ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 10. № 4 (2018). С. 103-110.

УДК 517.957

СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА СИММЕТРИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА И ОБОБЩЕННЫЕ ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА

С.Я. СТАРЦЕВ

Аннотация. Статья посвящена гиперболическим системам, состоящим из n уравнений в частных производных и допускающим драйверы симметрий (то есть дифференциальные операторы, которые переводят любую функцию одной из независимых переменных в симметрию соответствующей системы). Наличие драйверов симметрий является отличительным свойством уравнения Лиувилля и ему подобных систем. Композиция дифференциального оператора, коэффициенты которого лежат в ядре полной производной, и драйвера симметрий снова является драйвером симметрий. Доказано, что все множество драйверов симметрий с помощью вышеуказанных композиций порождается базисным набором, состоящим не более чем из n драйверов симметрий, сумма порядков которых является минимальной из возможных.

Также доказано, что если система допускает драйвер симметрий порядка $k-1$ и для нее корректно определены обобщенные инварианты Лапласа, то старший коэффициент драйвера симметрий лежит в ядре k-го инварианта Лапласа. Опираясь на это утверждение, мы можем, посчитав инварианты Лапласа системы, получить оценку снизу для минимальных порядков драйверов симметрий этой системы. Это позволяет нам проверить, можем ли мы гарантировать, что тот или иной набор драйверов является базисным.

Ключевые слова: высшие симметрии, драйверы симметрий, нелинейные гиперболические системы в частных производных, инварианты Лапласа, интегрируемость по Дарбу.

Mathematics Subject Classification: 37K05, 37K10, 35L51

1. Введение

Рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

где $u = (u^1; u^2; \dots; u^n)$ и $F = (F^1; F^2; \dots; F^n)$ являются n-мерными векторами, а u является функцией вещественных переменных x и y. Поскольку все соотношения в данной статье рассматриваются на решениях этой системы, смешанные частные производные u мы можем исключить с помощью системы (1) и ее дифференциальных следствий. Поэтому без нарушения общности можно считать все локальные объекты (такие как симметрии и коэффициенты дифференциальных операторов) зависящими только от x, y, u и ее "несмешанных" производных $u_i := \partial^i u/\partial x^i$, $\bar{u}_j := \partial^j u/\partial y^j$. В дальнейшем мы будем использовать обозначение $g[u]$ когда хотим указать, что g является функцией от конечного числа вышеуказанных переменных. Через D_x и D_y обозначим полные производные по x и y в силу системы (1).

S.Ya. Startsev, Structure of a set of symmetries for hyperbolic systems of Liouville type and generalized Laplace invariants.

Поступила 17 июля 2018 г.

В скалярном случае (при $n = 1$) одним из наиболее известных нелинейных уравнений вида (1) является уравнение Лиувилля $u_{xy} = e^u$. Оно обладает многими интересными свойствами и, в частности, как показано в работе [1], допускает дифференциальные операторы $\sigma = D_x + u_x$ и $\bar\sigma = D_y + u_y$, отображающие $\ker D_y$ и $\ker D_x$ в решения f линеаризованного уравнения Лиувилля $D_xD_y(f) = e^u f$. Другими словами, $\sigma(g)$ и $\bar\sigma(\bar g)$ являются симметриями уравнения Луивилля для любых функций $g[u] \in \ker D_y$, $\bar g[u] \in \ker D_x$ (например, для любых функций, зависящих только от x и y соответственно).

Аналогичным свойством обладают и многие интегрируемые системы вида (1). Например, рассмотрим систему

$$u^1_{xy} = \frac{u^2u^1_xu^1_y}{u^1u^2+c}, \qquad u^2_{xy} = \frac{u^1u^2_xu^2_y}{u^1u^2+c}, \tag{2}$$

где c – ненулевая константа. Эта система является вырожденным случаем системы Полмейера-Лунда-Редже, и операторы

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} u^1_x \\ \\ u^2_x \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} \frac{u^1_x}{w} \\ \\ 0 \end{pmatrix} D_x + \begin{pmatrix} -u^1 \\ \\ u^2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\omega = u^1_xu^2_x/(u^1u^2+c)$, переводят любую скалярную функцию из $\ker D_y$ в симметрию этой системы. Подобные операторы, переводящие ядра D_y и D_x в симметрии системы (1), в дальнейшем мы будем назвать *драйверами* x*- и* y*-симметрий* соответственно (более аккуратное их определение будет дано ниже, а примеры допускающих их систем можно, в частности, найти в [2]–[5]).

