ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 4 (2018). С. 64-76.

УДК 517.928.7

ЗАХВАТ И УДЕРЖАНИЕ РЕЗОНАНСА ВДАЛИ ОТ РАВНОВЕСИЯ

Л.А. КАЛЯКИН

Аннотация. Захват в резонанс случается в нелинейных осциллирующих системах. Исследование математических моделей этого явления составляет часть современной теории нелинейных колебаний. Известные в этом направлении результаты были получены методом усреднения в асимптотическом приближении по малому параметру. Таким способом детально исследован начальный этап захвата в резонанс. В основу этого подхода положен асимптотический переход к модельному уравнению типа математического маятника. В данной работе рассматривается асимптотическая конструкция на далеких временах, которая описывает медленную эволюцию захваченного в резонанс решения. Основной целью является определение промежутка времени, в течении которого удерживается резонанс. Задача сводится к исследованию возмущения модельного уравнения типа маятника. Главное достижение состоит в описании промежутка времени, на котором удерживается резонанс, в терминах данных исходной задачи. Формально рассматривается нелинейная колебательная система с малым возмущением. Считается, что возмущение соответствует внешней накачке с заданной медленно меняющейся частотой. Строится асимптотика по малому параметру для решений, которые захвачены в резонанс. Выписывается уравнение, решение которого позволяет найти время удержания резонанса.

Ключевые слова: нелинейные колебания,возмущение, малый параметр, асимптотика, захват в резонанс.

Mathematics Subject Classification: 34E13

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Исходный объект – система двух дифференциальных уравнений с малым параметром $0 < \varepsilon \ll 1$:

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon F(E, S, \psi, \varepsilon t), \quad \frac{dS}{dt} = \Lambda(E, \varepsilon t) + \varepsilon G(E, S, \psi, \varepsilon t). \tag{1}$$

Здесь $\psi = \psi(t, \varepsilon)$ – заданная функция, производная которой медленно меняется:

$$\frac{d\psi(t, \varepsilon)}{dt} = \omega(\varepsilon t) \neq 0.$$

Очевидно, ψ можно отождествить с независимой переменной, сделав соответствующую замену (быстрого) времени t и сведя дело к случаю $\omega = 1$. Уравнения в форме (1) более удобны для приложений и численных экспериментов. Для медленного времени используется обозначение $\theta = \varepsilon t$.

Исходные данные – F, G, Λ, ω считаются гладкими (бесконечно дифференцируемыми) функциями по всем переменным и 2π–периодическими по ψ. Рассматривается задача о построении асимптотического разложения при $\varepsilon \to 0$ для решений $E, S(t; \varepsilon)$, у которых

L.A. Kalyakin, Capture and holding of resonance far from equilibrium.

Поступила 05 апреля 2018 г.

главный член асимптотики определяется корнем $E = \mathcal{E}_0(\theta)$ уравнения $\Lambda(E,\theta) = 0$. Семейство таких решений, называемых далее резонансными, можно выделить заданием для компоненты E начального значения вблизи корня

$$E|_{t=0} = E_{res} + \sqrt{\varepsilon}\, r_0, \quad \text{при условии} \;\; \Lambda(E_{res}, 0) = 0.$$

Множество допустимых начальных значений второй компоненты $S|_{t=0} = s_0$ и допустимых возмущений r_0 образуют так называемую область захвата в резонанс; она будет указана ниже.

Ввиду инвариантности структуры уравнений относительно сдвига переменных E, S можно считать $E_{res} = 0$. Предполагается, что в начальной точке выполняются соотношения

$$\Lambda(0,0) = 0, \quad \partial_E \Lambda(E,0)|_{E=0} \neq 0. \tag{2}$$

Это условие гарантирует для функционального уравнения $\Lambda(E,\theta) = 0$ существование простого корня $E = \mathcal{E}_0(\theta)$ на промежутке $0 \leqslant \theta < \theta_0$, $(\theta_0 = \mathrm{const} \leqslant \infty)$ со свойством $\mathcal{E}_0(0) = 0$. Вопрос, который обсуждается в данной работе, касается определения временного промежутка $0 \leqslant \theta < \theta_c$, на котором этот корень представляет главный член асимптотики для компоненты решения $E(t;\varepsilon)$.

1.2. Обзор близких задач. Если функции $F, G(E,S,\psi,\theta)$ периодичны по двум переменным S, ψ, то дифференциальные уравнения (1) можно интерпретировать, как модель нелинейного осциллятора, находящегося под действием внешнего возмущения, периодического по ψ. Переменная $\theta = \varepsilon t$ характеризует медленные, в общем случае непериодические деформации системы. При отсутствии возмущения, когда $\varepsilon = 0$, величина $E = \mathrm{const}$ будет постоянной, ее принято называть энергия или действие; функция $S(t)$ будет линейной по t и интерпретируются как фаза или угол; $\Lambda(E,0)$ – частота колебаний невозмущенного осциллятора; ее зависимость от энергии E свидетельствует о нелинейности осциллятора. В такой интерпретации условие гладкости функций F, G по переменной E соответствует отсутствию равновесия для невозмущенного осциллятора в окрестности начального значения $E = 0$. Анализ решений, которые описывают возмущение равновесия, отличается от приводимых ниже конструкций и здесь не обсуждается, [1, 2].

Задачи, близкие рассматриваемым здесь, многократно исследовались. Исчерпывающие результаты известны для слабо неавтономных систем, когда быстрая фаза ψ отсутствует. В таком случае главные члены асимптотики, пригодной до времен $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, определяются из усредненных уравнений [3, 4]. В частности, медленная деформация энергии находится из уравнения

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(E,S,\theta)\, dS.$$

При этом важным требованием оказывается необращение в нуль величины Λ, которая интерпретируется как собственная частота системы. В таких задачах нулевое значение частоты ассоциируется с сепаратрисой невозмущенного осциллятора, вблизи которой метод усреднения оказывается непригодным, а структура асимптотики значительно усложняется [5, 6, 7, 8].

Если присутствует зависимость от ψ, то можно выписать похожее уравнение, которое получается усреднением по двум быстрым фазам:

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(E,S,\psi,\theta)\, dS\, d\psi.$$

Однако при условии (2) его решение может не иметь никакого отношения к главному члену асимптотики энергии $E(t;\varepsilon)$ на временах $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Проблемы обнаруживаются в старших поправках асимптотики и объясняются наличием резонансов. В подобных задачах надо помнить, что за операцией усреднения стоит формальная конструкция построения осциллирующих поправок старших порядков. При условии (2) такая конструкция в классе функций, периодических по S, ψ, становится невозможной из-за резонансов, наличие которых приводит к значительной деформации структуры асимптотического решения.

