженным ангармоническим осциллятором* [23].

Оператор $H(\alpha, \theta)$ был предметом исследования многих авторов (см. [20, 23–26] и имеющуюся там библиографию). Известно (см. [20, 24]), что при каждом $|\theta| < \pi$ спектр $H(\alpha, \theta)$

дискретен, все собственные числа простые (алгебраической кратности 1), лежат на луче $\arg z = 2\theta/(2+\alpha)$:

$$\lambda_n(\alpha,\theta) = \lambda_n(\alpha,0)e^{2\theta i/(2+\alpha)}, \tag{60}$$

$$\lambda_n(\alpha,0) \sim \left(\frac{\pi}{\int_0^1 \sqrt{1-t^\alpha}dt}\right)^{2\alpha/(2+\alpha)} \cdot n^{2\alpha/(2+\alpha)}, \ n\to\infty. \tag{61}$$

Как показано в [23], $\|(H(\alpha,\theta) - re^{i\beta})^{-1}\| \to \infty$, $r \to +\infty$, равномерно по $\beta \in \left[\delta, \frac{2\theta}{2+\alpha} - \delta\right] \cup \left[\frac{2\theta}{2+\alpha} + \delta, \theta - \delta\right]$, $\delta > 0$. Следовательно, для каждого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдется $R_\delta > 0$, что *ε-псевдоспектр* оператора $H(\alpha,\theta)$

$$\sigma_\varepsilon(H(\alpha,\theta)) = \sigma(H(\alpha,\theta)) \cup \left\{z \in \mathbb{C}\setminus\sigma(H(\alpha,\theta)) : \ \left\|(H(\alpha,\theta)-z)^{-1}\right\| \geq \varepsilon^{-1}\right\}$$

целиком содержит сектора

$$\left\{re^{i\beta} : \ r > R_\delta, \ \delta \leq \beta \leq \frac{2\theta}{2+\alpha} - \delta\right\} \text{ и } \left\{re^{i\beta} : \ r > R_\delta, \ \frac{2\theta}{2+\alpha} + \delta \leq \beta \leq \theta - \delta\right\}.$$

Согласно известной [27] формуле

$$\sigma_\varepsilon(T) = \overline{\left\{\bigcup_{\|V\|\leq\varepsilon} \sigma(T+V)\right\}}.$$

Это означает, что оператор $H(\alpha,\theta)$ является спектрально неустойчивым: его спектр может сильно меняться при весьма малых возмущениях [28]. При исследовании спектральных свойств возмущений таких операторов традиционными (для самосопряженного случая) методами, основанными на тауберовых теоремах (см. [9]), важна оценка для плотности так называемых сингулярных чисел – собственных чисел абсолютной величины оператора: $|H(\alpha,\theta)| = \sqrt{H(\alpha,\theta)^* H(\alpha,\theta)}$. Легко проверить, что $M := H(\alpha,\theta)^* H(\alpha,\theta)$ представляет собой самосопряженный оператор, порожденный в $L^2(0,+\infty)$ дифференциальным выражением $\bar{l}(ly)$ и краевыми условиями $y(0) = y''(0) = 0$, где $ly = -y'' + qy$, $\bar{l}y = -y'' + \bar{q}y$. Уравнение $My = sy$ с помощью стандартной замены $Y = (y, ly, y', (ly)')^t$ сводится к спектральной задаче

$$\begin{aligned} Y' &= AY, \\ Y_1(0) &= Y_3(0) = 0, \end{aligned} \tag{62}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ q & -1 & 0 & 0 \\ -s & \bar{q} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A имеют вид $\pm\sqrt{\cos\theta r \pm \sqrt{s - \sin^2\theta r^2}}$, так что при больших $s > 0$ уравнение (62) имеет 2 точки поворота, в которых сливается одна или две пары собственных значений. Эти точки порождают дополнительные трудности при исследовании асимптотики решений уравнения (62), но они носят чисто технический характер и преодолеваются, как выше, с помощью метода эталонных уравнений. В отличие от уравнения (7), обе точки поворота уравнения (62) конечны, поэтому эталонные решения, соответствующие этим точкам, должны выражаться через функции Эйри. Не вдаваясь в подробные вычисления, отметим только, что благодаря коэрцитивной оценке

$$(My, y) \geq (1-\delta)\left(\|y''\|^2 + \|ry\|^2\right) - C_\delta\|y\|^2,$$

где $0 < \delta = \delta(\theta) < 1, C_\delta > 0, r = x^\alpha$, можно получить нужную (см. теорему 1 из [9]) оценку

$$\liminf_{\lambda\to+\infty} \frac{N(H(\alpha,\theta),\lambda)}{N(|H(\alpha,\theta)|,\lambda)} > 0.$$

Подчеркнем еще раз, что, вычисляя по аналогии с пп. 4, 5 хотя бы первый член асимптотики спектра оператора M, либо пользуясь тауберовой техникой как в работе [17], можно показать, что

$$N(|H(\alpha,\theta)|,\lambda) \sim \mathrm{const}\cdot\lambda^{2\alpha/(2+\alpha)},\ \ \lambda\to+\infty. \tag{63}$$

