ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 4 (2018). С. 41-50.

УДК 517.946.4

О ЕДИНСТВЕННОСТИ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АГРЕГАЦИИ

В.Ф. ВИЛЬДАНОВА

Аннотация. В известной работе A. Bertozzi, D. Slepcev (2010) установлено существование и единственность решения смешанной задачи для уравнения агрегации

$$u_t - \triangle A(x,u) + \mathrm{div}(u\nabla K * u) = 0,$$

описывающего эволюцию колонии бактерий в ограниченной выпуклой области Ω. В данной работе доказывается существование решения и единственность смешанной задачи для более общего уравнения

$$\beta(x,u)_t = \mathrm{div}(\nabla A(x,u) - \beta(x,u)G(u)) + f(x,u).$$

Слагаемое $f(x,u)$ в уравнении моделирует процессы "рождения – уничтожения" бактерий. Класс интегральных операторов $G(v)$ достаточно широк и содержит, в частности, операторы свертки $\nabla K * u$. Векторное ядро $g(x,y)$ оператора $G(v)$ может иметь особенности.

Доказательство единственности решения из работы A. Bertozzi, D. Slepcev опирается на факт сохранения "массы" $\int_\Omega u(x,t)dx = const$ бактерий и использует выпуклость области и свойства оператора сверки. Наличие в уравнении "неоднородности"$f(x,u)$ нарушает сохранение "массы". Предложенное в работе доказательство единственности пригодно для неоднородного уравнения, не использует выпуклость области Ω.

Ключевые слова: Уравнение агрегации, интегро-дифференциальное уравнение, глобальное решение, единственность решения.
Mathematics Subject Classification: 35K20, 35K55, 35K65

1. Введение

В последнее десятилетие появилось много работ, посвященных исследованию уравнения агрегации

$$u_t = \mathrm{div}(\nabla A(x,u) - u\nabla K * u), \quad K * u = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y)u(y,t)dy, \tag{1}$$

где ядро K может иметь особенности типа ньютоновского потенциала (см.[1] и имеющиеся там ссылки). Подробный обзор результатов этих исследований занял бы неоправданно много места. Приведем лишь пионерские работы, посвященные уравнению (1).

V.F. Vil'danova, On the uniqueness of a weak solution to integro-differential aggregation equation.

Поступила 19 апреля 2018 г.
Работа поддержана РФФИ (грант 18-01-00428а).

Для моделирования хемотаксиса бактерий в работе [2] была предложена система уравнений

$$u_t = \operatorname{div}(\nabla u - u\nabla v),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \qquad (2)$$
$$-\triangle v = u,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

Очевидно, что при ограниченной функции v система (2) сводится к одному уравнению вида (1).

В работе [3] система (2) названа системой Смолуховского-Пуассона и использовалась для изучения гравитационного коллапса облака самогравитирующих частиц. Эта же система в работе [4] названа Chavanis-Sommeria-Robert моделью со ссылкой на работу [5].

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ с границей класса C^1. Рассмотрим в цилиндрической области $D^T = \Omega \times (0, T)$ уравнение

$$\beta(x, u)_t = \operatorname{div}(\nabla A(x, u) - \beta(x, u)G(u)) + f(x, u) \qquad (3)$$

с начальным и краевым условиями

$$u(x, 0) = u_0(x),\ \ u_0(x) \geq 0,\ \ x \in \Omega, \qquad (4)$$

$$(\nabla A(x, u) - \beta(x, u)G(u)) \cdot \nu = 0 \quad \text{на}\ \ \partial\Omega \times (0, T), \qquad (5)$$

где ν – вектор внешней нормали. Интегральный оператор

$$G(v) = (G_1(v), G_2(v), ..., G_n(v))$$

определяется формулами

$$G_i(v) = \int\limits_{\Omega} g_i(x, y)b(v(y))dy.$$

Целью работы является доказательство существования и единственности слабого решения задачи (3)–(5) в цилиндре D^T, высота которого определяется данными задачи.