Пусть символ $\circ$ обозначает операцию композиции операторов. Нетрудно видеть, что если оператор S является драйвером x-симметрий, то $S \circ \Omega$ также является драйвером x-симметрий для любого оператора $\Omega = \sum_{i=0}^m w_i[u]D_x^i$, такого что скалярные функции w_i лежат в ядре D_y. Аналогичное верно и для драйверов y-симметрий. Таким образом, если система (1) допускает драйверы симметрий, то их имеется бесконечно много и возникает вопрос о том, как компактно описать это множество: не удается ли породить все это множество с помощью вышеописанной композиции из некоторого конечного числа базисных драйверов симметрий? И если да, то сколько драйверов симметрий нужно для этого базисного набора (достаточно ли, например, n штук по каждой из характеристик или же их может быть и больше)? В настоящей статье дан ответ на эти вопросы. А именно, доказано, что множество драйверов симметрий порождается базисным набором, состоящим не более чем из n драйверов симметрий, сумма порядков которых является минимальной из возможных.

Также доказано, что если система (1) допускает драйвер симметрий порядка $k-1$ и для нее корректно определены обобщенные инварианты Лапласа, то старший коэффициент драйвера симметрий лежит в ядре k-го инварианта Лапласа. Опираясь на это утверждение, мы можем, посчитав инварианты Лапласа системы (1), получить оценку снизу для минимальных порядков драйверов симметрий этой системы и проверить можем ли мы гарантировать, что тот или иной набор драйверов является базисным. Стоит отметить, что оценки для минимальных порядков драйверов симметрий, полученные с помощью инвариантов Лапласа, во всех известных автору примерах оказываются точными (то есть дающими реальные минимумы порядков).

2. Структура драйверов симметрий

Пусть верхний индекс $\top$ обозначает операцию транспонирования матриц. Через $g_z = \partial g/\partial z$, где g – скалярная функция, z – вектор $(z^1, z^2, \ldots, z^n)^\top$ будем обозначать строку $(\partial g/\partial z^1, \partial g/\partial z^2, \ldots, \partial g/\partial z^n)$. Если же g является вектор-функцией $(g^1, g^2, \ldots, g^\ell)^\top$, то через g_z обозначается матрица со строками $g_z^1, \ldots, g_z^\ell$. С учетом этих стандартных обозначений полные производные D_x и D_y для любой скалярной функции $g[u]$ задаются формулами

$$D_x(g) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} u_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g}{\partial u_i} u_{i+1} + \frac{\partial g}{\partial \bar{u}_i} D_y^{i-1}(F) \right),$$

$$D_y(g) = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u} \bar{u}_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{u}_i} \bar{u}_{i+1} + \frac{\partial g}{\partial u_i} D_x^{i-1}(F) \right).$$

Результат применения D_x и D_y к векторам и матрицам определяется покомпонентно. В вышеприведенных формулах и везде далее мы полагаем нулевую степень любого дифференцирования равной оператору тождественного отображения.

Определение 1. *Вектор-функция* $f = (f^1[u], f^2[u], \ldots, f^n[u])^\top$ *называется* симметрией *системы* (1) *если* $L(f) = 0$, *где*

$$L = D_x D_y - F_{u_x} D_x - F_{u_y} D_y - F_u. \tag{4}$$

Определение 2. *Дифференциальный оператор*

$$\sigma = \sum_{i=0}^{k} \varsigma_i[u] D_x^i, \qquad \varsigma_k \neq 0, \qquad k \geq 0, \tag{5}$$

где ς_i *являются* n*-мерными векторами, будем называть* драйвером x-симметрий *для системы* (1), *если* $\sigma(g)$ *является симметрией этой системы для любой скалярной функции* $g[u] \in \ker D_y$. *Вектор* ς_k *называется* сепарантой *драйвера симметрий* (5), *а число* k – порядком *этого драйвера. Будем говорить, что драйверы симметрий* σ_1, σ_2, ..., σ_r взаимно независимы, *если матрица размера* $n \times r$, *составленная из их сепарант, имеет ранг* r.

Аналогичным образом определяются и драйверы y-симметрий – для этого достаточно лишь поменять местами x и y везде в определении 2. Используя симметричность формулы (1) относительно перестановки $x \leftrightarrow y$, далее мы приводим лишь одно из двух "симметричных" определений и утверждений.