Для модели осциллятора с быстро меняющейся (заданной) фазой исходные уравнения выгодно редуцировать к виду, в котором величина $\Lambda(E,\theta)$ представляет собой разность собственной и вынуждающей частот, а $S(t)$ – разность фаз. Сохранение близости частот в течении продолжительного времени (т.е. соотношение $\Lambda(E,\theta) \approx 0$) интерпретируется как захват в резонанс. На таких решениях значительно меняется энергия, что является целью ряда прикладных задач [9, 10]. В общем случае для функции Λ допускается более сложная структура без какой-либо связи с $\omega(\theta)$. Периодичность F, G по S не требуется.

При описании захвата в резонанс в асимптотических конструкциях используется масштаб медленного времени $\tau = \sqrt{\varepsilon}t$, [11, 12, 4]. Построение главного члена асимптотики фазы $S = S_0(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$ сводится к решению уравнения типа маятника для $S_0(\tau)$. В этих конструкциях обнаруживается изменение энергии $E(t;\varepsilon)$ на величину порядка $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$. Если частота накачки постоянна $\omega = \mathrm{const}$, то более значительное по порядку ε изменение энергии невозможно: система осциллирует с амплитудой $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, периодически приближаясь к границе резонанса. Такой эффект интерпретируется как следствие нелинейности. При изменении энергии собственная частота меняется, резонанс нарушается и рост энергии прекращается.

Однако, если внешняя (заданная) частота ω медленно меняется со временем, то иногда резонанс удерживается на большем интервале времени
$0 < t \leqslant \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, [13]. При этом энергия меняется на величину порядка единицы $\mathcal{O}(1)$. Такая ситуация интерпретируется, как автоматическая подстройка системы под внешнее воздействие (авторезонанс или автофазировка), при которой собственная частота меняется в соответствии с изменением внешней, [9, 10, 1]. Если внешняя частота меняется в масштабе $\theta = \varepsilon t$, то главный член асимптотики $E \approx \mathcal{E}_0(\theta)$ извлекается из уравнения $\Lambda(E,\theta) = 0$, которое соответствует условию захвата в резонанс, [14]. При этом может создаться впечатление об удержании резонанса на всем промежутке $0 < \theta < \theta_0$, где определен корень $\mathcal{E}_0(\theta)$, независимо от возмущений F, G. Между тем, столь продолжительное удержание резонанса возможно не всегда. Выполнение резонансного условия (2) в начальный момент и наличие резонанса на временах $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$ вовсе не гарантирует его сохранение до времен $\varepsilon^{-1} \cdot \theta_0$. Удержание резонанса зависит от начального возмущения и структуры функций $F, G(E, S, \psi, \theta)$, [15, 1]. Основной вопрос, который обсуждается в данной работе, состоит в определении временнóго интервала $0 < \theta < \theta_c$, на котором удерживается резонанс с описанием энергии в виде асимптотики $E = \mathcal{E}_0(\theta) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}),\ \varepsilon \to 0$.

Следует отметить, что исходные уравнения можно записать в форме

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon F(E,S,\psi,I), \quad \frac{dS}{dt} = \Lambda(E,I) + \varepsilon G(E,S,\psi,I),$$

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega(I)$$

при начальном условии $I|_{t=0} = 0$. Их можно рассматривать, как частный случай двухчастотной системы. Подобные задачи для общих двухчастотных систем (при отсутствии зависимости от медленного времени) были исследованы [16, 17] в приближении главных членов. Там же указано обоснование асимптотики. В данной работе для системы (1) предлагается сравнительно простая конструкция полного асимптотического решения в резонансной зоне на основе идей много масштабного разложения. Главный результат состоит в выводе уравнения, решение которого позволяет найти время удержания резонанса.

1.3. Результаты. В асимптотической конструкции используются два медленных времени $\tau = \sqrt{\varepsilon}\, t$ и $\theta = \varepsilon\, t$. Первые члены асимптотики строятся в форме

$$E = \mathcal{E}_0(\theta) + \sqrt{\varepsilon}\, r(\tau, \theta; \varepsilon)\, \mathcal{E}_1(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad S = s(\tau, \theta; \varepsilon) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon \to 0 \tag{3}$$

с коэффициентом $\mathcal{E}_1(\theta) = 1/\partial_E \Lambda(\mathcal{E}_0(\theta), \theta)$. В масштабе τ задача сводится к модельной системе типа маятника, которая получается усреднением по ψ:

$$\frac{dr}{d\tau} = f_0(s, \theta), \quad \frac{ds}{d\tau} = r, \; (\theta = \sqrt{\varepsilon}\tau). \tag{4}$$

Здесь

$$f_0(s, \theta) = \langle F(E, s, \psi, \theta) \rangle\, \partial_E \Lambda(E, \theta) + \partial_\theta \Lambda(E, \theta)|_{E=\mathcal{E}_0(\theta)};$$

малыми угловыми скобками $\langle \cdot \rangle$ всюду обозначается среднее значение периодических функций по переменной ψ:

$$\langle f(\psi) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi.$$

Если θ рассматривать, как (замороженный) параметр, то уравнения (4) интегрируются. Их решение дает асимптотику (3) на этапе захвата в резонанс, т.е. на временах $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$. Переменная θ в форме $\theta = \sqrt{\varepsilon}\, \tau$ используется для описания асимптотики на далеких временах $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. При этом приходится анализировать задачу о возмущении системы (4) и учитывать поправки порядка $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$.

Необходимым условием для удержания резонанса является наличие на фазовой плоскости (r, s) осцилляционной области $D_{os}(\theta)$, состоящей из замкнутых фазовых траекторий замороженной системы (4), [17]. Эта область определяет множество[1] начальных данных $(r_0, s_0) \in D_0 = D_{os}(0)$, при которых случается захват в резонанс. Приведем достаточное условие существования осцилляционной области:

Условие захвата. *Замороженная система* (4) *при* $0 \leqslant \theta < \theta_0$ *имеет сепаратрисную петлю с одной устойчивой неподвижной точкой внутри. Тогда в качестве осцилляционной области* $D_{os}(\theta)$ *берется внутренность петли.*

Асимптотика резонансных решений (3) описывается посредством периодических по τ функций $r, s(\tau, \theta; \varepsilon)$, параметры которых медленно деформируются в масштабе θ. Момент выхода из резонанса отождествляется с моментом выхода соотетствующей траектории на границу осцилляционной области $\partial D_{os}(\theta)$. Условия удержания резонанса удобно формулировать в виде неравенства между площадью $\Pi(\theta)$, охватываемой траекторией, и площадью $\Pi_{os}(\theta)$ области $D_{os}(\theta)$. Описанный подход не нов и давно известен. Основной результат данной работы касается вывода уравнения для эволюции площади $\Pi(\theta)$ на основе явного представления для возмущения в системе маятника. Общая структура возмущения указана в [16, 17]. Приведенные ниже вычисления позволяют выписать возмущение в явной форме в терминах исходных данных и перейти к уравнению для площади в виде (22). Это уравнение может быть предметом дальнейшего анализа и численных экспериментов.