В работе [6] было доказано существование и единственность слабого решения задачи (1),(4) с краевым условием

$$(\nabla A(x, u) - u\nabla K * u) \cdot \nu = 0 \quad \text{на}\ \ \partial\Omega \times (0, T)$$

в случае, когда ядро K принадлежит $C^2(\mathbb{R}^n)$. В более ранней работе [7] были установлены существование и единственность решения этой же задачи в случае $A = A(u) \in C^1[0, \infty]$ и выпуклой области Ω. Но доказательство существования решения в этой работе содержит пробел. В работе [7] рассмотрены также задача Коши и задача с периодическим краевым условием.

В известных автору работах функция $A(x, u)$ возрастает по u и среди степенных функций $A(x, u) = u^m$ охвачен только случай $m \geq 1$. Отметим, что замена $v = u^m$ в уравнении (1) с $A(x, u) = u^m$ приводит к уравнению вида (3) и позволяет таким образом доказать существование решения в случае $m \in (0, 1)$ (см. теорему 3 в пункте 2, вытекающую из результатов работы [8].)

В работе [8] было доказано существование слабого решения смешанной задачи в D^T для уравнения

$$\beta(x, u)_t = \operatorname{div}(a(x, u, \nabla u) - \beta(x, u)G(u)) + f(x, u) \qquad (6)$$

с начальным условием (4) и краевым условием

$$(a(x, u, \nabla u) - \beta(x, u)G(u)) \cdot \nu = 0 \quad \text{на}\ \ \partial\Omega \times (0, T). \qquad (7)$$

Высота T цилиндра D^T определяется функциями, входящими в постановку задачи. Этот результат подробно цитируется в пункте 2.

Наличие нелокальности в уравнении (3) не позволяет использовать метод удвоения переменных С.Н. Кружкова, примененный в работе [9] для доказательства единственности ренормализованного решения смешанной задачи для параболического уравнения с двойной нелинейностью.

Более полный обзор работ по уравнению агрегации можно найти в работе [6].

2. Основные результаты

Предполагается, что $\beta(x,r)$, $f(x,r)$, $A(x,r)$ – каратеодориевы функции. Функция $A(x,u)\in C^1(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$, $A(x,u)\geq 0$, имеет положительную производную A_u,

$$A_u(x,u)>a_0>0,\quad x\in\Omega,\quad u>0, \tag{8}$$

$$(A(x,u)-A(x,v))(\beta(x,u)-\beta(x,v))\geq a_0(u-v)^2,\ \forall u,v\in\mathbb{R}_+. \tag{9}$$

Опишем условия на функции, входящие в интегральный оператор $G(v)$: $g_i(x,y)\in C^1(P)$, $P=\{(x,y):x,y\in\overline{\Omega},x\neq y\}$. Предполагается, что при некотором $\lambda<n$ выполняются неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n}|(g_i(x,y))_{x_i}|+|g_i(x,y)|\leq C(1+|x-y|^{-\lambda}),\quad (x,y)\in P; \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\nu_i g_i(x,y)\leqslant 0,\quad x\in\partial\Omega,\quad y\in\Omega. \tag{11}$$

Функции $f(x,s),b(s)$, $f(x,0)=0,b(0)=0$, удовлетворяют условию Липшица :

$$|f(x,s_1)-f(x,s_2)|\leqslant L_r|s_1-s_2|,\quad s_1,s_2\in[0,r],\quad \forall r>0, \tag{12}$$

$$|b(s_1)-b(s_2)|\leqslant L_k|s_1-s_2|,\quad s_1,s_2\in[0,k],\quad \forall k>0. \tag{13}$$

Из условия $\lambda<n$ следует, что найдется число $\overline{q}>1$ такое, что $\lambda<\dfrac{n}{\overline{q}}$. Зафиксируем сопряженные числа $q,\overline{q}$, $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{\overline{q}}=1$.

