

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, ПОЛНОСТЬЮ ПОКРЫТОЙ КРОШЕНЫМ ЛЬДОМ

Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ, Д.О. ЦВЕТКОВ

Аннотация. Изучается задача о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой крошеным льдом. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебания свободной поверхности друг с другом не взаимодействуют или их взаимодействие пренебрежимо мало, причем частицы все время находятся на поверхности в процессе малых движений данной системы. Отметим, что в зарубежных публикациях такие жидкости часто называют жидкостями с инерционными свободными поверхностями. Задача исследуется на основе подхода, связанного с применением так называемой теории операторных матриц. С этой целью вводятся гильбертовы пространства и некоторые их подпространства, а также вспомогательные краевые задачи. Исходная краевая задача сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. После детального изучения свойств операторных коэффициентов, соответствующих результирующей системе уравнений, доказана теорема о сильной разрешимости задачи Коши, полученная на конечном временном интервале. На этой основе найдены достаточные условия существования сильного (по временной переменной) решения начально-краевой задачи, описывающей эволюцию гидросистемы.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, крошенный лед, начально-краевая задача, метод ортогонального проектирования, задача Коши в гильбертовом пространстве, сильное решение.

Mathematics Subject Classification: 35D35

1. ВВЕДЕНИЕ

Важной составляющей общей задачи динамики тела с полостью, содержащей жидкость, является задача о движении жидкости в неподвижном сосуде. Упомянем коротко о тех задачах, которые имеют непосредственное отношение к тематике данной работы.

Задачи о колебаниях стратифицированной жидкости, заполняющей ограниченную область пространства, находят приложения в теории сейш, в теории колебаний нефти в танкерах, при изучении колебаний криогенных жидкостей в закрытых резервуарах. Не приводя подробной библиографии, упомянем лишь монографии [1]–[6] и работы [7], [8], где изучаются те или иные аспекты теории колебаний такой системы. Известно, что наличие вертикальной стратификации жидкости по плотности порождает в таких гидросистемах весьма интересные физические явления, связанные с действием сил плавучести. Так, в океанах эти силы порождают внутренние инерционные волны большой амплитуды,

N.D. KOPACHEVSKIY, D.O. TSVETKOV, SMALL MOTIONS OF IDEAL STRATIFIED LIQUID WITH A FREE SURFACE TOTALLY COVERED BY A CRUMBLED ICE.

© Копачевский Н.Д., Цветков Д.О. 2018.

Поступила 29 июня 2017 г.

которые могут привести к катастрофам. В танкерах, заполненных нефтью, могут возникнуть колебания, приводящие к неустойчивым движениям корабля.

Ледяной покров является важным компонентом гидрологического режима замерзающих морей и океанов. Наличие плавающего льда на поверхности морей и океанов существенным образом влияет на характер их поведения. Рассмотрение таких проблем является одним из важных разделов океанологии, практическая эффективность которого несомненна. Близкая к задаче динамики жидкости в областях, покрытых крошеным льдом, которая называется задачей о флотации, изучалась в работах [9], [10], а также в диссертации [11].

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть идеальная стратифицированная жидкость, плотность ρ_0 которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Ox_3 : $\rho_0 = \rho_0(x_3)$, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω , ограниченную твердой стенкой S и свободной поверхностью Γ , полностью покрытой крошеным льдом. Предположим, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выбрано на свободной равновесной поверхности Γ , которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где \vec{e}_3 — орт оси Ox_3 . Предполагаем далее, что твердая стенка $S \subset \partial\Omega$ является липшицевой поверхностью, причем $\partial S = \partial\Gamma$ — липшицева кривая.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$0 < N_{min}^2 \leq N^2(x_3) \leq N_{max}^2 = N_0^2 < \infty, \quad (1)$$

$$N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0.$$

Функцию $N(x_3)$ называют частотой Вайсяля-Брента, или частотой плавучести. Физически $N(x_3)$ равна частоте колебаний, с которой частица жидкости, находящаяся на уровне $x_3 = \text{const}$, будет колебаться в стратифицированной жидкости, если сместится с этого уровня.

Рассмотрим малые (линейные) движения стратифицированной жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через \vec{u} поле скорости жидкости в Ω . Тогда движения гидросистемы будет описываться следующим уравнением (см. [12], с.73):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\hat{\rho}^{-1} \cdot \nabla P + \vec{F} \quad (\text{в } \Omega), \quad (2)$$

где $\hat{\rho}(t, x)$, $P(t, x)$ и $\vec{F}(t, x)$ — это полные поля плотности, давления в жидкости и поле массовых внешних сил, соответственно.

Кроме того, требуется добавить уравнение неразрывности или закон сохранения вещества. Он выражает тот очевидный факт, что масса жидкости в объеме, охватывающем все время одни и те же частицы, сохраняется (см. [13], с. 89):

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \text{div}(\hat{\rho}\vec{u}) = 0 \quad (\text{в } \Omega). \quad (3)$$

Определим статическое давление в жидкости. Если система находится в равновесии и на нее действует лишь сила тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, то $\vec{F} = \vec{g}$ и из (2) при $\vec{u} = \vec{0}$ получим, что

$$\nabla P_0 = -\rho_0(x_3)g\vec{e}_3.$$

Поэтому статическое давление $P_0(x)$ в жидкости равно

$$P_0(x) = P_0(x_3) = p_a - g \int_0^{x_3} \rho_0(\zeta) d\zeta, \quad (4)$$

где p_a — внешнее постоянное давление.

Рассматривая задачу о малых движениях системы, представим поля $P(t, x)$, $\widehat{\rho}(t, x)$ и $\vec{F}(t, x)$ в виде

$$\begin{aligned} P(t, x) &= P_0(x) + p(t, x), & \widehat{\rho}(t, x) &= \rho_0(x_3) + \rho(t, x), \\ \vec{F}(t, x) &= \vec{f}(t, x) - g\vec{e}_3, \end{aligned} \quad (5)$$

где $p(t, x)$ — отклонение поля давления от равновесного поля $P_0(x_3)$, $\rho(t, x)$ — отклонение поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$, а $\vec{f}(t, x)$ — малое поле внешних массовых сил.