Для ориентировки приведем результат для частном случая, когда уравнение для площади упрощается и получается утверждение, соответствующее известному [16]:

Теорема 1. *Пусть возмущение в исходной системе* (1) *является гамильтоновым после усреднения по* ψ: $\langle \partial_E F + \partial_S G \rangle = 0$, *и функция* $\Lambda(E, \theta) = \Omega(E) - \omega(\theta)$ *представляет собой разность частот. Тогда медленная эволюция площади под возмущенной траекторией обладает свойством*

$$\Pi(\theta)/\Omega'(\mathcal{E}_0(\theta)) = \mathrm{const} + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon \to 0. \tag{5}$$

[1]область захвата

Отличие формулы (5) от соответствующего соотношения в [16] содержится в множителе $1/\Omega'(\mathcal{E}_0(\theta))$. Это отличие не принципиально и объясняется другим выбором переменной r в асимптотической конструкции при выводе системы маятника.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и условие захвата. Тогда резонанс удерживается на временах, пока выполняется неравенства*

$$\frac{\Omega'(\mathcal{E}_0(\theta))}{\Omega'(0)} < \frac{\Pi_{os}(\theta)}{\Pi(0)}, \quad \theta < \theta_0.$$

Отметим, что время удержания резонанса зависит от начальной точки траектории r_0, s_0 посредством начального значения площади $\Pi(0)$. Оно может быть значительно меньше предельного значения θ_0.

2. Асимптотическая конструкция

В основу асимптотической конструкции положен переход от искомой функции $E(t;\varepsilon)$ к новой переменной $R(\tau;\varepsilon)$, $\tau = \sqrt{\varepsilon}t$ с использованием уравнения

$$\Lambda(E,\theta) = \sqrt{\varepsilon}R,\ \theta = \sqrt{\varepsilon}\tau.$$

В силу резонансного условия (2) это уравнение имеет гладкий корень $E = \mathcal{E}(\sqrt{\varepsilon}R,\theta)$ при всех достаточно малых значениях аргументов $\sqrt{\varepsilon}R,\theta$. Можно выписать разложение Тейлора этой функции, равномерное по θ:

$$\mathcal{E}(\sqrt{\varepsilon}R,\theta) = \mathcal{E}_0(\theta) + \sqrt{\varepsilon}R\,\mathcal{E}_1(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon R^2),\ \varepsilon R^2 \to 0,\quad 0<\theta<\theta_0. \tag{6}$$

Коэффициенты выписываются через производные; например,

$$\mathcal{E}_1(\theta) = 1/\partial_E\Lambda(E,\theta) \equiv -1/\partial_\theta\Lambda(E,\theta) \ \text{ при }\ E = \mathcal{E}_0(\theta).$$

Формулу (6) можно рассматривать, как асимптотику при $\varepsilon \to 0$, равномерную по R на любом компакте. Фактически она представляет собой анзатц для энергии, в котором требуется найти ограниченную функцию $R(\tau;\varepsilon)$.

Уравнения для новых переменных $R, S(\tau;\varepsilon)$ приобретают вид

$$\frac{dR}{d\tau} = \mathcal{F}(E,S,\psi,\theta),\quad \frac{dS}{d\tau} = R + \sqrt{\varepsilon}G(E,S,\psi,\theta) \ \text{ при }\ E = \mathcal{E}(\sqrt{\varepsilon}R,\theta)). \tag{7}$$

Правые части определяются как сложные функции от (R,S,τ), определяемые через исходные данные, в частности,

$$\mathcal{F}(E,S,\psi,\theta) = \partial_E\Lambda(E,\theta)\,F(E,S,\psi,\theta) + \partial_\theta\Lambda(E,\theta),\quad \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\omega(\theta),\ \theta = \sqrt{\varepsilon}\tau. \tag{8}$$

В уравнениях (7) отсутствует явная зависимость от промежуточной переменной τ, имеется зависимость лишь от медленного времени $\theta = \sqrt{\varepsilon}\tau$. Правые части содержат периодическую зависимость от заданной быстрой фазы ψ. В асимптотических конструкциях удобно выделить зависимость от этой переменной в явном виде. При этом в асимптотическом решении можно отделить среднее значение искомых функций от осциллирующих частей с нулевым средним.

Анзатц берется в форме

$$R(\tau,\varepsilon) = r(\tau,\theta;\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\mathcal{R}(r,s,\psi,\theta,\varepsilon),\quad S(\tau,\varepsilon) = s(\tau,\theta;\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\mathcal{S}(r,s,\psi,\theta,\varepsilon)$$

с требованием нулевого среднего: $\langle\mathcal{R}\rangle = 0,\ \langle\mathcal{S}\rangle = 0$. В этом анзатце содержатся три временных масштаба: быстрый масштаб определяется переменной ψ, медленный масштаб θ и промежуточный масштаб τ. Отметим, что зависимость от τ в осциллирующих частях входит лишь посредством средних значений r, s. В таком подходе можно отделить задачу по определению осциллирующих частей $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ от задачи по определению средних значений r, s. Эти идеи содержатся в известном методе усреднения [3]. Уравнения для средних получаются усреднением по ψ:

$$\Big[\frac{\partial}{\partial\tau} + \sqrt{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big] r = \langle \mathcal{F}(E, s+\sqrt{\varepsilon}\mathcal{S}, \psi, \theta)\rangle,$$
$$\Big[\frac{\partial}{\partial\tau} + \sqrt{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big] s = r + \sqrt{\varepsilon}\langle G(E, s+\sqrt{\varepsilon}\mathcal{S}, \psi, \theta)\rangle, \quad E = \mathcal{E}(\sqrt{\varepsilon}r + \varepsilon\mathcal{R}, \theta). \tag{9}$$