Слабое решение определяется следующим образом:

Определение 1. *Функция $u:D^T\to[0,\infty)$, $u\geq 0$, называется слабым решением задачи (3)- (5), если $u\in L_\infty(D^T)$, $\beta(x,u)\in L_\infty(0,T;L_q(\Omega))$ $A(x,u)\in L_2(0,T;H^1(\Omega))$ и для всех липшицевых функций $\xi\in Lip(\overline{D^T})$ таких, что $\xi(T)=0$ выполнено равенство*

$$\int\limits_{D^T}(-\beta(x,u)\xi_t+(\nabla A(x,u)-\beta(x,u)G(u))\cdot\nabla\xi- \tag{14}$$

$$-f(x,u)\xi)dxdt=\int\limits_{\Omega}u_0(x)\xi(x,0)dx.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (8)–(13). *Пусть существует неотрицательное решение задачи* (3)– (5). *Тогда оно единственно.*

Мы будем использовать следующие утверждения об оценках интегралов типа потенциалов (см., например, [10, гл. I, §6]).

Лемма 1. *Если* $\lambda < \frac{n}{\bar{q}}$ $(\frac{1}{q}+\frac{1}{\bar{q}}=1)$, $1<q<\infty$, $f(x)\in L_q(\Omega)$, *то функция*
$$v(x)=\int\limits_{\Omega}\frac{f(y)dy}{|x-y|^{\lambda}}$$
непрерывна в $\mathbb{R}^n$ *и удовлетворяет неравенству*
$$|v(x)|\le C\|f\|_{q,\Omega}.$$

Лемма 2. *Пусть область* Ω *ограничена и* $\lambda<n$, $f(x)\in L_2(\Omega)$. *Тогда функция*
$$v(x)=\int\limits_{\Omega}\frac{f(y)dy}{|x-y|^{\lambda}}$$
суммируема со степенью 2 *и имеет место неравенство*
$$\|v(x)\|_{2,\Omega}\le C\|f\|_{2,\Omega}.$$

Пусть $M_0=\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)}$ и $M_T>M_0$ – произвольное число. Выведем некоторые оценки для интегрального оператора $G(v)$. Рассмотрим измеримую функцию $v(x)$, $|v(x)|\le M_T$. Из леммы 1 и условий (10), (13) следует, что
$$G(v)\in C^1(\mathbb{R}^n),\quad |G(v)(x)|\le C_G,\ |\nabla G(v)(x)|\le d_G,\quad x\in\Omega. \tag{15}$$
Приведем утверждение (см. [8]) о существовании решения задачи (6), (4), (7).

Ниже переменные показатели нелинейностей $p_i(x)$, удовлетворяют условию
$$|p_i(x)-p_i(y)|\le\frac{C}{-\ln|x-y|},\ i=\overline{1,n}, \tag{16}$$
при $|x-y|\le 1/2$, $x,y\in\overline{\Omega}$. Приведем условия из работы [8] на функции, входящие в уравнение (6). Функция $\beta(x,r)$ нечетная по $r\in\mathbb{R}$ и при некоторых M_0,M_T удовлетворяет условиям
$$s\beta(x,r)\le r\beta(x,s),\ \text{при } 0<M_0\le r<s\le M_T,\ x\in\Omega; \tag{17}$$
$$\beta(x,M_T)\in L_q(\Omega),\quad \text{где}\quad q\ge\max_j(\overline{p}_j(x)),\ x\in\Omega. \tag{18}$$
$$|\nabla\beta(x,r)|\le N_g|\beta(x,r)|,\ r\in[0,M_T]\ x\in\Omega. \tag{19}$$
Функция $q_1(x,r)$ определяется равенством $f=\beta(x,r)q_1(x,r)$ и ограничена
$$|q_1(x,r)|\le q_0,\ \text{при } |r|\le M_T. \tag{20}$$
Функции $a_i(x,r,y)$ непрерывны по $r\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}^n$ и измеримы по $x\in\Omega$. Существуют функция $F(x)\in L_1(\Omega)$ и непрерывная функция $C(m)$, $m\ge0$, такие, что
$$|a_j(x,r,y)|^{\overline{p}_j(x)}\le C(m)(F(x)+\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{p_i(x)}), \tag{21}$$
при всех $r\in[-m,m]$, $y\in\mathbb{R}^n$, $x\in\Omega$.