Подставим представления (5) в уравнения (2), (3):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho_0(x_3) + \rho(t, x)} \nabla(P_0(x_3) + p(t, x)) + \vec{f}(t, x) - g\vec{e}_3 \quad (\text{в } \Omega), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0(x_3) + \rho(t, x)) + \operatorname{div} \left((\rho_0(x_3) + \rho(t, x)) \vec{u} \right) = \\ = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} + \nabla \rho \cdot \vec{u} + (\rho_0 + \rho) \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega). \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая, что плотность с течением времени не меняется, т.е.

$$\frac{d\widehat{\rho}}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} + \nabla \rho \cdot \vec{u} = 0,$$

после линеаризации (6), (7) получим:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3) + \vec{f} \quad (\text{в } \Omega), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega). \quad (9)$$

Так как рассматриваются движения жидкости в жестком сосуде, то на его твердой стенке S для идеальной жидкости должно выполняться условие непротекания:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} =: u_n = 0 \quad (\text{на } S), \quad (10)$$

где \vec{n} — единичный вектор внешней нормали к области Ω .

Перейдем к определению кинематического условия на равновесной поверхности Γ . Будем искать отклонение движущейся поверхности $\Gamma(t)$ в виде:

$$\Gamma(t) : \quad x_3 = \zeta = \zeta(t, \hat{x}), \quad \hat{x} := (x_1, x_2) \in \Gamma.$$

В этом случае линеаризованное кинематическое условие для частиц жидкости, находящихся на $\Gamma(t)$, имеет вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_n := \vec{u} \cdot \vec{n} \quad (\text{на } \Gamma). \quad (11)$$

Записывая второй закон Ньютона для частиц крошеного льда и линеаризуя его, получим динамическое условие (см. [9]):

$$p = g\rho_0(0)\zeta + \rho_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (\text{на } \Gamma), \quad (12)$$

где ρ_2 — поверхностная плотность крошеного льда. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества, которые в процессе колебания свободной поверхности друг с другом не взаимодействуют или их взаимодействие пренебрежимо мало, причем частицы все время находятся на поверхности в процессе малых движений данной гидродинамической системы.

Таким образом, линейная постановка задачи о колебаниях рассматриваемой гидросистемы выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= \rho_0^{-1}(x_3) \left(-\nabla p - g\rho \vec{e}_3 \right) + \vec{f}(t, x) \quad (\text{в } \Omega), \\
\operatorname{div} \vec{u} &= 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \\
\vec{u} \cdot \vec{n} &=: u_n = 0 \quad (\text{на } S), \quad u_n = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta \, d\Gamma = 0, \\
p &= g\rho_0(0)\zeta + \rho_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (\text{на } \Gamma), \\
\vec{u}(0, x) &= \vec{u}^0(x), \quad \rho(0, x) = \rho^0(x) \quad (x \in \Omega), \quad \zeta(0, \hat{x}) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma).
\end{aligned} \tag{13}$$

Последние три условия – это начальные условия, которые добавлены к задаче для полноты ее формулировки, $\int_{\Gamma} \zeta \, d\Gamma = 0$ есть условие сохранения объема.

Отметим, что для классического решения задачи (13) имеет место закон баланса полной энергии:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left[\left(\int_{\Omega} \rho_0(x_3) |\vec{u}|^2 \, d\Omega + \rho_2 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|^2 \, d\Gamma \right) + \right. \\
\left. + \left(g^2 \int_{\Omega} [\rho_0(x_3) N^2(x_3)]^{-1} |\rho|^2 \, d\Omega + g\rho_0(0) \int_{\Gamma} |\zeta|^2 \, d\Gamma \right) \right] = \int_{\Omega} \rho_0(x_3) \vec{f} \cdot \vec{u} \, d\Omega.
\end{aligned} \tag{14}$$

Левая часть представляет собой сумму производной по t полной кинетической энергии системы и ее потенциальной энергии. Полная кинетическая энергия (первая скобка слева) равна сумме кинетической энергии жидкости в области Ω и кинетической энергии крошеного льда. Полная потенциальная энергия (вторая скобка) равна сумме потенциальной энергии, обусловленной наличием сил плавучести и потенциальной энергией, обусловленной колебаниями свободной поверхности. Правая часть есть мощность внешних сил.

3. ИСКЛЮЧЕНИЕ ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОЛЯ МАЛЫХ СМЕЩЕНИЙ ЖИДКОСТИ

В начально-краевой задаче (13) можно исключить одну искомую функцию – поле плотности $\rho(t, x)$, если ввести взамен поля скорости $\vec{u}(t, x)$ поле малых смещений частиц жидкости $\vec{v}(t, x)$, связанных с $\vec{u}(t, x)$ соотношениями

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{u}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega). \tag{15}$$

Тогда вместо (8) и (9) придем к связи

$$\begin{aligned}
\rho(t, x) &= -\nabla \rho_0 \cdot \vec{v}(t, x) + f_0(x) = -\rho'_0(x_3) v_3(t, x) + f_0(x), \\
f_0(x) &:= \rho(0, x) + \rho'_0(x_3) v_3(0, x), \quad v_3 := \vec{v} \cdot \vec{e}_3,
\end{aligned} \tag{16}$$

и к уравнениям для $\vec{v}(t, x)$ и $p(t, x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} &= -\rho_0^{-1}(x_3) \nabla p - N^2(x_3) v_3 \vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \\
\psi_0(x) &= \vec{f}(t, x) - g f_0(x) \vec{e}_3 / \rho_0(x_3).
\end{aligned} \tag{17}$$

С учетом сказанного перепишем исходную задачу (13) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} &= -\rho_0^{-1}(x_3) \nabla p - N^2(x_3) v_3 \vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \\ \vec{v} \cdot \vec{n} &=: v_n = 0 \quad (\text{на } S), \quad p = g\rho_0(0)v_3 + \rho_2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \quad (\text{на } \Gamma), \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(0, x) &= \vec{u}(0, x) = \vec{u}^0(x), \quad \vec{v}(0, x) = \vec{v}^0(x), \\ v_3(0, \hat{x}) &= \zeta(0, \hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma). \end{aligned} \quad (18)$$

Начально-краевая задача (18) содержит лишь две искомые функции: векторное поле $\vec{v}(t, x)$ и скалярное поле давлений $p(t, x)$. По решению $\vec{v}(t, x)$ задачи (18) решения $\vec{u}(t, x)$ и $\rho(t, x)$ задачи (13) можно найти по формулам (15) и (16).

4. ПРОЕКТИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НА ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Начально-краевую задачу (18) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования первого уравнения (18) на ортогональные подпространства (см. [15]). Свяжем с функцией ρ_0 гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ вектор функций со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \rho_0(x_3) \vec{u}(x) \overline{\vec{v}(x)} d\Omega. \quad (19)$$

Как следует из (1), для $\rho = \rho_0(x_3)$ справедливы неравенства

$$0 < m \leq \rho_0 \leq M < \infty,$$

обеспечивающие эквивалентность норм, определенных по закону (19) и обычным скалярным произведением в $\vec{L}_2(\Omega)$.

Обозначим через $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ подпространство $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, которое получается замыканием в норме $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ множества гладких функций

$$\{ \vec{v} \in \vec{C}^1(\Omega) : \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega), v_n = 0 \text{ (на } \partial\Omega) \}.$$

В качестве других подпространств возьмем подпространства

$$\begin{aligned} \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) &= \{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{v} = \rho_0^{-1} \nabla p, v_n = 0 \text{ (на } S), \\ &\quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega), \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0 \}, \end{aligned}$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) = \{ \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{w} = \rho_0^{-1} \nabla \varphi, \varphi = 0 \text{ (на } \Gamma) \}.$$

Отметим, что здесь $v_n = \rho_0^{-1} \partial p / \partial n$ — функционал из пространства $\tilde{H}_S^{-1/2} = (H_S^{1/2})^*$, состоящий из функций, продолжимых нулем в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ на всю $\partial\Omega$, при этом $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L_2(\partial\Omega) \subset H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (см. [14], гл. 3).

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega, \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0), \quad (20)$$

Доказательство леммы повторяет доказательство аналогичного утверждения для пространства $\vec{L}_2(\Omega)$, когда в (19) $\rho_0(x_3) = \text{const}$ (см. [15], с. 106).

Будем считать $\vec{u}(t, x)$ и $\rho_0^{-1}\nabla p(t, x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, тогда в силу уравнений и граничных условий (18), ортогонального разложения (20) имеем

$$\begin{aligned}\vec{v}(t, x) &\in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0), \\ \rho_0^{-1}\nabla p(t, x) &\in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) =: \vec{G}(\Omega, \rho_0).\end{aligned}$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\begin{aligned}\vec{v}(t, x) &= \vec{w}(t, x) + \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t, x), \quad \vec{w}(t, x) \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad \rho_0^{-1}\nabla\Phi(t, x) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \\ \rho_0^{-1}\nabla p(t, x) &= \rho_0^{-1}\nabla p_1(t, x) + \rho_0^{-1}\nabla p_2(t, x), \\ \rho_0^{-1}\nabla p_1(x, t) &\in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \quad \rho_0^{-1}\nabla p_2(t, x) \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0).\end{aligned}\tag{21}$$

Обозначим через P_0 , $P_{h,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$, $\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0)$ соответственно. Тогда, подставляя (21) в первое уравнение (18) и применяя ортопроекторы, получаем

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0 \left[N^2(x_3) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_0 \psi_0,\tag{22}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_0^{-1} \nabla \Phi) + \rho_0^{-1} \nabla p_1 + P_{h,S} \left[N^2(x_3) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_{h,S} \psi_0,\tag{23}$$

$$\rho_0^{-1} \nabla p_2 + P_{0,\Gamma} \left[N^2(x_3) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_{0,\Gamma} \psi_0.\tag{24}$$

Из последнего соотношения (24) следует, что составляющая поля давлений, обусловленная слагаемым $\rho_0^{-1}\nabla p_2$, определяется лишь полем вертикального смещения v_3 и начальными условиями, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением первых двух соотношений, а также граничного условия с соответствующей заменой $p \rightarrow p_1$, так как $p = p_1 + p_2$, $p_2 = 0$ (на Γ).

Для перехода от (22), (23) к системе уравнений с двумя искомыми функциями введем новые элементы:

$$P_{h,S} \left[N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \right] := \rho_0^{-1} \nabla \Psi, \quad P_{h,S} \left[N^2(x_3) \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right] := \rho_0^{-1} \nabla \eta.\tag{25}$$

Тогда (23) дает интеграл Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + p_1 + \Psi + \eta - F = c(t) \quad (\text{в } \Omega),\tag{26}$$

где $c(t)$ – произвольная функция времени, $P_{h,S} \psi_0 = \rho_0^{-1} \nabla F$.

Рассмотрим (26) на Γ и воспользуемся, в силу (22) – (24), равенством

$$\begin{aligned}p_1 &= g\rho_0(0)v_3 + \rho_2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = g\rho_0(0) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) + \rho_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) = \\ &= g\rho_0(0) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \rho_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) = g \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \rho_2 \rho_0^{-1}(0) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) \quad (\text{на } \Gamma);\end{aligned}$$

получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \rho_2 \rho_0^{-1}(0) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma).\tag{27}$$

Это соотношение вместе с (22) дает два уравнения для определения двух искоемых функций $\vec{w}(t, x)$ и $\Phi(t, x)$, при этом учитываются связи (25), а также ограничения, следующие

из (22) – (24). Таким образом, начально-краевую задачу (18) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0 \left[N^2(x_3) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_0 \psi_0 \quad (\text{в } \Omega), \\
& \operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \\
& \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \rho_2 \rho_0^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma), \\
& \nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \\
& \int_{\Gamma} \Phi \, d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \, d\Gamma = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial t} w(0, x) = P_0 \vec{u}^0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} (0, \hat{x}) \right)_{\Gamma} = [(P_{h,S} \vec{u}^0(x)) \cdot \vec{n}]_{\Gamma}, \\
& \vec{w}(0, x) = P_0 \vec{v}^0, \quad \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} (0, \hat{x}) \right)_{\Gamma} = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma).
\end{aligned} \tag{28}$$

Отметим, что отклонение $v_3|_{\Gamma} = \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right)_{\Gamma}$ частиц подвижной поверхности должно удовлетворять условию сохранения объема жидкости при колебаниях:

$$\int_{\Gamma} v_3 \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \, d\Gamma = 0 \implies \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \, d\Gamma = 0, \tag{29}$$

так как $w_3|_{\Gamma} = 0$, $\rho_0^{-1}|_{\Gamma} = \text{const}$.

5. ПЕРЕХОД К СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Условие (29) является необходимым условием разрешимости следующей задачи.

Вспомогательная задача I (задача Неймана).