Эти уравнения содержат осциллирующие части $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ искомых функций. Уравнения для них выписываются с учетом усредненных

$$\omega(\theta)\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\psi} + \sqrt{\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\theta} = \mathcal{F}(E, s+\sqrt{\varepsilon}\mathcal{S}, \psi, \theta) - \langle \mathcal{F}(E, s+\sqrt{\varepsilon}\mathcal{S}, \psi, \theta)\rangle -$$
$$-\sqrt{\varepsilon}\partial_r\mathcal{R}\,\langle \mathcal{F}(E, s+\sqrt{\varepsilon}\mathcal{S}, \psi, \theta)\rangle - \sqrt{\varepsilon}\partial_s\mathcal{R}\,[r + \sqrt{\varepsilon}\langle G(E, s+\sqrt{\varepsilon}\mathcal{S}, \psi, \theta)\rangle],$$

$$\omega(\theta)\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\psi} + \sqrt{\varepsilon}\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\theta} = \mathcal{R} + \sqrt{\varepsilon}\,[G(E, s+\sqrt{\varepsilon}\mathcal{S}, \psi, \theta) - \langle G(E, s+\sqrt{\varepsilon}\mathcal{S}, \psi, \theta)\rangle] -$$
$$-\sqrt{\varepsilon}\partial_r\mathcal{S}\,\langle \mathcal{F}(E, s+\sqrt{\varepsilon}\mathcal{S}, \psi, \theta)\rangle - \sqrt{\varepsilon}\partial_s\mathcal{S}\,[r + \sqrt{\varepsilon}\langle G(E, s+\sqrt{\varepsilon}\mathcal{S}, \psi, \theta)\rangle].$$

Заметим, что в последних соотношениях средние значения r, s считаются параметрами, у которых зависимость от τ учтена в соответствии с усредненными уравнениями. Это позволяет разделить уравнения в асимптотической конструкции

Анзатц для осциллирующих частей решений берется в виде асимптотических рядов

$$\mathcal{R}(t;\varepsilon) = \mathcal{R}_0(s, \psi, \theta) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k/2}\mathcal{R}_k(r, s, \psi, \theta),$$
$$\mathcal{S}(t;\varepsilon) = \mathcal{S}_0(s, \psi, \theta) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k/2}\mathcal{S}_k(r, s, \psi, \theta). \tag{10}$$

Коэффициенты в (10) однозначно определяются в классе функций с нулевым средним. Например, на первом шаге получаются уравнения, из которых видно отсутствие параметра r в главном члене осциллирующей части решения:

$$\omega(\theta)\frac{\partial\mathcal{R}_0}{\partial\psi} = \mathcal{F}_0(s, \psi, \theta) - f_0(s, \theta), \quad \omega(\theta)\frac{\partial\mathcal{S}_0}{\partial\psi} = \mathcal{R}_0. \tag{11}$$

Здесь $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\mathcal{E}_0(\theta), s, \psi, \theta)$, $f_0 = \langle\mathcal{F}_0\rangle$. Искомые функции $\mathcal{R}_k, \mathcal{S}_k$, $(k \geq 0)$ выписываются через интегралы по ψ. Они определяются по рекуррентным формулам однозначно в классе функций с нулевым средним.

3. Усредненные уравнения

Из структуры усредненных уравнений (9) нетрудно усмотреть, что построение осциллирующей части асимптотики в n первых слагаемых обеспечивает определение средних до порядка $\varepsilon^{(n+1)/2}$ в масштабе τ. Например, усредненные уравнения с учетом первых поправок имеют вид

$$\frac{dr}{d\tau} = f_0(s, \theta) + \sqrt{\varepsilon}f(r, s, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \frac{ds}{d\tau} = r + \sqrt{\varepsilon}g(s, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \theta = \sqrt{\varepsilon}\,\tau. \tag{12}$$

Правые части определяются формулами

$$f_0(s, \theta) = \partial_E\Lambda(E, \theta)\langle F(E, s, \psi, \theta)\rangle + \partial_\theta\Lambda(E, \theta)|_{E=\mathcal{E}_0(\theta)}; \tag{13}$$

$$
\begin{gathered}
f = \langle \mathcal{F}_1(r, s, \psi, \theta) \rangle, \quad g = \langle G(\mathcal{E}_0(\theta), s, \psi, \theta) \rangle, \\
\mathcal{F}_1(r, s, \psi, \theta) = r\, \mathcal{E}_1(\theta)\, \partial_E \mathcal{F}(\mathcal{E}_0(\theta), s, \psi, \theta) + \mathcal{S}_0(s, \psi, \theta) \partial_s \mathcal{F}(\mathcal{E}_0(\theta), s, \psi, \theta).
\end{gathered}
\tag{14}
$$

В главных членах асимптотики (при $\varepsilon = 0$) получаются уравнения типа маятника (4). Если медленное время θ рассматривать, как заможенный параметр, то уравнения (4) интегрируются. Их решение дает главный член асимптотики для средних $r, s = r_0, s_0(\tau, \theta) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, пригодной на временах $0 < \tau \leqslant \mathcal{O}(1)$. Если параметр θ разморозить, положив $\theta = \sqrt{\varepsilon}\tau$, то построенные функции $r_0, s_0(\tau, \theta)$ удовлетворяют уравнениям(4) с точностью $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$. Такая точность сохраняется при любой дополнительной гладкой зависимости от θ. Чтобы получить приближение, пригодное до времен $0 < \tau \leqslant \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$, надо найти подходящую зависимость от θ. Способы решения подобных задач хорошо известны в случае, когда замороженное решение осциллирует [4]. При этом в возмущенных уравнениях необходимо учитывать поправки порядка $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, приведенные в формулах (14). Заметим, что в (14) содержится функция $\mathcal{S}_0(s, \psi, \theta)$ – одна из компонент осциллирующей части. Это слагаемое можно преобразовать, вычисляя функцию возмущения f.

Лемма 1. *Имеет место соотношение*

$$
\begin{gathered}
f(r, s, \theta) = r \frac{1}{\partial_E \Lambda(E, \theta)} \partial_E \Big[\langle F(E, s, \psi, \theta) \rangle\, \partial_E \Lambda(E, \theta) + \partial_\theta \Lambda(E, \theta) \Big]_{E = \mathcal{E}_0(\theta)} - \\
- \frac{1}{2} \partial_s \langle \mathcal{R}_0^2(s, \psi, \theta) \rangle.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Доказательство. Первое слагаемое в (15) получается при переходе из (14), если учесть (8) и $\mathcal{E}_1 = 1/\partial_E \Omega(\mathcal{E}_0(\theta), \theta)$.