Условия монотонности и коэрцитивности предполгаются в следующем виде:
$$(a(x,r,y)-a(x,r,z))\cdot(y-z)\ge0,\ y\ne z; \tag{22}$$
$$a(x,r,y)\cdot y\ge\delta_0\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{p_i(x)}-F(x),\quad \forall r\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^n,\ x\in\Omega. \tag{23}$$

Функция $B(x,r)$ определяется равенством $B(x,r)=\int\limits_0^r s d_s\beta(x,s)$, возрастает по r и удовлетворяет неравенству

$$0 \le B(x,r) \le r\beta(x,r),\ r \ge 0.$$

Поэтому $B(x,M_T) \in L_q(\Omega)$.

Теорема 2. *(см.* [8]*). Пусть выполнены условия* (10)*,* (11)*,* (13)*,* (16)*–*(23)*,* $0 \le u_0(x) \le M_0$*. Тогда существует* $T = T(M_0, M_T, q_0, d_G, N_g)$ *и слабое решение задачи* (6)*,* (4)*,* (7) *такое, что* $0 \le u(x,t) \le M_T$*.*

Мы не приводим здесь определение слабого решения задачи (6), (4), (7), поскольку оно стандартное и для рассмативаемой в работе задачи (3)–(5) совпадает с Определением 1.

Следующее утверждение является следствием теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (8)*,* (10)*,* (11)*,* (13)*,* (17)*–*(20) *и* $0 \le u_0(x) \le M_0$*. Тогда существует слабое решение задачи* (3)*–*(5) *в цилиндре* D^T*,* $T = T(M_0, M_T, q_0, d_G, N_g)$*.*

Очевидно, что задача (3)–(5) является частным случаем задачи (6), (4), (7). Поэтому достаточно убедиться, что условия теоремы 3 обеспечивают выполнение условий теоремы 2. Для уравнения (3) функции a_j имеют вид $a_j = A_u u_{x_j} + A_{x_j}$, поэтому условие (21) выполнено при $p_j = 2$ в силу условия гладкости функции $A(x,u)$. Условия (22) и (23) также выполнены в силу (8) и ограниченности u.

В качестве важного примера рассмотрим в D^T уравнение

$$u_t = \operatorname{div}(\nabla u^m - u\nabla K * u),\ m \in (0,1),$$

где ядро K удовлетворяет условию

$$\nabla_x^2 K(x,y) \le C(1 + |x-y|^{-\lambda}),\ (x,y) \in P,\ \lambda < n.$$

Замена $v = u^m$ приводит к уравнению

$$(v^{\frac{1}{m}})_t = \operatorname{div}(\nabla v - u\nabla K * v^{\frac{1}{m}})$$

вида (3). По теореме 3 устанавливаем, что соответствующая задача имеет слабое решение при $m \in (0,1)$ (но его единственность мы не утверждаем).

3. Доказательство теоремы 1 о единственности решения

Установим вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть функция* $u(x,t)$*,* $v(x,t)$ *– слабые решения задачи* (3)*–*(5)*,* $N(t) = \int\limits_\Omega |u(x,t) - v(x,t)|dx$*,* $s(t) = \int\limits_\Omega (\beta(x,u(x,t)) - \beta(x,v(x,t)))dx$*.*

Тогда при всех $\tau \in [0,T]$

$$\int\limits_0^\tau s^2(t)dt \le L_r^2 \tau^2 \int\limits_0^\tau N^2(t)dt$$

и

$$\int\limits_0^\tau s^2(t)dt \le C(\Omega)\tau^2 \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega |u(x,t) - v(x,t)|^2 dxdt,$$

где $r = \|u+v\|_{L_\infty(D^T)}$*,* L_r *– константа из* (12)*.*

Доказательство. Запишем соотношение (14) для функции v, вычтем его из (14), получим

$$\int_0^T\int_\Omega ((\beta(x,v)-\beta(x,u))\xi_t+(\nabla A(x,u)-\nabla A(x,v)+\beta(x,v)G(v)- \tag{24}$$

$$-\beta(x,u)G(u))\cdot\nabla\xi)dxdt=\int_0^T\int_\Omega (f(x,u)-f(x,v))\xi dxdt.$$

Подставляя в сюда $\xi=\xi(t)\in C_0^\infty(0,T)$ получаем, что

$$\int_0^T\xi'(t)\int_\Omega(\beta(x,u)-\beta(x,v))dxdt=\int_0^T\xi(t)\int_\Omega(f(x,v)-f(x,u))dxdt.$$