Лемма 1. *Если оператор* (5) *является драйвером* x*-симметрий, то его коэффициенты* ς_i *не зависят от* $\bar{u}_j$ *для всех* $j > 0$, *а его сепаранта* ς_k *лежит в ядре* $D_y - F_{u_x}$.

Доказательство. По определению драйвера x-симметрий для любой функции $g(x)$ выполняется соотношение $L(\sigma(g)) = 0$. Собирая члены при i-той производной g по x в этом равенстве и учитывая произвольность функции g, приходим к следующей цепочке соотношений:

$$(D_y - F_{u_x})(\varsigma_k) = 0,$$
$$(D_y - F_{u_x})(\varsigma_{i-1}) = -L(\varsigma_i), \quad 0 < i \leq k.$$

Из первого из этих соотношений видно, что ς_k не может зависеть от производных u по y, а из второго – что $(\varsigma_{i-1})_{\bar{u}_j} = 0$ для всех $j > 0$ если ς_i не зависит от производных u по y. □

Определение 3. *Набор драйверов* x*-симметрий* σ_1, σ_2, ..., σ_r *называется* базисным *для системы* (1), *если выполнены следующие условия:*

1) драйверы из этого набора взаимно независимы;

2) у системы (1) *не имеется набора взаимно независимых драйверов* x*-симметрий, содержащего более чем* r *драйверов;*

3) сумма порядков драйверов набора является минимальной среди всех наборов из r *взаимно независимых драйверов* x*-симметрий системы* (1).

Поскольку взаимно независимых драйверов не может быть более чем n, условие 2) в определении 3 выполняется автоматически в случае $r = n$. Но этот последний случай не является единственно возможным и, вообще говоря, r может быть и меньше n. Например, система

$$u^i_{xy} = \sum_{j=1}^{n} A^i_j \mathrm{e}^{u^j}, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{6}$$

допускает драйвер x-симметрий $(1, 1, \dots, 1)^\top D_x + u_x$ при любых значениях констант A^i_j, но в ситуации общего положения, по-видимому, не допускает драйверов симметрий с сепарантами, отличными от векторов вида $(c[u], c[u], \dots, c[u])^\top$. Если последнее верно, то, за исключением некоторого числа особых случаев, $r = 1$ для этой системы.

Из определения 3 очевидно, что базисный набор драйверов существует для любой системы (1), допускающей драйверы симметрий. Поэтому нижеследующая теорема применима к любой такой системе.

Теорема 1. *Пусть набор драйверов x-симметрий σ_1, σ_2, ..., σ_r является базисным для системы* (1). *Тогда любой драйвер x-симметрий S этой системы можно записать как*

$$S = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \circ \Omega_i, \tag{7}$$

где Ω_i – некоторые операторы вида $\sum_{j=0}^{q_i} w_{ij}[u] D^j_x$, такие что $q_i \geq 0$ и скалярные функции w_{ij} принадлежат $\ker D_y$.

Доказательство. Обозначим порядки операторов σ_1, σ_2, ..., σ_r через p_1, p_2, ..., p_r соответственно. Без нарушения общности можно считать, что эти операторы упорядочены по возрастанию порядков, то есть $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_r$. Через ς_i обозначим сепаранту драйвера σ_i, а через ξ и p – сепаранту и порядок драйвера S.

Опишем теперь процедуру последовательного понижения порядка S с помощью базисных драйверов при предположении $p \geq p_r$ (если это предположение не выполнено, мы просто пропускаем первые шаги процедуры и переходим сразу к описанным в следующих абзацах).

Если $p \geq p_r$, то мы можем записать $\xi = \sum_{i=1}^{r} \tilde{w}_i[u] \varsigma_i$ в силу пункта 2) определения 3. Учитывая лемму 1, получаем

$$\sum_{i=1}^{r} D_y(\tilde{w}_i) \varsigma_i = \left(D_y - F_{u_x}\right)(\xi) = 0$$

и $D_y(\tilde{w}_i) = 0$ в силу линейной независимости векторов ς_i. Поэтому оператор

$$\tilde{S} = S - \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \circ \tilde{w}_i D_x^{p-p_i}$$

является драйвером x-симметрий (либо просто равен нулю) и имеет порядок меньше p. Если порядок $\tilde{S}$ оказывается большим или равным p_r, то мы повторяем вышеописанную процедуру еще раз (применяя ее уже к $\tilde{S}$) и так далее. В итоге, после нескольких шагов указанной процедуры мы либо полностью выразим S в виде (7), либо представим в виде (7) лишь несколько старших членов оператора S и получим драйвер симметрий

$$\hat{S} = S - \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \circ \sum_{j=0}^{p-p_i} \hat{w}_{ij}[u] D^j_x, \quad \hat{w}_{ij} \in \ker D_y,$$

порядка $\hat{p} < p_r$.