Второе слагаемое в (15) получается из(14) с использованием уравнений (11). Для этого первое тождество в (11) продифференцируем по s:

$$
\partial_s \mathcal{F}(\mathcal{E}_0(\theta), s, \psi, \theta) = \omega(\theta) \partial_\psi \partial_s \mathcal{R}_0 + \partial_s f_0(s, \theta).
$$

Поскольку среднее по ψ осциллирующей части $\langle \mathcal{S}_0(s, \psi, \theta) \rangle = 0$ равно нулю, то при усреднении последнего тождества получаем

$$
\langle \mathcal{S}_0(s, \psi, \theta) \partial_s \mathcal{F}(\mathcal{E}_0(\theta), s, \psi, \theta) \rangle = \omega(\theta) \langle \mathcal{S}_0(s, \psi, \theta) \partial_\psi \partial_s \mathcal{R}_0 \rangle.
$$

Напомним, что угловые скобки означают интеграл по ψ на периоде. После взятия интеграла по частям и использования второго тождества из (11) имеем

$$
\langle \mathcal{S}_0 \partial_S \mathcal{F} \rangle = -\omega(\theta) \langle \partial_\psi \mathcal{S}_0\, \partial_s \mathcal{R}_0 \rangle = -\langle \mathcal{R}_0 \partial_s \mathcal{R}_0 \rangle = -\frac{1}{2} \partial_s \langle \mathcal{R}_0^2 \rangle.
$$

Тем самым приходим к соотношению (15). Лемма доказана

4. Возмущение системы маятникового типа

Рассматривается модельная система двух уравнений, возмущенная малыми добавками:

$$
\frac{dr}{d\tau} = f_0(s, \theta) + \sqrt{\varepsilon} f(r, s, \theta) \;\; 0 < \varepsilon \ll 1, \;\; \frac{ds}{d\tau} = r + \sqrt{\varepsilon} g(r, s, \theta), \;\; \theta = \sqrt{\varepsilon}\tau.
\tag{16}
$$

Считается, что гладкая функция $f_0(s, \theta)$– 2π периодична по s. Ее среднее значение $\hat{f}_0(\theta) = \langle f_0(s, \theta) \rangle$ (не обязанное быть нулем) является гладкой функцией по θ. Построение асимптотики решения при $\varepsilon \to 0$ на большом промежутке времени $0 < \tau \leqslant \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$ базируется на результатах для замороженной невозмущенной системы (4):

$$
\frac{dr}{d\tau} = f_0(s, \theta), \quad \frac{ds}{d\tau} = r,
$$

в которой θ считается параметром. Такие задачи давно исследованы для общих систем [4]. Основная идея состоит в приведении уравнений к переменным типа действие-угол с последующим усреднением. Из соображений полноты изложения ниже приводится детализация известного подхода для конкретной системы (16).

Для замороженной системы имеется первый интеграл. Для его записи удобно ввести потенциал $u(s,\theta)$ через интеграл

$$u(s,\theta) = -\int^s f_0(s,\theta)\,ds = -s\cdot\hat{f}_0(\theta) + \tilde{u}(s,\theta),$$

зафиксировав константу интегрирования, например, нулевым средним значением осциллирующей части $\tilde{u}(s,\theta)$. Потенциал содержит непериодическое слагаемое в виде: $s\cdot\hat{f}_0(\theta)$. Первый интеграл, представляющий гамильтониан системы, записывается в виде

$$\frac{1}{2}r^2 + u(s,\theta) = h.$$

Асимптотические конструкции для решения возмущенной системы выполняются в области фазовой плоскости $(r,s)\in D_{os}\subseteq\mathbb{R}^2$, занятой замкнутыми траекториями замороженной системы[1]. Эта область $D_{os}(\theta)$ в общей ситуации зависит от параметра θ, что соответствует ее медленной деформации по времени. Замкнутым замороженным траекториям отвечают значения h из некоторого промежутка $H_0(\theta) < h < H_1(\theta)$. Границы, вообще говоря, зависят от θ. Соответствующие решения замороженной системы в виде периодических функций $r_0, s_0(\tau+\tau_0, h, \theta)$ зависят от от двух констант интегрирования τ_0, h и от параметра θ. Период $T(h,\theta)$ и частота $\nu(h,\theta) = 2\pi/T$ решений также зависят от параметров h,θ и вычисляются через интеграл по траектории. Для дальнейшего использования удобно ввести 2π–периодические функции по формулам

$$\rho(\varphi,h,\theta) = r_0(\varphi/\nu,h,\theta), \quad \sigma(\varphi,h,\theta) = s_0(\varphi/\nu,h,\theta).$$

Введенные функции удовлетворяют уравнениям

$$\nu\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} = -\partial_\sigma u(\sigma,\theta), \quad \nu\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} = \rho.$$

Дифференцирование энергетического тождества $\rho^2 + 2u(\sigma,\theta) = 2h$ по h и по θ с учетом уравнений приводит к двум соотношениям, которые можно записать через определители

$$\nu\begin{vmatrix}\partial_\varphi\rho & \partial_h\rho\\ \partial_\varphi\sigma & \partial_h\sigma\end{vmatrix} = -1, \quad \nu\begin{vmatrix}\partial_\varphi\rho & \partial_\theta\rho\\ \partial_\varphi\sigma & \partial_\theta\sigma\end{vmatrix} = \partial_\theta u(\sigma,\theta). \tag{17}$$

Построенная таким образом пара функций используются для замены переменных в возмущенных уравнениях:

$$r(\tau;\varepsilon) = \rho(\varphi,h,\theta),\ s(\tau;\varepsilon) = \sigma(\varphi,h,\theta), \quad \theta = \sqrt{\varepsilon}\tau.$$

Новыми искомыми функциями будут $h(\tau;\varepsilon)$, $\varphi(\tau;\varepsilon)$. В невозмущенных уравнениях такая замена соответствует переходу к переменным типа действие–угол. Возмущенные уравнения для r,s переходят в уравнения для h,φ. Фактически такой подход соответствует методу вариации произвольных постоянных:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{d\tau} &= \sqrt{\varepsilon}\Big(\partial_\theta u(\sigma,\theta) - \nu\begin{vmatrix}\partial_\varphi\rho & f\\ \partial_\varphi\sigma & g\end{vmatrix}\Big),\\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \nu + \sqrt{\varepsilon}\,\nu\Big(\begin{vmatrix}\partial_\theta\rho & \partial_h\rho\\ \partial_\theta\sigma & \partial_h\sigma\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}f & \partial_h\rho\\ g & \partial_h\sigma\end{vmatrix}\Big).\end{aligned} \tag{18}$$

[1] если такая область существует

Здесь $\rho(\varphi, h, \theta)$, $\sigma(\varphi, h, \theta)$, $\nu(h, \theta)$ – известные функции от искомых переменных φ, h и $\theta = \sqrt{\varepsilon}\tau$.