Это значит, что функция $s(t)$ абсолютно непрерывна по t. Поэтому, чтобы завершить доказательство леммы, достаточно подставить в (24) функцию

$$\xi(t)=\int_t^\tau s(r)dr,\ t\in[0,\tau],\ \xi(t)=0,\ t>\tau.$$

В силу (12), имеем по неравенству Стеклова-Фридрихса

$$\int_0^\tau s^2(t)dt\le\int_0^\tau L_rN(t)|\xi(t)|dt\le L_r\tau\Big(\int_0^\tau N^2(t)dt\int_0^\tau s^2(t)dt\Big)^{1/2}.$$

Отсюда легко следуют неравенства леммы. □

Доказательство теоремы 1. Пусть u и v решения задачи (3)–(5). Определим функцию $\phi(x,t)$ при фиксированном $t\in(0,T)$ как решение задачи Неймана

$$\triangle\phi(x,t)=\beta(x,u(x,t))-\beta(x,v(x,t))-\overline{s}(t),\quad x\in\Omega;\quad \frac{\partial\phi}{\partial\nu}=0,\ x\in\partial\Omega, \tag{25}$$

где $\overline{s}(t)=\dfrac{s(t)}{\mathrm{meas}\Omega}$. Условием разрешимости этой задачи является ортогональность в $L_2(\Omega)$ правой части уравнения решениям однородного уравнения (см., например, [11, гл.II, теорема 5.2]). Решениями задачи для однородного уравнения являются только константы. Согласно лемме 3 имеем равенство

$$\int_\Omega(\beta(x,u(x,t))-\beta(x,v(x,t))-\overline{s}(t))dx=0,$$

то есть условие разрешимости задачи Неймана выполнено. Можно считать при этом, что $\int_\Omega\phi(x,t)dx=0$. Отметим, что $\phi(x,0)=0$. Поскольку

$$(\beta(x,u(x,t))-\beta(x,v(x,t)))\in L_\infty(0,T;L_q(\Omega))\cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

то $\phi\in L_\infty(0,T;H^2(\Omega))\cap H^1(0,T;H^1(\Omega))$ (см., напр., [11], гл.II, (5.4)). Тогда $\nabla\phi\in C(0,T;L_2(\Omega))$ и выполнено равенство

$$-\int_\Omega\nabla\phi\cdot\nabla w dx=\int_\Omega(\beta(x,u(x,t))-\beta(x,v(x,t))-\overline{s}(t))w(x)dx, \tag{26}$$

при любом $w\in W_2^1(\Omega)$.

Преобразуем уравнение (24). Обозначим

$$P(x,t)=\nabla A(x,u)-\nabla A(x,v)+\beta(x,v)G(v)-\beta(x,u)G(u).$$

Из Определения 1 следует, что $P \in L_2(D^T)$. Положим $F(x,t) = f(x,u) - f(x,v) \in L_2(D^T)$. Подставим в (24) $\xi = \varphi_{-h} = \frac{1}{h}\int\limits_{t-h}^{t} \varphi(x,r)dr$, где $\varphi \in C^\infty(\overline{D^T})$, $\varphi = 0$ при $t \geq T-\delta$. Учитывая (26), получим

$$\int\limits_{D^T} (\nabla\phi \cdot \nabla(\varphi_{-h})_t - \overline{s}(t)(\varphi_{-h})_t + P \cdot \nabla\varphi_{-h} - F\varphi_{-h})dxdt = 0.$$

Пользуясь свойством осреднения Стеклова, перепишем это в виде

$$\int\limits_{D^T} (-(\nabla\phi_h)_t \cdot \nabla\varphi - (\overline{s}_h)_t\varphi + P_h \cdot \nabla\varphi - F_h\varphi)dxdt = 0.$$

Пусть $\chi_{(0,\tau)}$ – характеристическая функция интервала $(0,\tau)$. Подставим в последнее соотношение $\varphi = \chi(0 < t < \tau)\phi_h$ и перейдем к пределу при $h \to 0$. Получим

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla\phi(\tau)|^2 + \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega} (-\overline{s}_t\phi + P \cdot \nabla\phi - F\phi)dxdt = 0.$$