Предположим, что $p_\ell \le \hat{p} < p_{\ell+1}$. В силу пункта 2) определения 3 сепаранту $\hat{\xi}$ драйвера $\hat{S}$ мы можем записать как $\hat{\xi} = \sum_{i=1}^{r} \bar{w}_i[u]\varsigma_i$. Если $\bar{w}_i \ne 0$ для какого-нибудь $i > \ell$, то мы можем заменить σ_i на $\hat{S}$ и получить новый набор из r взаимно независимых драйверов с суммой порядков этих драйверов меньшей чем $\sum_{j=1}^{r} p_j$. Но это противоречит пункту 3) определения 3. Поэтому $\bar{w}_i = 0$ для всех $i > \ell$ и $\hat{\xi} = \sum_{i=1}^{\ell} \bar{w}_i[u]\varsigma_i$. С учетом этого, мы можем описанную в предыдущем абзаце процедуру понижения порядка драйвера симметрий повторять до тех пор, пока не сделаем этот порядок меньше p_1.

Повторяя рассуждения предыдущего абзаца в случае $\hat{p} < p_1$, получаем, что драйвер симметрий имеет порядок меньше p_1 лишь тогда, когда его сепаранта равна нулю (что противоречит определению драйвера симметрий). Таким образом, “остаток”, получающийся после того, как порядок драйвера симметрий понижен вышеописанной процедурой до величины меньшей p_1, должен быть равен нулю. А это означает, что S полностью записан в виде (7). □

3. Обобщенное преобразование Лапласа для драйверов симметрий

Нетрудно видеть, что оператор (4) можно представить в виде

$$L = \left(D_x - F_{u_y}\right) \circ \left(D_y - F_{u_x}\right) - H_1,$$

где $H_1 = F_{u_y}F_{u_x} + F_u - D_x(F_{u_x})$. Стартуя с H_1, мы можем построить матрицы $a_i[u]$, $H_i[u]$ размера $n \times n$, определяемые рекуррентными формулами

$$D_y(H_iH_{i-1}\dots H_1) + H_iH_{i-1}\dots H_1F_{u_x} + a_iH_iH_{i-1}\dots H_1 = 0, \tag{8}$$

$$H_{i+1} = D_x(a_i) - [F_{u_y}, a_i] + D_y(F_{u_y}) + H_i. \tag{9}$$

Равенства (8)–(9) получаются прямым переносом формул для инвариантов Лапласа H_i со скалярного случая (описанного, например, в [6]) на случай систем (формулы для скалярного случая в форме, пригодной для систем, выписаны, например, во вводной части работы [5]). В работе [7] было отмечено, что как минимум для некоторых хорошо известных систем корректно определенными объектами оказываются не H_i, а матрицы $Y_i = H_iH_{i-1}\dots H_1$. Поэтому матрицы Y_i мы будем называть *обобщенными y-инвариантами Лапласа* системы (1).

В случае $\det(Y_i) = 0$ уравнение (8) может не иметь решения a_i, а если оно все же есть, то a_i определено неоднозначно. Соответственно, матрица H_{i+1} и инвариант Лапласа Y_{i+1}, вообще говоря, определены некорректно – могут не существовать, либо задаваться неоднозначно. Однако, как минимум в некоторых интересных случаях обобщенные инварианты Лапласа Y_i существуют и однозначно определены формулами (8)-(9). Например, как показано в [8, 9], к числу таких случаев относятся все системы вида (6), для которых A_j^i является матрицей Картана простой алгебры Ли.