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \\
& \rho_0^{-1}(0) \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \psi \, d\Gamma = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Введем в пространстве $H_0 = L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_{\Gamma}\}$ его оснащение в виде $H_+ \subset H_0 \subset H_-$, где $H_+ = H^{1/2}(\Gamma) \cap H_0 =: H_{\Gamma}^{1/2}$, $H_- = (H_+)^* =: \tilde{H}_{\Gamma}^{-1/2}$. Здесь через $\tilde{H}_{\Gamma}^{-1/2}$ обозначено пространство, сопряженное с $H_{\Gamma}^{1/2}$ с центральным пространством $L_{2,\Gamma}$. В частности, $\tilde{H}_{\Gamma}^{-1/2}$ состоит из тех элементов из $H^{-1/2}(\Gamma)$, которые продолжимы нулем в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (см. [14], гл. 3).

Отметим, что с учетом (14), скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$ имеет вид:

$$(\eta, \zeta)_0 := \rho_0(0) \int_{\Gamma} \eta(\hat{x}) \overline{\zeta(\hat{x})} \, d\Gamma. \tag{31}$$

Лемма 2. При любом $\psi \in H_- = \tilde{H}_{\Gamma}^{-1/2}$ задача (30) в области Ω с липшицевой (кусочно-гладкой) границей $\partial\Omega$ имеет единственное обобщенное решение $\Phi \in H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)$, причем

$$\|\Phi\|_{H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)} \leq c_1 \|\psi\|_{\tilde{H}_{\Gamma}^{-1/2}}. \tag{32}$$

Здесь $H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)$ – подпространство квазигармонических функций, удовлетворяющих условию Неймана на S , пространства $H_\Gamma^1(\Omega, \rho_0)$ с квадратом нормы

$$\|\Phi\|_{H_\Gamma^1(\Omega, \rho_0)}^2 := \int_\Omega \rho_0^{-1} |\nabla \Phi|^2 d\Omega, \quad \int_\Gamma \Phi d\Gamma = 0.$$

Для обобщенного решения $\Phi(x)$ задачи (30) имеет место тождество

$$(\Phi, \Psi)_{H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)} = (\psi, \Psi|_\Gamma)_{H_0}, \quad \forall \Psi \in H_\Gamma^1(\Omega, \rho_0). \quad (33)$$

Доказательство этой леммы приведено, например, в [15], стр. 46.

Вспомогательная задача II (задача Неймана-Зарембы).

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi) &= 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \\ \rho_0^{-1}(0) \Phi &= \varphi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \varphi d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Лемма 3. При любом $\varphi \in H_+ = H_\Gamma^{1/2}$ задача (34) имеет единственное обобщенное решение $\Phi \in H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)$, причем

$$\|\Phi\|_{H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)} \leq c_2 \|\varphi\|_{H_\Gamma^{1/2}}. \quad (35)$$

Доказательство этой леммы приведено, например, в [15], стр. 45.

Согласно теореме Гальярдо (см. [16]) след функции $\Phi(x) \in H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)$ на границе $\partial\Omega$ принадлежит $H^{1/2}(\partial\Omega)$, поэтому в $H_\Gamma^{1/2} = H_+$ норму можно выбрать в одной из эквивалентных форм таким образом, чтобы

$$\|\Phi\|_{H_{h,S}^1(\Omega)} = \|\varphi\|_{H_\Gamma^{1/2}}, \quad \forall \varphi \in H_\Gamma^{1/2}, \quad (36)$$

где $\Phi(x)$ – решение задачи (34).

Будем считать, что $\psi = \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_\Gamma$ есть заданная функция из пространства $\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Тогда, рассматривая задачу Неймана с заданной ψ , получим по лемме 2, что

$$\Phi(x) = T\psi \in H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0),$$

где $T : \tilde{H}_\Gamma^{-1/2} \rightarrow H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)$ – ограниченный линейный оператор, норма которого не превышает константу $c_1 > 0$ из (32).

Введем теперь оператор следа γ_Γ : для любой $\Phi(x) \in H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)$ по определению

$$\gamma_\Gamma \Phi := \Phi|_\Gamma.$$

Отметим, что оператор γ_Γ ограниченно действует из $H^1(\Omega, \rho_0)$ (а потому и из подпространства $H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)$) в $H_+ = H_\Gamma^{1/2}$ (см., например, [16]). Отсюда получаем, что

$$\gamma_\Gamma \Phi = \Phi|_\Gamma = \gamma_\Gamma T\psi = \gamma_\Gamma T \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_\Gamma =: C \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_\Gamma, \quad (37)$$

где оператор $C = \gamma_\Gamma T : \tilde{H}_\Gamma^{-1/2} = H_- \rightarrow H_\Gamma^{1/2} = H_+$ является линейным ограниченным оператором.

Лемма 4. Сужение оператора C на $H_0 \subset H_-$ является линейным компактным самосопряженным положительным оператором, действующим в пространстве H_0 .

Доказательство. Если $\psi \in H_0$, то $C\psi = \gamma_\Gamma T\psi \in H_+$. Так как пространство $H_+ = H_\Gamma^{1/2}$ компактно вложено в пространство H_0 , а C ограничено действует из H_0 в H_+ , то оператор $C : H_0 \rightarrow H_0$ компактен.

Для доказательства свойства симметрии (самосопряженности) и положительности оператора C будем считать, что в тождестве (33) $\Psi \in H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0) \subset H_\Gamma^1(\Omega)$, причем $\Psi(x)$ также является решением вспомогательной задачи (30) при заданной функции $v \in H_0$; тогда

$$\begin{aligned} \Phi &= T\psi, \quad \psi = \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_\Gamma, \quad \gamma_\Gamma \Phi = C\psi, \\ \Psi &= Tv, \quad v = \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right)_\Gamma, \quad \gamma_\Gamma \Psi = \Psi|_\Gamma = Cv, \end{aligned} \quad (38)$$

Из этих формул и из (33) получаем

$$(\psi, Cv)_{H_0} = \int_\Omega \rho_0^{-1} \nabla \Phi \cdot \overline{\nabla \Psi} \, d\Omega = (C\psi, v)_{H_0}, \quad \forall w, v \in H_0, \quad (39)$$

откуда следует, что $C = C^*$. Полагая здесь $v = \psi$, $\Psi = \Phi$, имеем

$$(C\psi, \psi)_{H_0} = \int_\Omega \rho_0^{-1} |\nabla \Phi|^2 \, d\Omega = \|\Phi\|_{H_\Gamma^1(\Omega, \rho_0)}^2 \geq 0. \quad (40)$$

Если $(C\psi, \psi)_{H_0} = 0$, то $\Phi \equiv \Phi_0 = \text{const}$. Тогда из условия нормировки функции Φ

$$\int_\Gamma \Phi_0 \, d\Gamma = 0$$

получаем, что $\Phi \equiv 0$, а потому $\psi = \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_\Gamma = 0$.