Учитывая, что $\int\limits_{\Omega} \phi(x,t)dx = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla\phi(\tau)|^2 dx = \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega} \nabla(A(x,u) - A(x,v)) \cdot \nabla\phi dxdt - \\ - \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega} (G(u)\beta(x,u) - G(v)\beta(x,v)) \cdot \nabla\phi dxdt - \\ - \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega} (f(x,u) - f(x,v))\phi dxdt = I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned} \tag{27}$$

Поскольку $A(x,u) - A(x,v) \in L_2(0,T,H^1(\Omega))$ и функция A возрастает по второму аргументу, то пользуясь (26) и леммой 3, учитывая (9), можно записать соотношения

$$\begin{aligned}I_1 = -\int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega} (A(x,u) - A(x,v))(\beta(x,u) - \beta(x,v) - \overline{s}(t))dxdt \leq \\ \leq -\int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega} (a_0(u-v)^2 - A_M|(u-v)\overline{s}(t)|dxdt \\ \leqslant \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega} (C\tau - a_0)(u-v)^2 dxdt.\end{aligned} \tag{28}$$

Перепишем интеграл I_2 в виде:

$$I_2 = -\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega (G(u)\beta(x,u) - G(v)\beta(x,v)) \cdot \nabla\phi dxdt =$$

$$-\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega (\beta(x,u) - \beta(x,v))G(u) \cdot \nabla\phi dxdt +$$

$$+\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \beta(x,v)(G(u) - G(v)) \cdot \nabla\phi dxdt = I_4 + I_5$$

Используя (26) для первого слагаемого, получим

$$I_4 = \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla(G(u) \cdot \nabla\phi) dxdt - \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \overline{s}(t) G(u) \cdot \nabla\phi dxdt = I_{41} + I_{42}.$$

По лемме 3 имеем оценку

$$I_{42} \le C\tau \|u - v\|_{L_2(D_0^\tau)} \|\nabla\phi\|_{L_2(D_0^\tau)},$$

где $D_0^\tau = \Omega \times (0,\tau)$. Далее,

$$I_{41} = \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \partial_i\phi(x)\partial_j\phi(x) \int\limits_\Omega \partial_i g_j(x,y) b(u(y,t)) dydxdt +$$

$$+\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \partial_i\phi(x)\partial_i\partial_j\phi(x) \int\limits_\Omega g_j(x,y) b(u(y,t)) dydxdt = I_6 + I_7.$$

Применим формулу Гаусса – Остроградского к интегралу I_7 :

$$I_7 = -\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \partial_j\partial_i\phi(x)\partial_i\phi(x) \int\limits_\Omega g_j(x,y) b(u(y,t)) dydxdt -$$

$$-\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \partial_i\phi(x)\partial_i\phi(x) \int\limits_\Omega \partial_j g_j(x,y) b(u(y,t)) dydxdt +$$

$$+\int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial\Omega} \partial_i\phi(x)\partial_i\phi(x)\nu_j \int\limits_\Omega g_j(x,y) b(u(y,t)) dydSdt.$$

Тогда с учетом (11), получаем

$$I_7 \leqslant -\frac{1}{2} \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega |\nabla\phi|^2 \int\limits_\Omega \partial_j g_j(x,y) b(u(y,t)) dydxdt.$$

Используя условия (10), (13), оценим интеграл

$$\int\limits_\Omega |\partial_i g_j(x,y) b(u(y,t))| dy \leqslant \int\limits_\Omega C(1 + |x-y|^{-\lambda}) |b(u(y,t))| dy \leqslant$$

$$\le C\|u_0\|_{L_1(\Omega)} + C\int\limits_\Omega \frac{|b(u(y,t))|}{|x-y|^\lambda} dy \leqslant C(M_T).$$

Имеем

$$I_6 \leqslant C(M_T)\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega |\nabla\phi|^2 dxdt.$$

Полученные оценки для I_6 и I_7 подставим в I_4 :

$$I_4 \leqslant \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega (C|\nabla\phi|^2 + \tau^2(u-v)^2)dxdt. \tag{29}$$