Из формулы (9) легко видеть, что Y_{i+1} не зависит от выбора a_i тогда и только тогда, когда $\left(D_x + F_{u_y}^\top\right)(\ker Y_i^\top) \subset \ker Y_i^\top$. А это означает (см. теорему 8 в [7], либо утверждение 3 в [10]), что найдется матрица $B_i[u]$ размера $n \times n$, такая что выполнено следующее операторное соотношение

$$\left(D_x - F_{u_y}\right) \circ Y_i = Y_i \circ \left(D_x + B_i\right). \tag{10}$$

Уравнение (8) также можно записать в виде операторного равенства

$$\left(D_y + a_i\right) \circ Y_i = Y_i \circ \left(D_y - F_{u_x}\right). \tag{11}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что обобщенные y-инварианты Лапласа системы (1) существуют и определены единственным образом, то есть что выполнены соотношения (10), (11) для всех Y_i, которые нам потребуются для рассуждений.

Введем операторы

$$l_i = (D_x - F_{u_y}) \circ (D_y + a_i) - H_{i+1},$$

$$L_i = (D_x - F_{u_y}) \circ Y_i \circ (D_y - F_{u_x}) - Y_{i+1}.$$

Обозначив $-F_{u_x}$ через a_0 и положив Y_0 равным единичной матрице размера $n \times n$, мы можем считать, что $l_0 = L_0 = L$. Из (11) следует, что

$$L_i = l_i \circ Y_i, \tag{12}$$

$$(D_y + a_{i+1}) \circ L_i = \left[(D_y + a_{i+1}) \circ (D_x - F_{u_y}) - H_{i+1}\right] \circ Y_i \circ (D_y - F_{u_x}).$$

Учитывая (9), последнее равенство можно записать как

$$(D_y + a_{i+1}) \circ L_i = l_{i+1} \circ Y_i \circ (D_y - F_{u_x}). \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *существуют обобщенные y-инварианты Лапласа Y_q для всех положительных $q \le i+2$ и инвариант Лапласа Y_{i+2} не зависит от выбора решения a_{i+1} уравнения* (8). *Также пусть для этой системы найдутся n-мерные векторы $\alpha_j[u]$, такие что $\alpha_m \neq 0$, $m > 0$, и оператор $P_i = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j D_x^j$ переводит любую скалярную функцию из ядра D_y в ядро L_i.*

Обозначим через P_{i+1} оператор $P_{i+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{\alpha}_j[u] D_x^j$, $\hat{\alpha}_{m-1} = \alpha_m$, полученный делением оператора P_i на оператор $D_x + B_{i+1}$, то есть такой что

$$P_i = (D_x + B_{i+1}) \circ P_{i+1} + z[u], \tag{14}$$

где B_{i+1} находится по формуле (10), *а z является n-мерным вектором. Тогда P_{i+1} переводит любую скалярную функцию из ядра D_y в ядро L_{i+1}, а остаток z от деления P_i на $D_x + B_{i+1}$ лежит в ядре Y_{i+1}.*

Доказательство. Пусть $L_i(P_i(w)) = 0$ для любой скалярной функцииw$[u]$, принадлежащей $\ker D_y$. Тогда, в силу (13), выполняется равенство

$$l_{i+1}\big(Y_i(D_y - F_{u_x})(P_i(w))\big) = 0,$$

то есть оператор $\hat{P}_i = \sum_{j=0}^{m} \beta_j D_x^j$, где $\beta_j = Y_i(D_y - F_{u_x})(\alpha_j)$, переводит ядро D_y в ядро l_{i+1}.

С другой стороны, повторяя рассуждения из доказательства леммы 1, получаем что условие $L_i(P_i(w)) = 0$ равносильно цепочке соотношений

$$\begin{aligned} \beta_m &= 0, \\ \beta_{j-1} &= Y_{i+1}\alpha_j - (D_x - F_{u_y})(\beta_j), \quad j = \overline{1,m} \\ 0 &= Y_{i+1}\alpha_0 - (D_x - F_{u_y})(\beta_0). \end{aligned} \tag{15}$$

Вторая из этих формул при $j = m$ дает нам $\beta_{m-1} = Y_{i+1}\alpha_m$. Воспользовавшись этим, а также тем, что, в силу (10), оператор $D_x - F_{u_y}$ сохраняет образ Y_{i+1}, мы можем доказать индукцией по k, что β_{m-k} лежит в образе Y_{i+1} для всех $k = \overline{0,m}$.