Таким образом, оператор C положителен в H_0 . \square

Замечание. Следствием доказанной леммы является такое утверждение: оператор $C : H_0 \rightarrow H_0$ имеет обратный оператор C^{-1} , который является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, действующим в H_0 и заданным на области определения $\mathcal{D}(C^{-1}) = \mathcal{R}(C)$, плотной в H_0 .

Замечание. Из (38), (40) следует, что

$$(C^{-1}\varphi, \varphi)_{H_0} = \|\Phi\|_{H_{h,S}^1(\Omega, \rho_0)}^2, \quad \gamma_\Gamma \Phi = \varphi \in \mathcal{D}(C^{-1}), \quad (41)$$

где Φ – решение задачи (34). Отсюда получаем, что при выборе нормы в $H_\Gamma^{1/2} = H_+$ в виде (36) оператор $C^{-1/2}$ изометрически действует из $\mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_+$ в $H_0 = H$:

$$\|C^{-1/2}\varphi\|_{H_0}^2 = \|\varphi\|_{H_\Gamma^{1/2}}^2, \quad \forall \varphi \in H_+. \quad (42)$$

Таким образом, оператор $C^{-1/2}$ переводит $\mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_+$ в H_0 , а оператор $C^{1/2}$ – соответственно H_0 в $\mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_+$ (изометрическим образом). Как следует из общей теории оснащенных гильбертовых пространств, расширение оператора $C^{-1/2}$ (которое будем обозначать так же) с $\mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_+$ на H_0 является изометрическим оператором, переводящим все H_0 на все $H_- = \widetilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Соответственно оператор $C^{1/2}$ (после расширения на H_-) переводит изометрически все H_- на все H_0 .

Согласно выше приведенным построениям (см. (37)), перепишем систему уравнений (22) и (27) вместе, проектируя дополнительно (27) на H_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0 \left[N^2(x_3) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) \vec{e}_3 \right] + P_0 \left[N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \right] &= P_0 \psi_0, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[C + \rho_2 I \right] \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_\Gamma + g \rho_0 \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_\Gamma + P_{H_0} (\Psi + \eta) &= P_{H_0} F. \end{aligned} \quad (43)$$

Осуществим в (43), учитывая (30), замену:

$$\psi = \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_\Gamma = C^{-1/2} y, \quad y \in H_0. \quad (44)$$

Будем считать, что $P_{H_0} F \in \mathcal{D}(C^{-1/2})$, и применим к второму уравнению (43) оператор $C^{-1/2}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0 \left[N^2(x_3) ((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3) \vec{e}_3 \right] + P_0 \left[N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \right] &= P_0 \psi_0, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[I + \rho_2 C^{-1} \right] y + g \rho_0 C^{-1} y + C^{-1/2} P_{H_0} (\Psi + \eta) &= C^{-1/2} P_{H_0} F. \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь через $U : \tilde{H}_\Gamma^{-1/2} \rightarrow \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ обозначен оператор, который посредством решения задачи (30) ставит в соответствие элементу $\psi \in \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ функцию $\rho_0^{-1} \nabla \Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} B_{11} \vec{w} &:= P_0 \left[N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \right], \quad B_{12} y := P_0 \left[N^2(x_3) ((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3) \vec{e}_3 \right], \\ B_{21} \vec{w} &:= C^{-1/2} P_{H_0} \Psi, \quad \rho_0^{-1} \nabla \Psi = P_{h,S} \left[N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \right], \\ B_{22} y &:= C^{-1/2} P_{H_0} \eta, \quad \rho_0^{-1} \nabla \eta = P_{h,S} \left[N^2(x_3) ((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3) \vec{e}_3 \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

В дальнейшем все искомые функции и заданные функции переменной t и пространственных переменных будем считать функциями одной переменной t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах, что уже и было учтено в проведенных выше построениях. В связи с этим далее все производные $\partial/\partial t$ будем заменять на d/dt .

Начально-краевая задача (18) распадается на тривиальное соотношение (24) и задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка (неполного, то есть не содержащего слагаемого с первой производной) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0$:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{A} \mathcal{X} + (C + B) \mathcal{X} = \mathcal{F}, \quad \mathcal{X}(0) = \mathcal{X}^0, \quad \mathcal{X}'(0) = \mathcal{X}^1, \quad (47)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I + \rho_2 C^{-1} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \rho_0 C^{-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} P_0 \psi_0 \\ C^{-1/2} P_{H_0} F \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} \vec{w} \\ y \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Лемма 5. *Оператор-матрица B из (48) обладает свойствами $\mathcal{O} \leq B \leq N_0^2 \mathcal{I}$, где N_0^2 – константа из (1), \mathcal{O} и \mathcal{I} – нулевой и единичный операторы в $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}\mathcal{X}, \mathcal{X})_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{w} \\ y \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} = \\ &= (B_{11}\vec{w}, \vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)} + (B_{12}y, \vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)} + (B_{21}\vec{w}, y)_{H_0} + (B_{22}y, y)_{H_0}. \end{aligned}$$

С учетом определений (46), (19), (31), а также формулы Грина для оператора Лапласа (см., например, [15] с. 102), имеем:

$$(B_{11}\vec{w}, \vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)} = \left(P_0 \left[N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \right], \vec{w} \right)_{\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)} = \int_{\Omega} N^2(x_3) \cdot \rho_0(x_3) |w_3|^2 d\Omega,$$