Полученные уравнения похожи на исходную систему (1) с той разницей, что частота $\nu(h, \theta)$ здесь не обращается в нуль. В этом случае асимптотическая конструкция при $\varepsilon \to 0$ для решения h, φ хорошо известна [4]. Главный член асимптотики, пригодной до далеких времен

$$h(\tau; \varepsilon) = h_0(\theta) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \ \varepsilon \to 0, \quad \theta = \sqrt{\varepsilon}\tau, \quad 0 < \tau \leqslant \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$$

определяется из усредненного уравнения

$$\frac{dh_0}{d\theta} = Z(h_0, \theta). \tag{19}$$

Правая часть дается выражением

$$Z(h, \theta) = \nu\Big\langle f(\rho, \sigma, \theta)\partial_\varphi\sigma - g(\rho, \sigma, \theta)\partial_\varphi\rho\Big\rangle + \Big\langle \partial_\theta u(\sigma, \theta)\Big\rangle, \ \rho, \sigma(\varphi, h, \theta), \tag{20}$$

где усреднение берется по фазе φ, – быстрой в промежуточном масштабе τ.

Асимптотика быстрой переменной $\varphi = \varphi(\tau; \varepsilon)$ получается интегрированием второго уравнения из (18).

Такая конструкция дает асимптотику решения $r, s(\tau; \varepsilon)$ в терминах периодических функций (решений замороженной системы), параметры которых медленно деформируются (в масштабе θ). Промежуток времени, где пригодна такая асимптотика, ограничен значением θ_c, при котором приближенная (размороженная) траектория выходит на границу осцилляционной области $\partial D_{os}(\theta)$. Если граница представляет собой сепаратрисную петлю, то при приближении траектории к границе частота $\nu(h, \theta)$ стремится к нулю, и приближение для h по методу усреднения становится непригодным для времен близких к θ_c, [5].

5. Двойное усреднение

Для решения исходной задачи главный член асимптотики, пригодной до времен $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, определяется из усредненных уравнений (12). Эти уравнения представляют собой возмущение системы маятникового типа. Асимптотика выписывается через решение $\rho, \sigma(\varphi, h, \theta)$ замороженной системы, приведенное к периоду 2π. Чтобы такая асимптотика

$$r(\tau, \theta; \varepsilon) = \rho(\varphi, h, \theta) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \quad s(\tau, \theta; \varepsilon) = \sigma(\varphi, h, \theta) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$$

была пригодна до далеких времен $\tau = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$, надо вычислить медленную деформацию параметра $h = h_0(\theta) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$. Наличие $h_0(\theta)$ гарантирует пригодность приближения в виде решения маятниковой системы, периодического по φ, на промежутке $0 \leqslant \theta < \theta_c$, пока замороженная траектория остается в осцилляционной области. Асимптотика для фазы $\varphi = \varphi(\tau, \varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$ находится из второго уравнения (18). Главный член $h_0(\theta)$ обеспечивает для фазы точность порядка единицы на далеких временах $\tau = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$. Уточнение асимптотики φ требует вычисления поправки порядка $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ для параметра h; это обычная ситуация при возмущении нелинейных осциллирующих систем. Для вычисления границы θ_c и оценки остатка в анзатце (3) такое уточнение фазы не нужно.

В рассматриваемом случае возмущенная система маятникового типа с учетом первой поправки имеет вид (16). Функции возмущений f, g определяются формулами (13), (14), в которых содержится усреднение по быстрой фазе ψ. Вычисление деформации $h_0(\theta)$ сводится к решению уравнения (19), в котором правая часть (20) содержит усреднение по φ в промежуточном масштабе τ. Таким образом появляется двойное усреднение.

Лемма 2. *Правая часть усредненного уравнения* (19) *выражается через исходные данные посредством интегралов усреднения по* ψ, φ *в виде*

$$Z(h,\theta) = \partial_\theta \Big\langle u(\sigma,\theta) \Big\rangle + \Big\langle \rho^2 \langle \partial_E F(E,\sigma,\psi,\theta) + \partial_\sigma G(E,\sigma,\psi,\theta) \rangle \Big\rangle$$
$$+\Big\langle \rho^2 \Big\rangle \partial_E \frac{\partial_\theta \Lambda(E,\theta)}{\partial_E \Lambda(E,\theta)}\Big|_{E=\mathcal{E}_0(\theta)}. \tag{21}$$

Здесь $\rho, \sigma(\varphi,h,\theta)$ – *периодические решения замороженной системы маятникового типа с потенциалом* $u(\sigma,\theta) = \int f_0(\sigma,\theta)\,d\sigma$.

Доказательство. Вычислим интегралы среднего значения, входящие в правую часть уравнения (19). Функция f, определенная в (14), имеет вид

$$f(\rho,\sigma,\theta) = \rho \frac{1}{\partial_E \Lambda(\mathcal{E}_0(\theta),\theta)} \partial_E \Big[\langle F(E,\sigma,\psi,\theta) \rangle \, \partial_E \Lambda(E,\theta) + \partial_\theta \Lambda(E,\theta) \Big]_{E=\mathcal{E}_0(\theta)} -$$
$$-\frac{1}{2} \partial_\sigma \langle \mathcal{R}_0^2(\sigma,\psi,\theta) \rangle.$$

Последнее слагаемое при вычислении среднего $\Big\langle f\,\partial_\varphi \sigma \Big\rangle$ дает нуль:

$$\Big\langle \partial_\varphi \sigma \, \partial_\sigma \langle \mathcal{R}_0^2(\sigma,\psi,\theta) \rangle \Big\rangle = \Big\langle \partial_\varphi \langle \mathcal{R}_0^2(S_0,\psi,\theta) \rangle \Big\rangle = 0$$

независимо от свойств осциллирующей по ψ функции $\mathcal{R}_0$. Тогда в оставшейся части двойного усреднения $\nu \Big\langle f\,\partial_\varphi \sigma \Big\rangle$ с учетом уравнения $\nu\,\partial_\varphi \sigma = \rho$ фигурирует квадрат функции $\rho(\varphi,h,\theta)$:

$$\nu \Big\langle f\,\partial_\varphi \sigma \Big\rangle = \frac{1}{\partial_E \Lambda(E)} \partial_E \Big[\Big\langle \rho^2 \langle F(E,\sigma,\psi,\theta) \rangle \Big\rangle \, \partial_E \Lambda(E,\theta) + \Big\langle \rho^2 \Big\rangle \partial_\theta \Lambda(E,\theta) \Big] \Big|_{E=\mathcal{E}_0(\theta)}.$$

В этом выражении производная по E вносится внутрь скобок и учитывается усредненное уравнение в форме

$$\langle F(E,s,\psi,\theta) \rangle = \big[\nu \partial_\varphi \rho - \partial_\theta \Lambda(E,\theta) \big] / \partial_E \Lambda(E,\theta).$$