Таким образом, $\beta_j = Y_{i+1}\hat{\alpha}_j$. Тогда формулы (15) мы можем переписать, учитывая (10), в виде

$$\begin{aligned} Y_{i+1}\hat{\alpha}_m &= 0, \\ Y_{i+1}\hat{\alpha}_{j-1} &= Y_{i+1}\left(\alpha_j - (D_x + B_{i+1})(\hat{\alpha}_j)\right), \quad j = \overline{1,m} \\ 0 &= Y_{i+1}\left(\alpha_0 - (D_x + B_{i+1})(\hat{\alpha}_0)\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Учитывая, что $\hat{\alpha}_j$ определены с точностью до ядра Y_{i+1}, мы можем выбрать $\hat{\alpha}_m = 0$, $\hat{\alpha}_{m-1} = \alpha_m$, а остальные $\hat{\alpha}_j$ определить по формуле

$$\hat{\alpha}_{j-1} = \alpha_j - (D_x + B_{i+1})(\hat{\alpha}_j).$$

Такой выбор $\hat{\alpha}_j$ гарантирует нам, что оператор $P_{i+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{\alpha}_j D_x^j$ удовлетворяет соотношению (14), причем остаток от деления z определяется формулой $z = \alpha_0 - (D_x + B_{i+1})(\hat{\alpha}_0)$ и, в силу последнего из равенств (16), $Y_{i+1} z = 0$.

По построению оператор P_{i+1} связан соотношением $Y_{i+1} P_{i+1} = \hat{P}_i$ с оператором $\hat{P}_i$, который отображает ядро D_y в ядро l_{i+1}. Поэтому оператор P_{i+1} будет переводить ядро D_y в ядро $l_{i+1} \circ Y_{i+1}$. Но, в силу (12), $l_{i+1} \circ Y_{i+1} = L_{i+1}$. $\square$

Следствие 1. *Пусть система* (1) *допускает драйвер x-симметрий k-го порядка с сепарантой ξ и для нее существуют и однозначно определены обобщенные y-инварианты Лапласа Y_q для всех положительных $q \le k+1$. Тогда $Y_i \xi = 0$ для всех $i > k$, для которых существуют инварианты Лапласа Y_i.*

Доказательство. Многократно применяя теорему 2, получаем, что $L_k(\xi f(x)) = 0$ для любой скалярной функции f. Последнее равенство равносильно условию $Y_{k+1}\xi = 0$ в силу леммы 1. Осталось лишь заметить, что $\ker Y_i \subset \ker Y_{i+1}$ для всех i, для которых существует инвариант Лапласа Y_{i+1}. $\square$

Пример 1. В качестве иллюстрации рассмотрим систему (2). Прямое вычисление дает нам

$$Y_1 = H_1 = \frac{c}{(u^1u^2+c)^2} \begin{pmatrix} -u_y^1 u_x^2 & u_x^1 u_y^1 \\ u_x^2 u_y^2 & -u_x^1 u_y^2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что ядро Y_1 состоит из векторов, коллинеарных вектору $(u_x^1, u_x^2)^\top$. В силу следствия 1 это означает, что у системы (2) нет драйвера x-симметрий нулевого порядка, взаимно независимого с $\sigma_1 = (u_x^1, u_x^2)^\top$. Таким образом, драйверы (3) задают базисный набор для этой системы.

В работе [11] для системы (2) были построены драйверы симметрий

$$S_1 = \begin{pmatrix} u_x^1 \\ 0 \end{pmatrix} D_x + \begin{pmatrix} u_{xx}^1 + \dfrac{u_x^1 u_{xx}^2}{u_x^2} - \dfrac{2u^1\, u_x^1 u_x^2 + u^2\,(u_x^1)^2}{u^1\, u^2 + c} \\ \dfrac{u^2 u_x^2 u_x^1}{u^1\, u^2 + c} \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ u_x^2 \end{pmatrix} D_x + \begin{pmatrix} 2\dfrac{u^1\, u_x^1 u_x^2 + u^2\,(u_x^1)^2}{u^1\, u^2 + c} - 2\dfrac{u_x^1 u_{xx}^2}{u_x^2} - u_{xx}^1 \\ -u_{xx}^2 \end{pmatrix}.$$

По теореме 1 они должны выражаться через базисные драйверы симметрий σ_1 и σ_2, заданные формулой (3). Применяя алгоритм, использованный при доказательстве теоремы 1, получаем

$$S_1 = \sigma_2 \circ \omega, \quad S_2 = \sigma_1 \circ (D_x - \tilde{\omega}) - \sigma_2 \circ \omega,$$

где $\omega = u_x^1 u_x^2/(u^1u^2 + c)$, $\tilde{\omega} = u_{xx}^2/u_x^2 - (u^2 u_x^1)/(u^1u^2+c)$. Прямая проверка показывает, что ω и $\tilde{\omega}$ принадлежат ядру D_y.