$$\begin{aligned} (B_{12}y, \vec{w})_{\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)} &= \left(P_0 \left[N^2(x_3) ((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3) \vec{e}_3 \right], \vec{w} \right)_{\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)} = \\ &= \int_{\Omega} N^2(x_3) \rho_0(x_3) (\rho_0^{-1} \nabla \Phi \cdot \vec{e}_3) w_3 d\Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B_{21}\vec{w}, y)_{H_0} &= (C^{-1/2} P_{H_0} \Psi, y)_{H_0} = (P_{H_0} \Psi, C^{-1/2} y)_{H_0} = \\ &= \int_{\Gamma} \rho_0(0) P_{H_0} \Psi \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_{\Gamma} d\Gamma = \\ &= \int_{\Omega} \rho_0(x_3) \cdot \rho_0^{-1} \nabla \Psi \cdot \rho_0^{-1} \nabla \Phi d\Omega = \int_{\Omega} \rho_0(x_3) \cdot N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \cdot \rho_0^{-1} \nabla \Phi d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} N^2(x_3) \rho_0(x_3) (\rho_0^{-1} \nabla \Phi \cdot \vec{e}_3) w_3 d\Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B_{22}y, y)_{H_0} &= (C^{-1/2} P_{H_0} \eta, y)_{H_0} = (P_{H_0} \eta, C^{-1/2} y)_{H_0} = \\ &= \int_{\Gamma} \rho_0(0) P_{H_0} \eta \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_{\Gamma} d\Gamma = \int_{\Omega} \rho_0(x_3) \cdot \rho_0^{-1} \nabla \eta \cdot \rho_0^{-1} \nabla \Phi d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \rho_0(x_3) \cdot N^2(x_3) ((UC^{-1/2}y)\vec{e}_3) \vec{e}_3 \cdot \rho_0^{-1} \nabla \Phi d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} N^2(x_3) \rho_0(x_3) |(\rho_0^{-1} \nabla \Phi \cdot \vec{e}_3)|^2 d\Omega, \end{aligned}$$

Отсюда имеем, с одной стороны, используя (1) и (21):

$$(\mathcal{B}\mathcal{X}, \mathcal{X})_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} N^2(x_3) \rho_0(x_3) |w_3 + (\rho_0^{-1} \nabla \Phi \cdot \vec{e}_3)|^2 d\Omega \geq N_{\min}^2 \int_{\Omega} \rho_0(x_3) |v_3|^2 d\Omega \geq 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}\mathcal{X}, \mathcal{X})_{\mathcal{H}} &\leq N_0^2 \cdot \int_{\Omega} \rho_0(x_3) |w_3 + (\rho_0^{-1} \nabla \Phi \cdot \vec{e}_3)|^2 d\Omega \leq N_0^2 \cdot \int_{\Omega} \rho_0(x_3) |\vec{v}|^2 d\Omega = \\ &= N_0^2 \left(\|\vec{w}\|_{\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)}^2 + \|\rho_0^{-1} \nabla \Phi\|_{\vec{G}_{h,s}(\Omega, \rho_0)}^2 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= N_0^2 \left(\|\vec{w}\|_{\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)}^2 + \int_{\Omega} \rho_0(x_3) \cdot \rho_0^{-1} \nabla \Phi \cdot \rho_0^{-1} \nabla \Phi \, d\Omega \right) = \\
 &= N_0^2 \left(\|\vec{w}\|_{\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)}^2 - \int_{\Omega} \Phi \cdot \operatorname{div}(\rho_0^{-1} \nabla \Phi) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\Phi)|_{\Gamma} \cdot (\rho_0^{-1} \nabla \Phi \cdot \vec{n}) \, dS \right) = \\
 &= N_0^2 \left(\|\vec{w}\|_{\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)}^2 + \int_{\Gamma} (\Phi)|_{\Gamma} \cdot \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_{\Gamma} \, d\Gamma \right) = \\
 &= N_0^2 \left(\|\vec{w}\|_{\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)}^2 + (C^{1/2}y, C^{-1/2}y)_{H_0} \right) = N_0^2 \left(\|\vec{w}\|_{\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)}^2 + \|y\|_{H_0}^2 \right) = N_0^2 \|\mathcal{X}\|_{\mathcal{H}}^2.
 \end{aligned}$$

□

Определение 1. Назовем функцию $\mathcal{X}(t)$, заданную на отрезке $[0, T]$, сильным решением задачи (47) со значениями в $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0$, если выполнены следующие условия:

- 1°. $\mathcal{X}(t) \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathcal{D}(C^{-1})$;
- 2°. $\mathcal{B}\mathcal{X}(t) \in C([0, T]; \mathcal{H})$, $\mathcal{C}\mathcal{X}(t) \in C([0, T]; \mathcal{H})$;
- 3°. $\mathcal{A}\mathcal{X}(t) \in C^2([0, T]; \mathcal{H})$;
- 4°. выполнено уравнение и начальные условия из (47).

Теорема 1. Пусть в задаче (47) выполнены условия

$$\mathcal{X}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_{\Gamma}^{1/2}, \quad \mathcal{X}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_{\Gamma}^{1/2}, \quad \mathcal{F} \in C([0, T]; \mathcal{H}). \quad (50)$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$.

Доказательство. Сделаем в задаче (47) замену $C^{-1/2}y = z$ и подействуем оператором $\operatorname{diag}(I; C^{1/2})$ к обеим частям уравнения (47), в результате приходим к следующей задаче Коши

$$\mathcal{A}_1 \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{X}_1 + \mathcal{C}_B \mathcal{X}_1 = \mathcal{F}_1, \quad \mathcal{X}_1(0) = \mathcal{X}_1^0, \quad \mathcal{X}_1'(0) = \mathcal{X}_1^1, \quad (51)$$

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C + \rho_2 I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} C^{1/2} \\ C^{1/2} B_{21} & g\rho_0 I + C^{1/2} B_{22} C^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (52)$$

$$\mathcal{X}_1 = \begin{pmatrix} \vec{w} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{w} \\ C^{-1/2}y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \mathcal{F}. \quad (53)$$

Из построений, приведенных выше (леммы 4, 5), следует, что

$$0 \ll \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad 0 \leq \mathcal{C}_B = \mathcal{C}_B^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Тогда для сильной разрешимости задачи Коши (51) достаточно потребовать, чтобы

$$\mathcal{X}_1^0 \in \mathcal{H}, \quad \mathcal{X}_1^1 \in \mathcal{H}, \quad \mathcal{F}_1 \in C([0, T]; \mathcal{H}).$$

Доказательство этого факта см. [17], стр. 44.

Таким образом, с учетом (53), получим условия (50) разрешимости задачи (47). Например,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X}_1^0 &= \begin{pmatrix} \vec{w}^0 \\ C^{-1/2}y^0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_0 \iff \\
 &\iff \mathcal{X}^0 = \begin{pmatrix} \vec{w}^0 \\ y^0 \end{pmatrix} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathcal{D}(C^{-1/2}) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H_{\Gamma}^{1/2}.
 \end{aligned}$$

□

Исходя из формулировок задач (13), (18) дадим (согласованные между собой) определения так называемых сильных по переменной t решений этих задач.