Поскольку среднее от производной $\Big\langle \partial_\varphi\,\rho \Big\rangle = 0$ дает нуль, то остается выражение

$$\nu \Big\langle f\,\partial_\varphi \sigma \Big\rangle = \Big\langle \rho^2 \langle \partial_E F(E,\sigma,\psi,\theta) \rangle \Big\rangle + \Big\langle \rho^2 \Big\rangle \frac{1}{\partial_E \Lambda(E)} \partial_E \Big[\frac{\partial_\theta \Lambda(E,\theta)}{\partial_E \Lambda(E,\theta)} \Big] \Big|_{E=\mathcal{E}_0(\theta)}$$

При вычислении среднего $\Big\langle g\,\partial_\varphi \rho \Big\rangle$ используется представление
$g = \langle G(\mathcal{E}_0, \sigma(\varphi,H,\theta),\psi,\theta) \rangle$. При двойном усреднении нтеграл по φ берется по частям и используется тождество $\nu\,\partial_\varphi \sigma = \rho$:

$$-\nu \Big\langle g \partial_\varphi \rho \Big\rangle = \nu \Big\langle \partial_\varphi \sigma \langle \partial_\sigma G(\mathcal{E}_0, \sigma(\varphi,H,\theta),\psi,\theta) \rangle \rho \Big\rangle = \Big\langle \langle \partial_\sigma G(\mathcal{E}_0,\sigma,\psi,\theta) \rangle \rho^2 \Big\rangle.$$

Таким образом, в сумме выражение (20) переходит в (21). Лемма доказана.

В частных случаях выражение(21) упрощается.

Следствие 2. *Пусть функция* $\Lambda(E,\theta)$ *представляет собой разность частот* $\Lambda(E,\theta) = \Omega(E) - \omega($
Тогда потенциал

$$u(s,\theta) = -\Omega'(\mathcal{E}_0(\theta)) \int^s \langle F(\mathcal{E}_0(\theta), s, \psi, \theta) \rangle \, ds + s \cdot \omega'(\theta),$$

а правая часть усредненного уравнения

$$Z(h_0,\theta)=\partial_\theta\Big\langle u(\sigma,\theta)\Big\rangle+\Big\langle\rho^2\langle\partial_E F(E,\sigma,\psi,\theta)+\partial_\sigma G(E,\sigma,\psi,\theta)\rangle\Big\rangle+$$

$$+\frac{\mathcal{E}_0'(\theta)\,\Omega''(\mathcal{E}_0(\theta))}{\Omega'(\mathcal{E}_0(\theta))}\Big\langle\rho^2\Big\rangle.$$

Для доказательства надо учесть вытекающее из $\Lambda(\mathcal{E}_0(\theta),\theta)\equiv 0$ тождество

$$\mathcal{E}_0'(\theta)=-\frac{\partial_\theta\Lambda(E,\theta)}{\partial_E\Lambda(E,\theta)}\Big|_{E=\mathcal{E}_0(\theta)}=\frac{\omega'(\theta)}{\Omega'(\mathcal{E}_0(\theta))}\ .$$

.

Следствие 3. *Пусть усредненное по ψ возмущение является гамильтоновым: $\langle\partial_E F+\partial_S G\rangle=0$, а функция $\Lambda(E,\theta)$ представляет собой разность частот $\Lambda(E,\theta)=\Omega(E)-\omega(\theta)$. Тогда правая часть усредненного уравнения*

$$Z(h_0,\theta)=\partial_\theta\Big\langle u(\sigma,\theta)\Big\rangle+\frac{\mathcal{E}_0'(\theta)\,\Omega''(\mathcal{E}_0(\theta))}{\Omega'(\mathcal{E}_0(\theta))}\Big\langle\rho^2\Big\rangle.$$

Здесь $\rho,\sigma(\varphi,h_0,\theta)$ – периодические решения замороженной системы, и усреднение берется по φ.

6. Деформация площади

Из уравнения, полученного в результате двойного усреднения, трудно извлечь информацию о моменте обрыва резонанса, когда траектория выходит на границу осцилляционной области. Однако, это уравнение можно преобразовать к более подходящей форме, исключив потенциал.

На фазовой плоскости рассмотрим площадь Π, охватываемую замороженной траекторией. $r=\rho(\varphi,h,\theta),\ s=\sigma(\varphi,h,\theta)$. Имеют место соотношения:

$$\Pi=\oint\rho\,d\sigma=\int_0^{2\pi}\rho(\varphi,h,\theta)\partial_\varphi\sigma(\varphi,h,\theta)\,d\varphi=2\pi\Big\langle\rho\,\partial_\varphi\sigma\Big\rangle=\frac{2\pi}{\nu}\Big\langle\rho^2\Big\rangle\ .$$

Эту величину выгодно использовать вместо h для параметризации семейства периодических решений. Ее преимущество проявляется в более простом уравнении медленной деформации.

Теорема 2. *Эволюция площади под медленно деформирующейся траекторией усредненной системы маятникового типа* (12) *в главном члене асимптотики $\Pi=\Pi_0(\theta)+\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ описывается уравнением*

$$\frac{d\Pi_0}{d\theta}=\frac{2\pi}{\nu}\Big\langle\rho^2\langle\partial_E F(E,\sigma,\psi,\theta)+\partial_\sigma G(E,\sigma,\psi,\theta)\rangle\Big\rangle+\Pi_0\,\partial_E\frac{\partial_\theta\Lambda(E,\theta)}{\partial_E\Lambda(E,\theta)}\Big|_{E=\mathcal{E}_0(\theta)}. \tag{22}$$

Здесь $\rho,\sigma(\varphi,h_0,\theta)$ – периодические решения замороженной системы, $\nu(h_0,\theta)$ – частота; усреднение берется по φ.

Пояснение. Уравнение для $\Pi_0(\theta)$ в общем случае не тривиально ввиду зависимости площади от траектории, т.е. от параметра h.