В связи с этим отметим работу [29], в которой формула (63) установлена для произвольного диссипативного оператора A из класса Неймана–Шаттена $\mathfrak{S}_p$ при $p \le \pi/2\theta_A$, где θ_A – раствор угла, с которым совпадает область:

$$Num(A) = \{(Af,f):\ f\in D(A), \|f\| = 1\}.$$

В нашем случае последнее требование отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. V. Buldygin, O. I. Klesov, J. G. Steinebach. *Properties of a Subclass of Avakumovic Functions and Their Generalized Inverses* // Ukr. Math. Jour. V. 54. № 2. 2002. P. 179–206.
2. V. V. Buldygin, O. I. Klesov, J. G. Steinebach. *On some extensions of Karamata's theory and their applications* // Publ. Inst. Math. Nouv. Ser. V. 80(94). 2006. P. 59–96.
3. J. Karamata. *Sur un mode de croissance régulière des fonctions* // Mathematica (Cluj). V. 4. 1930. P. 33–53.
4. Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции.* М.: Наука. 1985. 144 с.
5. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J.L. Teugels. *Regular Variation. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 27.* Cambridge: Cambridge University Press. 1987. 491pp.
6. T. Carleman. *Über die asymptotische Verteilung der Eigenverte partieller Differentialgleichungen* // Ber. Sachs. Acad. Wiss. Leipzig. V. 88. 1936. P. 119-132.
7. Костюченко А.Г., Саргсян И.С. *Распределение собственных значений.* М.: Наука. 1979.
8. Шкаликов А. А. *Теоремы тауберова типа о распределении нулей голоморфных функций* // Матем. сб. Т. 123(165). № 3. 1984. С. 317–347.
9. Ишкин Х. К. Об условиях локализации спектра операторов, не близких к самосопряженным // Докл. АН. Т. 479, № 5. 2018. С. 1–4.
10. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука. 1969.
11. Федорюк М. В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука., 1983.
12. Kh. Ishkin. *On continuity of the spectrum of a singular quasi-differential operator with respect to a parameter* // Eurasian Math. J. V. 2. № 3. 2011. P. 67–81.
13. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* Т. 4. М.: Мир. 1982.
14. Султанаев Я. Т. *Асимптотика спектра сингулярных дифференциальных операторов в неопределенном случае* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех. № 3. 1975. С. 21–30.
15. Ишкин Х. К. *Асимптотика спектра и регуляризованный след сингулярных дифференциальных операторов высшего порядка* // Дифференц. уравнения. Т. 31. № 10. 1995. С. 1658–1668.
16. Розенблюм Г. В, Соломяк М. З., Шубин М. А. *Спектральная теория дифференциальных операторов. Уравнения в частных производных - 7.* Итоги науки и техники. Сер. соврем. пробл. Мат. Фунд. напр. Т. 64. М.: ВИНИТИ. 1989. С. 5–242.
17. Султанаев Я. Т. *Двусторонняя Тауберова теорема для отношений* // Изв. вузов. Матем. Т. 140. № 1. 1974. С 103–112.
18. R. E. Langer. *The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order with special reference to the Stokes' phenomenon* // Bull. Amer. Math. Soc. V. 40. 1934. P. 545–582.

19. Евграфов М. А., Федорюк М. В. *Асимптотика решений уравнения* $w''(z) + p(z,\lambda)w(z) = 0$ *при* $\lambda \to \infty$ *в комплексной плоскости* z // Успехи мат. наук. Т. 21, вып. 1. 1966. С. 3–50.
20. Ишкин Х. К. *О спектральной неустойчивости оператора Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом* // Дифференц. уравнения. Т. 45. № 4. 2009. С. 480–495.
21. Ишкин Х. К., Муртазин Х. Х. *Асимптотика собственных чисел дифференциального оператора четвертого порядка в «вырожденном» случае* // Уфимск. матем. журн. Т. 8. № 3. 2016. С. 82–98.
22. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 2. М.: Наука. 1974.
23. E. B. Davies. *Wild spectral behaviour on anharmonic oscillators* // Bull. London Math. Soc. V. 32., № 4. 2000. P. 432–438.
24. Лидский В. Б. *Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром* // Тр. ММО. Т. 8. 1959. С. 83–120.
25. Лидский В. Б. *Несамосопряженный оператор типа Штурма–Лиувилля с дискретным спектром* // Тр. ММО. Т. 9. 1960. С. 45–79.
26. E. B. Davies. *Pseudo-spectra, the harmonic oscillator and complex resonances* // Proc. R. Soc. Lond. V. 455. 1999. P. 585–599.
27. S. Roch, B. Silberman. *C*-algebra techniques in numerical analysis* // J. Operator Theory. V. 35. 1996. P. 221–280.
28. Ишкин Х. К. *О критерии локализации собственных чисел спектрально неустойчивого оператора* // Докл. АН. Т. 429, № 3. 2009. С. 301–304.
29. Бойматов К. Х. Асимптотическое поведение собственных значений несамосопряженных операторов // Функц. анализ и его прил. Т. 11, № 4. 1977. С. 74–75.

Ляйсан Габдулхаевна Валиуллина,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `l.matem2012@yandex.ru`

Хабир Кабирович Ишкин,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `Ishkin62@mail.ru`

Рустем Ильдарович Марванов,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `rsmar1v@gmail.com`