Определение 2. Сильным (по переменной t) решением задачи (13) на промежутке $[0, T]$ назовем набор функций $\vec{u}(t, x)$, $p(t, x)$, $\rho(t, x)$ и $\zeta(t, \hat{x})$, для которых выполнены следующие условия:

$$1^\circ. \vec{u}(t) \in C^1\left([0, T]; \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)\right), \quad \rho_0^{-1} \nabla p \in C\left([0, T]; \vec{G}(\Omega, \rho_0)\right),$$

$\rho(t) \in C^1([0, T]; \mathfrak{L}_2(\Omega))$, где $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ – гильбертово пространство скалярных функций со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := g^2 \int_{\Omega} [\rho_0(x_3) N^2(x_3)]^{-1} \varphi(x) \overline{\psi(x)} d\Omega$$

и при любом $t \in [0, T]$ справедливо первое уравнение (13);

$$2^\circ. u_n = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \in C([0, T]; H_0);$$

3°. выполнено граничное условие на Γ :

$$p = g\rho_0(0)\zeta + \rho_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \in C([0, T]; H_0),$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в H_0 .

4°. выполнены начальные условия (13).

Определение 3. Сильным (по переменной t) решением задачи (18) на промежутке $[0, T]$ назовем набор функций $\vec{v}(t, x)$, $p(t, x)$, для которых выполнены следующие условия:

$$1^\circ. \vec{v}(t) \in C^2\left([0, T]; \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)\right), \quad \rho_0^{-1} \nabla p \in C\left([0, T]; \vec{G}(\Omega, \rho_0)\right) \text{ и при любом } t \in [0, T]$$

справедливо первое уравнение (18);

2°. выполнено граничное условие на Γ :

$$p = g\rho_0(0)v_3 + \rho_2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \in C([0, T]; H_0), \quad v_3 = \vec{v} \cdot \vec{e}_3,$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в H_0 .

3° выполнены связи (15) и (16),

4°. выполнены начальные условия (18).

Определение 4. Сильным (по переменной t) решением задачи (28) на промежутке $[0, T]$ назовем такие функции $\vec{w}(t, x)$ из $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ и $\Phi(t, x)$ со значениями в $H_\Gamma^1(\Omega, \rho_0)$, для которых выполнены следующие условия:

$$1^\circ. \vec{w}(t) \in C^2\left([0, T]; \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)\right);$$

$$2^\circ. \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)_\Gamma \in C^2([0, T]; H_0), \quad \Phi_\Gamma \in C^2\left([0, T]; H_\Gamma^{1/2}\right), \text{ для } \forall t \in [0, T];$$

3°. выполнены соотношения

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0 \left[N^2(x_3) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_0 \psi_0 \quad (\text{в } \Omega), \quad (54)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \rho_2 \rho_0^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma), \quad (55)$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями соответственно со значениями в $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ и H_0 , причем $\rho_0^{-1} \nabla \Phi \in C^2\left([0, T]; \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)\right)$;

4°. выполнены начальные условия

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} (0, \hat{x}) \right)_\Gamma = [(P_{h,S} \vec{w}^0(x)) \cdot \vec{n}]_\Gamma \in H_0,$$

$$\begin{aligned} \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} (0, \hat{x}) \right)_{\Gamma} &= \zeta (0, \hat{x}) \in H_0; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\vec{w} (0, x)) &= P_0 \vec{u}^0 (x) \in \vec{J}_0 (\Omega, \rho_0); \\ \vec{w} (0, x) &= P_0 \vec{u}^0 (x) \in \vec{J}_0 (\Omega, \rho_0), \quad (w_3 (0, \hat{x}))_{\Gamma} = 0. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия

$$\begin{aligned} \vec{u}^0 \in \vec{J}_{0,S} (\Omega, \rho_0), \quad \rho^0 \in \mathfrak{L}_2 (\Omega), \quad \zeta^0 \in H_0 = L_2 (\Gamma) \ominus \{1_{\Gamma}\}, \\ \left[(P_{h,S} \vec{u}^0 (x)) \cdot \vec{n} \right]_{\Gamma} \in H_0, \quad f(t) \in C \left([0, T]; \vec{L}_2 (\Omega, \rho_0) \right). \end{aligned}$$

Тогда каждая из задач (13), (18) и (28) имеет единственное сильное по t решение.

Доказательство. Отметим, что при выборе норм в $H_{\Gamma}^{1/2}$ в виде (36), (42) и свойств изометрии оператора $C^{-1} : H_{\Gamma}^{1/2} = \mathcal{D}(C^{-1}) \rightarrow \tilde{H}_{\Gamma}^{-1/2}$ следующие утверждения очевидны

$$\begin{aligned} \left\{ \rho_0^{-1} \nabla \Phi \in C^k \left([0, T]; \vec{G}_{h,S} (\Omega, \rho_0) \right) \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \Phi|_{\Gamma} \in C^k \left([0, T]; H_{\Gamma}^{1/2} \right) \right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \in C^k \left([0, T]; \tilde{H}_{\Gamma}^{-1/2} \right) \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (56)$$

Доказательство теоремы проведем по этапам, переходя последовательно от задачи (47) к (28), затем от (28) к (18) и от (18) к (13).

От задачи (47) к (28). Пусть выполнены условия (50) для функций \mathcal{X}^0 , \mathcal{X}^1 и \mathcal{F} из теоремы о разрешимости задачи (47). Тогда

1. Для функции $\vec{w}(t, x)$ справедливы:

$$\begin{aligned} \left(\vec{w}^0 \in \vec{J}_0 (\Omega, \rho_0), \quad \vec{w}^1 \in \vec{J}_0 (\Omega, \rho_0) \right) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left((w_3 (0, \hat{x}))_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\vec{w} (0, x)) = P_0 \vec{u}^0 (x) \in \vec{J}_0 (\Omega, \rho_0) \right) \end{aligned}$$

Кроме того, $\vec{w}(t) \in C^2 \left([0, T]; \vec{J}_0 (\Omega, \rho_0) \right)$.