Пример 2. Обозначим через $\mathbf{e^u}$ вектор $(\exp(u^1), \exp(u^2), \ldots, \exp(u^n))^\top$. Тогда систему (6) можно записать как $u_{xy} = A\mathbf{e^u}$, где A – постоянная матрица размера $n \times n$. Для дальнейших рассуждений удобно также обозначить через $\{z\}$ диагональную матрицу с диагональю из координат вектора z:

$$\{z\} := \operatorname{diag}\{z^1, z^2, \ldots, z^n\}.$$

С учетом этого обозначения имеем $Y_1 = H_1 = A\{\mathbf{e^u}\}$. Поэтому в ситуации общего положения (при $\det(A) \neq 0$) система (6) не имеет драйверов x-симметрий нулевого порядка.

Из (8) легко найти $a_1 = -A\{u_y\}A^{-1}$ и затем по формуле (9) вычислить $H_2 = H_1 - A\{A\mathbf{e}^{\mathbf{u}}\}A^{-1}$ и

$$Y_2 = H_2H_1 = A\{\mathbf{e}^{\mathbf{u}}\}A\{\mathbf{e}^{\mathbf{u}}\} - A\{A\mathbf{e}^{\mathbf{u}}\}\{\mathbf{e}^{\mathbf{u}}\} = AC\{\mathbf{e}^{\mathbf{u}}\},$$

где $C = \{\mathbf{e}^{\mathbf{u}}\}A - \{A\mathbf{e}^{\mathbf{u}}\}$. Обозначим через $\tilde{C}$ матрицу размера $(n-1)\times(n-1)$, полученную удалением последней строки и последнего столбца из матрицы C. Нетрудно видеть, что

$$\det(\tilde{C}) = (-1)^{n-1}\exp((n-1)u^n)\prod_{i=1}^{n-1} A_n^i + \dots,$$

где многоточием обозначены слагаемые, не содержащие $\exp((n-1)u^n)$ (содержащие $\exp(u^n)$ в степенях меньших чем $n-1$). Поэтому матрица $\tilde{C}$ невырождена, и Y_2 имеет ранг $(n-1)$, если $\det(A)\prod_{i=1}^{n-1} A_n^i \neq 0$. Таким образом, в ситуации общего положения система (6) имеет единственный (с точностью до умножения справа на скалярную функцию из $\ker D_y$) драйвер x-симметрий первого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Уравнения Клейна-Гордона с нетривиальной группой* // Докл. АН СССР. Т. 247. № 5. 1979. С. 1103–1107.
2. Лезнов А.Н., Шабат А.Б. *Условия обрыва рядов теории возмущений* // Интегрируемые системы. Башк. филиал АН СССР. Уфа. 1982. С. 34–44.
3. Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем* // ТМФ. Т. 51. № 1. 1982. С. 10–21.
4. Демской Д.К. *Об одном классе систем лиувиллевского типа* // ТМФ. Т. 141. № 2. 2004. С. 208–227.
5. Старцев С.Я. *Метод каскадного интегрирования Лапласа для линейных гиперболических систем уравнений* // Матем. заметки. Т. 83. № 1. 2008. С. 107–118.
6. Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных.* М.: ИЛ. 1957.
7. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* // УМН. Т. 56. № 1. 2001. С. 63–106.
8. Гурьева А.М., Жибер А.В. *Инварианты Лапласа двумеризованных открытых цепочек Тоды* // ТМФ. Т. 138. № 3. 2004. С. 401–421.
9. A.M. Guryeva, A.V. Zhiber *Laplace invariants of Toda lattices with the exceptional Cartan matrices* // arXiv:nlin/0512001 [nlin.SI]. 2005. 30 p.
10. Жибер А.В., Старцев С.Я. *Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений* // Матем. заметки. Т. 74. № 6. 2003. С. 848–857.
11. Соколов В.В., Старцев С.Я. *Симметрии нелинейных гиперболических систем типа цепочек Тоды* // ТМФ. Т. 155. № 2. 2008. С. 344–355.

Сергей Яковлевич Старцев,
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `startsev@anrb.ru`