Доказательство теоремы 2. Зависимость $\Pi(\theta)$ от медленного времени θ входит как явно так и через параметр $h=h(\theta;\varepsilon)$. Поэтому для производной получаем соотношение с учетом взятия по частям одного из интегралов

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d\Pi}{d\theta}=\Big\langle[\partial_h\rho\partial_\varphi\sigma-\partial_\varphi\rho\partial_h\sigma]\Big\rangle\frac{dh}{d\theta}+\Big\langle[\partial_\theta\rho\partial_\varphi\sigma-\partial_\varphi\rho\partial_\theta\sigma]\Big\rangle.$$

Для главных членов асимптотики $\Pi = \Pi_0(\theta) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, $h = h_0(\theta) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ с учетом тождеств (17) и усредненного уравнения (19) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d\Pi_0}{d\theta} = \frac{1}{\nu}\frac{dh_0}{d\theta} - \frac{1}{\nu}\partial_\theta u(\sigma,\theta).$$

Если для $h_0(\theta)$ учесть уравнение (19) и выражение для правой части (21), то получается соотношение

$$\frac{\nu}{2\pi}\frac{d\Pi_0}{d\theta} = \Big\langle \rho^2 \langle \partial_E F(E,\sigma,\psi,\theta) + \partial_\sigma G(E,\sigma,\psi,\theta)\rangle \Big\rangle + \Big\langle \rho^2 \Big\rangle \partial_E \frac{\partial_\theta \Lambda(E,\theta)}{\partial_E \Lambda(E,\theta)}\Big|_{E=\mathcal{E}_0(\theta)}.$$

Учитывая связь среднего $\Big\langle \rho^2 \Big\rangle$ с площадью, получаем (22). Теорема доказана.

Из уравнения (22) видно, что параметрическая деформация потенциала $u(s,\theta)$ и гамильтоновы возмущения, когда $\partial_E F + \partial_S G = 0$, не проявляются на главном члене асимптотики площади. В гамильтоновом случае уравнение для площади значительно упрощается.

Следствие 4. *Пусть возмущение в исходной системе является гамильтоновым после усреднения по* ψ: $\langle \partial_E F + \partial_S G\rangle = 0$. *Тогда медленная эволюция площади описывается соотношением*

$$\frac{d\Pi_0}{d\theta} = \Pi_0 \cdot \partial_E \frac{\partial_\theta \Lambda(E,\theta)}{\partial_E \Lambda(E,\theta)}\Big|_{E=\mathcal{E}_0(\theta)}. \tag{23}$$

Уравнение (23) очевидно интегрируется. Наиболее простое выражение получается в частном случае, который сформулирован в теореме 1.

Следствие 5. *Пусть возмущение в исходной системе является гамильтоновым после усреднения по* ψ, *и функция* $\Lambda(E,\theta) = \Omega(E) - \omega(\theta)$. *представляет собой разность частот. Тогда медленная эволюция площади описывается формулой* $\Pi_0(\theta) = \Pi(0)\Omega'(\mathcal{E}_0(\theta))/\Omega'(\mathcal{E}_0(0))$, *которая соответствует теореме 1.*

Доказательство. В рассматриваемом случае уравнение деформации площади имеет вид

$$\frac{d\Pi_0}{d\theta} = \frac{\mathcal{E}_0'(\theta)\,\Omega''(\mathcal{E}_0(\theta))}{\Omega'(\mathcal{E}_0(\theta))}\Pi_0.$$

Формула (5) дает его решение.

Из полученной формулы для площади немедленно вытекает следствие 1. Отметим, что результаты для этого частного случая (гамильтовых возмущений) соответствуют известным [16, 17].

В негамильтоновом случае уравнение для площади иногда можно проинтегрировать. Например, в модели, учитывающей диссипацию в форме $\langle \partial_E F(E,\sigma,\psi,\theta) + \partial_\sigma G(E,\sigma,\psi,\theta)\rangle = \beta(\theta) < 0$, функция $\Pi_0(\theta)$ будет экспоненциально убывать по θ.

7. Заключение

Для нелинейной осциллирующей системы с малым (порядка $\varepsilon \ll 1$) резонансным возмущением исследована задача о времени существования резонанса. В асимптотическом приближении задача сводится к анализу модельной системы маятникового типа. В этом приближении время обрыва резонанса $t_c \approx \varepsilon^{-1}$ отождествляется с моментом выхода медленно деформирующейся траектории на границу осцилляционной области. Для площади под замороженной траекторией выписано уравнение деформации (22). Его решение позволяет выписать функциональное уравнение для момента обрыва резонанса. Наиболее простая ситуация бывает в случае, когда возмущение является гамильтоновым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калякин Л.А. *Асимптотический анализ моделей авторезонанса* // Успехи мат. наук. Т. 63, № 5. 2008. С. 3–72.
2. A.I. Neishtadt, A.A. Vasiliev and A.V. Artemyev *Capture into Resonance and Escape from it in a Forced Nonlinear Pendulum* // Regular and Chaotic Dynamics. V. 18, No. 6, 2013. P. 691–701.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* М.: Наука. 1974. 503 с.
4. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. *Математические аспекты классической и небесной механики.* М.: ВИНИТИ. 1985. 304 с.
5. Нейштадт А.И. *Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно меняющимся параметром* // Прикладная математика и механика. Т. 39, № 4. 1975. С. 621–632.
6. O.M. Kiselev and S.G. Glebov *An asymptotic solution slowly crossing the separatrix near a saddle–centre bifurcation point* // Nonlinearity. V. 16. 2003. P. 327–362.
7. A. Neishtadt, A. Vasilliev *Phase change between separatrix crossing in slow-fast Hamiltonian systems* // Nonlinearity, V. 18. 2005. pp. 1393–1406.
8. Киселев О.М. *Осцилляции около сепаратрисы в уравнении Дюффинга* // Тр. ИММ УрО РАН. Т. 18, № 2. 2012. С. 141–153.
9. K.S. Golovanivsky *Autoresonant Acceleration of Electrons at Nonlinear ECR in a Magnetic Field Which is Smoothly Growing in Time* // Physica Scripta. V. 22. 1980. P. 126–133.
10. K.S. Golovanivsky *The Gyromagnetic Autoresonance* // IEEE Transactions on plasma science. V. PS-1 1, № 1. 1983. P. 28–35.
11. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса.* М.: Наука. 1977.
12. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. *Введение в теорию колебаний и волн.* НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". Москва–Ижевск, 2000.
13. Чириков Б.В. *Прохождение нелинейной колебательной системы через резонанс* // Доклады АН СССР. Т. 125: 5. 1959. С. 1015–1018.
14. Калякин Л.А. *Усреднение в модели авторезонанса* // Мат. Заметки. Т. 73, вып. 3. 2003. С. 449–452.
15. A.P. Itin, A.I. Neishtadt, A.A. Vasiliev *Capture into resonance in dynamics of a charged partice in magnetic field and electrostatic wave* // Physica D. V. 141, № 4. 2000. P. 281–296.
16. Нейштадт А.И. *Захват в резонанс и рассеяние на резонансах в двухчастотных системах* // Труды МИАН. Т. 250. 2005. С. 198–218.
17. Нейштадт А.И. *Усреднение, прохождение через резонансы и захват в резонанс в двухчастотных системах* // Успехи мат. наук. Т. 69, № 5. 2014. С. 3–80.

Леонид Анатольевич Калякин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: klenru@mail.ru