2. Если задача (47) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$ и компонента $y \in H_{\Gamma}^{1/2}$, с учетом (37) и (44), имеем

$$\Phi|_{\Gamma} = C \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{\Gamma} \in C^2 \left([0, T]; H_{\Gamma}^{1/2} \right), \quad \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{\Gamma} \in C^2 \left([0, T]; H_0 \right). \quad (57)$$

Отсюда следует, что для функции $\Phi = \Phi(t, x)$ выполнены уравнения и краевые условия задачи (28), причем в краевом условии на Γ все функции принадлежат пространству $C([0, T]; H_0)$. Из (56) следует, что

$$\rho_0^{-1} \nabla \Phi (t, x) \in C^2 \left([0, T]; \vec{G}_{h,S} (\Omega) \right).$$

Кроме того, в силу (57)

$$\begin{aligned} \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} (0, x) \right)_{\Gamma} &= \zeta^0 (\hat{x}) = C^{-1/2} y^0 \in H_0, \\ C^{-1/2} y^1 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} (0, \hat{x}) \right)_{\Gamma} = \left[(P_{h,S} \vec{u}^0 (x)) \cdot \vec{n} \right]_{\Gamma} \in H_0, \end{aligned}$$

Поэтому по лемме 2 можно получить, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0^{-1} \nabla \Phi \right) (0, x) = P_{h,S} \vec{u}^0 \in \vec{G}_{h,S} (\Omega, \rho_0). \quad (58)$$

Значит, согласно определению 4, функции $\vec{w}(t, x)$ и $\Phi(t, x)$ является сильным (по t) решением задачи (28) на отрезке $[0, T]$.

От задачи (28) к (18). Убедимся теперь, что из доказанных фактов следует существование сильного (по t) решения задачи (18). Следуя обратному ходу преобразований (см. (21)), введем по сильному решению $\vec{w}(t, x)$ и $\Phi(t, x)$ задачи (28) функции $\vec{v}(t, x)$ и $p(t, x)$:

$$\vec{v}(t, x) = \vec{w}(t, x) + \rho_0^{-1} \nabla \Phi(t, x) \in C^2 \left([0, T]; \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0) \right),$$

$$\text{так как } \vec{w}(t, x) \in C^2 \left([0, T]; \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \right), \quad \rho_0^{-1} \nabla \Phi(t, x) \in C^2 \left([0, T]; \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \right),$$

$$\begin{aligned} p_1|_{\Gamma} = g\rho_0(0)v_3|_{\Gamma} + \rho_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_3|_{\Gamma} = g\rho_0(0) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_{\Gamma} + \\ + \rho_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)_{\Gamma} \in C([0, T]; H_0), \end{aligned}$$

Следовательно, $\rho_0^{-1} \nabla p_1(x, t) \in \left([0, T]; \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \right)$, и с учетом (24)

$$\rho_0^{-1} \nabla p(t, x) = \rho_0^{-1} \nabla p_1(t, x) + \rho_0^{-1} \nabla p_2(t, x) \in \left([0, T]; \vec{G}(\Omega, \rho_0) \right),$$

Начальные условия задачи (28) порождают начальные условия задачи (18):

$$v_3(0, \hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \in H_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(0, x) = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{w} + \rho_0^{-1} \nabla \Phi)(0, x) = \vec{u}^0 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0).$$

От задачи (18) к (13). Опираясь на доказанные факты выше, учитывая связи (15), (16), легко проверить, что при условиях теоремы задача (13) имеет сильное (по t) решение в смысле определения 2.

В заключение отметим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = (P_0 \psi_0, C^{-1/2} P_{H_0} F_f)^t \in C([0, T]; \mathcal{H}) &\iff \\ \iff P_0 \psi_0 \in C([0, T]; \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)), \quad C^{-1/2} P_{H_0} F_f \in C([0, T]; H_0) &\iff \\ \iff P_0 \psi_0 \in C([0, T]; \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)), \quad P_{H_0} F_f \in C([0, T]; H_{\Gamma}^{1/2}) &\iff \\ \iff P_0 \psi_0 \in C([0, T]; \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)), \quad P_{h,S} \psi_0 = \rho_0^{-1} \nabla F \in C([0, T]; \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)). \end{aligned}$$

С учетом отделенного тривиального соотношения (24), получаем

$$\psi_0 \in C([0, T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)).$$

Последнее верно, тогда и только тогда, когда (см. (17)) $f(t) \in C([0, T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0))$. \square

Авторы благодарят рецензента за внимание к работе и уточнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краусс В.К. *Внутренние волны*. Л.: Гидрометеиздат. 1968. 272 с.
2. Тернер Дж. *Эффекты плавучести в жидкостях*. М.: Мир. 1977. 431 с.
3. Каменкович В.М. *Основы динамики океана*. Л.: Гидрометеиздат. 1973. 240 с.
4. Миропольский Ю.З. *Динамика внутренних гравитационных волн в океане*. Л.: Гидрометеиздат. 1981. 302 с.
5. Габов С.А., Свешников А.Г. *Задачи динамики стратифицированных жидкостей*. М.: Наука. 1986. 288 с.

6. Габов С.А., Свешников А.Г. *Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн*. М.: Наука. 1990. 341 с.
7. Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. *Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т.26, № 5. 1986. С. 734–755.
8. Kopachevsky N.D., Tsvetkov D.O. *Oscillations of stratificated fluids* // Journal of Math Sciences (Springer). Vol. 164, № 4. 2010. P. 574–602.
9. Габов С.А. *Об одной задаче гидродинамики идеальной жидкости, связанной с флотацией* // Дифференциальные уравнения. Т. 24, №1. 1988. С. 16–21.
10. Габов С.А. Свешников А.Г. *Математические задачи динамики флотирующей жидкости* // Итоги науки и техники, сер. Мат. анализ. Т. 28. 1990. С. 3–86.
11. Солдатов М.А. *Математические аспекты теории колебания жидкости в бассейне, частично покрытым льдом*. Диссертация на соиск. уч. степ. кандидата физ. мат. наук. Харьков. 2003. 207 с.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. М.: Наука. 1990. 341 с.
13. Бреховский Л.М., Гончаров В.В. *Введение в механику сплошных сред*. М.: Наука. 1982. 336с.
14. Копачевский Н.Д. *Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения*. Симферополь: ООО «Форма» . 2016 . 280 с.
15. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи*. М.:Наука. 1989. 416 с.
16. GAGLIARDO E. *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili* // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. Vol. 27. 1957. P. 284–305.
17. Копачевский Н.Д. *Интегродифференциальные уравнения Вольтера в гильбертовом пространстве: Специальный курс лекций*. Симферополь: ФЛП «Бондаренко О.А.» . 2012. 152 с.

Николай Дмитриевич Копачевский
Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского,
просп. акад. Вернадского, 4,
295000, Симферополь, Россия
E-mail: kopachevsky@list.ru

Денис Олегович Цветков
Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского,
просп. акад. Вернадского, 4,
295000, Симферополь, Россия
E-mail: tsvetdo@gmail.com