Используя условия (10), (13) и лемму 2 устанавливаем неравенства

$$\|G_j(u(t)) - G_j(v(t))\|_{L_2(\Omega)} < C(\Omega)\|u(t)-v(t)\|_{L_2(\Omega)},\ j=\overline{1,n}.$$

Таким образом

$$I_5 \leqslant C\int\limits_0^\tau \|u(t)-v(t)\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\phi(t)\|_{L_2(\Omega)}dt.$$

Тогда

$$I_5 \leqslant C(\tau)\int\limits_0^\tau \|\nabla\phi(t)\|^2_{L_2(\Omega)}dt + \tau\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega (u-v)^2 dxdt.$$

Полагая $\eta(t) = (\int\limits_\Omega |\nabla\phi(t)|^2dx)^{1/2}$, получаем из (27) с использованием предыдущих оценок

$$\frac{1}{2}\eta^2(\tau) + (a_0 - C(\tau+\tau^2))\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega (u-v)^2dxdt \tag{30}$$

$$\leqslant C\int\limits_0^\tau \eta^2(t)dt + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega |(f(x,u)-f(x,v))\phi|dxdt.$$

Используя условие (12) для функции $f(x,u)$ и неравенство Пуанкаре устанавливаем, что

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega |f(x,u)-f(x,v)||\phi|dxdt \leqslant \frac{a_0}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega (u-v)^2dxdt + \frac{L_r^2}{a_0}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega |\phi|^2dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_0}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega (u-v)^2dxdt + \frac{C_1L_r^2}{a_0}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega |\nabla\phi|^2dxdt. \tag{31}$$

Поэтому из (30), (31) при достаточно малом τ следует, что

$$\eta^2(\tau) \leqslant C_2\int\limits_0^\tau \eta^2(t)dt.$$

Отсюда, с помощью неравенства Гроноулла выводим, что $\eta(t) = 0$ для всех $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Поэтому $u \equiv v$ в цилиндре $\Omega\times(0,\tau)$. Аналогично устанавливается тождество $u \equiv v$ в цилиндре $\Omega\times(\tau,2\tau)$ и т.д. Теорема 1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carrillo J.A., Hittmeir S., Volzone B.,Yao Y. *Nonlinear aggregation-diffusion equations: radial symmetry and long time asymptotics* // arxiv:1603.07767v1[math.ap], (2016). 47 p.
2. Keller E.F., Segel L.A. *Initiation of slide mold aggregation viewed as an instability* // J. Theor. Biol., 26(1970). P. 399-415.
3. Chavanis P.H.,Rosier C., Sire C. *Thermodynamics of self-gravitating systems* // arxiv:cond-mat/0107345v3[cond-mat.stat-mech], (2002). 36 p.
4. Biler P., Nadzieja T. *Global and exploding solutions in a model of self-gravitating systems* // Reports on mathematical physics, 52:2(2003). P. 205-225.
5. Chavanis P.H., Sommeria J. and Robert R. *Statistical mechanics of two-dimensional vortices and collisionless stellar systems*// J. Astrophys. 471 (1996). P. 385-399.
6. Вильданова В.Ф. *Существование и единственность слабого решения нелокального уравнения агрегации с вырождающейся диффузией общего вида*// Матем. сб., 209:2 (2018). С. 66–81.
7. Bertozzi A., Slepcev D. *Existence and Uniqueness of Solutions to an Aggregation Equation with Degenerate Diffusion* // Comm. Pur. Appl. Anal., 9:6 (2010). P. 1617-1637
8. Вильданова В.Ф., Мукминов Ф.Х. *Существование слабого решения интегро-дифференциального уравнения агрегации*// Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 63:4 (2017). С. 557–572.
9. Мукминов Ф.Х. *Единственность ренормализованного решения эллиптико-параболической задачи в анизотропных пространствах Соболева–Орлича*// Матем. сб., 208:8 (2017), С. 106–125.
10. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука. 1988. 333 с.
11. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.*Неоднородные граничные задачи и их приложения.* М.: Мир. 1971. 372 с.

Венера Фидарисовна Вильданова
Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: gilvenera@mail.ru